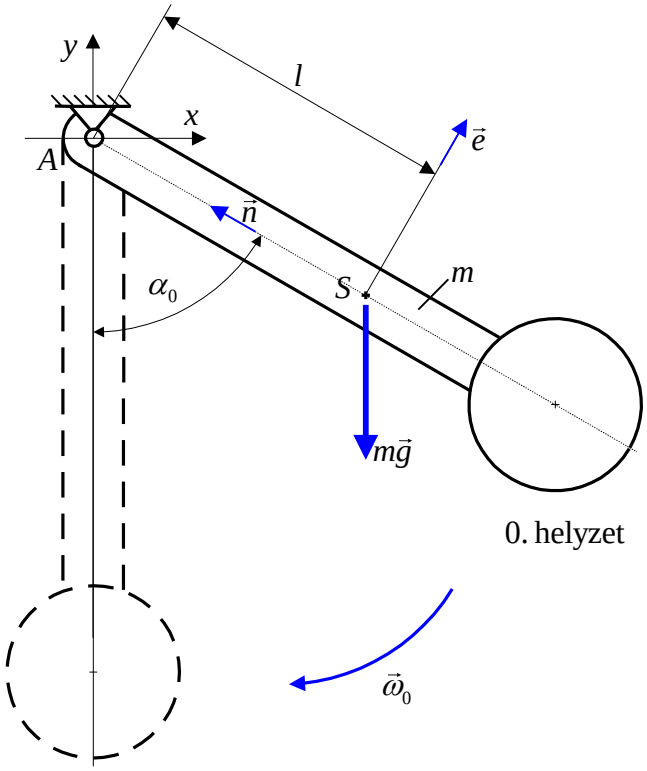
SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM **ALKALMAZOTT MECHANIKA TANSZÉK**

11. MECHANIKA-MOZGÁSTAN GYAKORLAT

(kidolgozta: Németh Imre óraadó tanár, Bojtár Gergely egyetemi ts., Szüle Veronika, egy. ts.)

11/1. feladat: Fizikai inga



Adott:

$\omega_0 = 4\frac{1}{\mathrm{s}}$,

$g \cong 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$,

$m = 10\ \mathrm{kg}$,

$J_S = 0{,}15\ \mathrm{kgm}^2$,

$l = 0{,}2\ \mathrm{m}$,

$\alpha_0 = 60^\circ$.

Feladat:

a) Az indítás pillanatában -0. helyzet-mekkora az inga S pontjának $\vec{a}_{S0}$ gyorsulása és az A pontban ható $\vec{F}_{A0}$ erő?

b) Határozza meg az inga 1. helyzetében az S pont $\vec{a}_{S1}$ gyorsulását és az A pontban ható $\vec{F}_{A1}$ erő értékét!

A feladatot az $\vec{e},\vec{n},\vec{b}$ koordináta-rendszerben oldjuk meg, ahol $\vec{b} = \vec{e} \times \vec{n}$, $|\vec{e}| = |\vec{n}| = |\vec{b}| = 1$.

a) Indítási helyzet:

Az ingára ható A ponti ismeretlen erőt vegyük fel $\vec{F}_{A0} = \left(F_{Ae_0}\vec{e} + F_{An_0}\vec{n}\right)$, az S pont gyorsulását $\vec{a}_{S0} = \left(a_{e0}\vec{e} + a_{n0}\vec{n}\right)$, míg az inga szöggyorsulását $\vec{\varepsilon}_0 = \left(-\varepsilon_0\vec{b}\right)$ alakban. Az inga szögsebessége az ábra alapján $\vec{\omega}_0 = \left(-4\,\vec{b}\right)\frac{1}{\mathrm{s}}$.

Az A pontra felírt perdület tétel alapján:

$$\frac{d\vec{\pi}_{A0}}{dt} = \dot{\vec{\pi}}_{A0} = \vec{M}_{A0}$$

$$\underline{\underline{J}}_A\vec{\varepsilon}_0+\underbrace{\vec{\omega}_0\times\vec{\pi}_{A0}}_{=\vec{0},\ mert\ ||-ak}=\vec{M}_{A0}\quad\Rightarrow\quad\vec{M}_{A0}+\left(-J_a\vec{\varepsilon}_0\right)=\vec{0}$$

$$\left(-mg\sin\alpha_0 l\ \vec{b}\right)+\left(J_a\varepsilon_0\ \vec{b}\right)=\vec{0}\qquad/\cdot\vec{b}$$

$$J_a\varepsilon_0=mg\sin\alpha_0 l$$

$$\varepsilon_0=\frac{mg\sin\alpha_0 l}{J_a}=\frac{mg\sin\alpha_0 l}{J_S+ml^2}=\frac{10\cdot10\cdot0,866\cdot0,2}{0,15+10\cdot0,2^2}=\frac{17,2}{0,55}=31,5\,\frac{1}{\mathrm{s}^2}$$

$$\vec{\varepsilon}_0=\left(-31,5\,\vec{b}\right)\frac{1}{\mathrm{s}^2}$$

$\vec{a}_{S0}=\left(a_{e0}\vec{e}+a_{n0}\vec{n}\right)$, ahol

$$a_{e0}=l\varepsilon_0=0,2\cdot(-31,5)=-6,3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\Rightarrow\vec{a}_{e0}=\left(-6,3\,\vec{e}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$a_{n0}=\frac{v_{s0}^2}{l}=l\omega_0^2=0,2\cdot16=3,2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\Rightarrow\vec{a}_{n0}=\left(3,2\,\vec{n}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$\vec{a}_{S0}=\left(a_{e0}\vec{e}+a_{n0}\vec{n}\right)=\left(-6,3\,\vec{e}\right)+\left(3,2\,\vec{n}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Az impulzus tétel (a kinetika alaptörvénye) alapján:

$$\vec{F}=m\,\vec{a}_S$$

$$\left(\vec{F}_{A0}+\vec{G}\right)+\left(-m\,\vec{a}_S\right)=\vec{0}$$

$$\left(F_{Ae_0}\vec{e}+F_{An_0}\vec{n}\right)+\left(-mg\sin\alpha_0 l\,\vec{e}-mg\cos\alpha_0\vec{n}\right)+\left(-ma_{e0}\vec{e}-ma_{n0}\vec{n}\right)=\vec{0}\qquad/\cdot\vec{e}\ /\cdot\vec{n}$$

$$F_{Ae_0}-mg\sin\alpha_0-ma_{e0}=0\qquad\qquad F_{An_0}-mg\cos\alpha_0-ma_{n0}=0$$

$$F_{Ae_0}=m\left(g\sin\alpha_0+a_{e0}\right)\qquad\qquad F_{An_0}=m\left(g\cos\alpha_0+a_{n0}\right)$$

$$F_{Ae_0}=10\cdot\left(10\cdot0,866-6,3\right)=23,6\ \mathrm{N}\qquad\qquad F_{An_0}=10\cdot\left(10\cdot0,5+3,2\right)=82\ \mathrm{N}$$

$$\vec{F}_{A0}=\left(23,6\,\vec{e}+82\,\vec{n}\right)\mathrm{N}$$

b) Függőleges helyzet vizsgálata:

Az inga szögsebessége függőleges helyzetben $\vec{\omega}_1$.

A munkatétel alapján: $E_1-E_0=W_{01}$

$$\frac{1}{2}J_a\omega_1^2-\frac{1}{2}J_a\omega_0^2=mgl\left(1-\cos\alpha_0\right)$$

$$\omega_1^2=\omega_0^2+\frac{2ml}{J_a}\left(1-\cos\alpha_0\right)$$

$$\omega_1^2=16+\frac{2\cdot10\cdot10\cdot0,2}{0,55}\left(1-0,5\right)=52,36\Rightarrow\omega_1=7,236\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

$$\vec{\omega}_1=\left(-7,236\,\vec{b}\ \right)\frac{1}{\mathrm{s}}$$

Az A pontra felírt perdület tétel alapján:

$\dfrac{d\vec{\pi}_{A1}}{dt}=\dot{\vec{\pi}}_{A1}=\vec{M}_{A1}$ Az inga szöggyorsulását vegyük fel $\vec{\varepsilon}_1=\left(-\varepsilon_1\,\vec{b}\ \right)$ irányításúnak!

$$\underline{\underline{J}}_A\vec{\varepsilon}_1+\underbrace{\vec{\omega}_1\times\vec{\pi}_{A1}}_{\vec{0},\,mert\,||-ak}=\vec{M}_{A1}\Rightarrow\vec{M}_{A1}+\left(-J_a\vec{\varepsilon}_1\right)=\vec{0}$$

$$\left(\vec{0}\right)+\left(J_a\varepsilon_1\vec{b}\right)=\vec{0}\qquad/\cdot\vec{b}$$

$$J_a\varepsilon_1=0\Rightarrow\quad\varepsilon_1=0\ \ \frac{1}{\mathrm{s}^2}$$

$\vec{a}_{S1}=\left(a_{e1}\vec{e}+a_{n1}\vec{n}\right)$, ahol $a_{e1}=l\varepsilon_1=0,2\cdot0=0\quad\Rightarrow\quad\vec{a}_{e1}=\vec{0}$

$$a_{n1}=\frac{v_{S1}^2}{l}=l\omega_1^2=0,2\cdot7,236^2=10,47\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\quad\Rightarrow\vec{a}_{n1}=\left(10,47\,\vec{n}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$\vec{a}_{S1}=\left(a_{e1}\vec{e}+a_{n1}\vec{n}\right)=\left(10,47\,\vec{n}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Az impulzus tétel (a kinetika alaptörvénye) alapján:

$$\vec{F}=m\,\vec{a}_S$$

$$\left(\vec{F}_{A1}+\vec{G}\right)+\left(-m\,\vec{a}_S\right)=\vec{0}$$

$$\left(F_{Ae_1}\vec{e}+F_{An_1}\vec{n}\right)+\left(-mg\,\vec{n}\right)+\left(-ma_{e1}\vec{e}-ma_{n1}\vec{n}\right)=\vec{0}\qquad/\cdot\vec{e}\ /\cdot\vec{n}$$

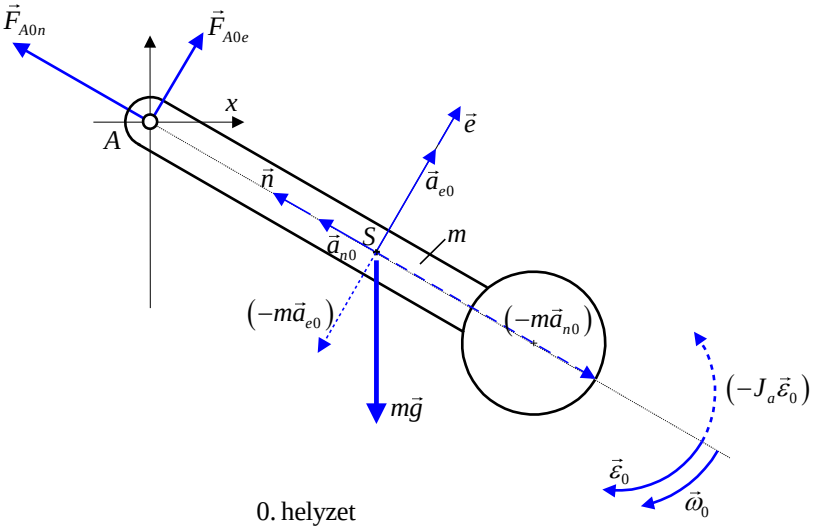
$$F_{Ae_1}-ma_{e0}=0\qquad\qquad F_{An_1}-mg-ma_{n1}=0$$

$$F_{Ae_1}=ma_{e1}=0\qquad\qquad F_{An_1}=m\left(g+a_{n1}\right)$$

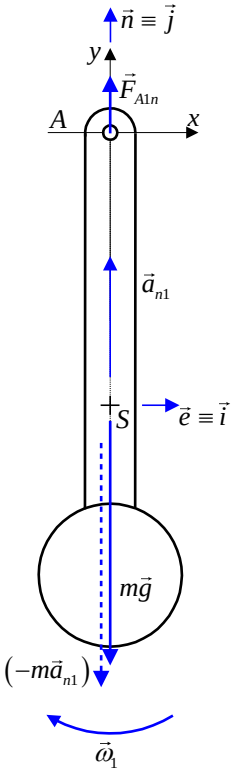
$$F_{An_1}=10\cdot\left(10+10,47\right)=204,7\ \mathrm{N}$$

$$\vec{F}_{A1}=\left(204,7\,\vec{n}\right)\mathrm{N}$$

A két helyzetben fellépő mennyiségek szemléltetése:

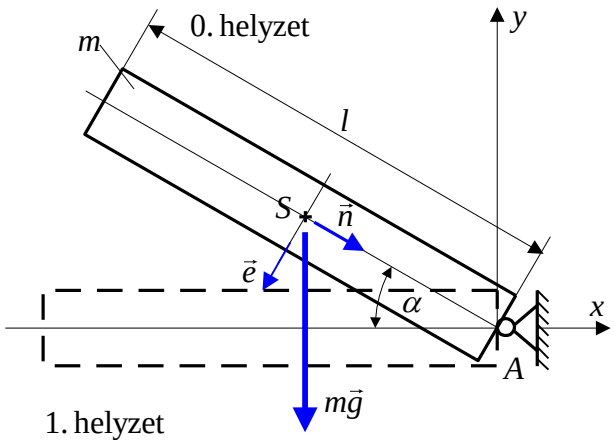


0. helyzet



1. helyzet

11/2. feladat: Fizikai inga



Adott:

$\alpha = 30^\circ$, $g \cong 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$,

$m = 4\,\mathrm{kg}$, $\omega_0 = 0$

$l = 2\,\mathrm{m}$.

Feladat:

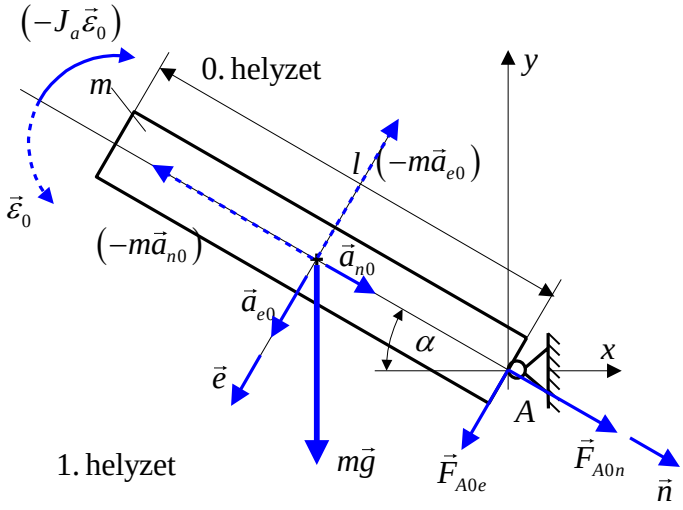
a) Az indítás pillanatában -0. helyzet-mekkora a rúd S pontjának $\vec{a}_{S0}$ gyorsulása és az A pontban ható $\vec{F}_{A0}$ erő?

b) Határozza meg a rúd 1. helyzetében a rúd $\vec{\omega}_1$ szögsebességét!

A feladatot az $\vec{e},\vec{n},\vec{b}$ koordináta-rendszerben oldjuk meg, ahol $\vec{b} = \vec{e} \times \vec{n}$, $|\vec{e}| = |\vec{n}| = |\vec{b}| = 1$.

a) Indítási helyzet:

A rúdra ható A ponti ismeretlen erőt vegyük fel $\vec{F}_{A0} = \left(F_{A0}\vec{e} + F_{An0}\vec{n}\right)$, az S pont gyorsulását $\vec{a}_{S0} = \left(a_{e0}\vec{e} + a_{n0}\vec{n}\right)$, míg a rúd szöggyorsulását $\vec{\varepsilon}_0 = \left(-\varepsilon_0\vec{b}\right)$ alakban. A rúd szögsebessége az ábra alapján $\vec{\omega} = \left(\omega\,\vec{b}\right)$.



Az A pontra felírt perdület tétel alapján:

$$\frac{d\vec{\pi}_{A0}}{dt} = \dot{\vec{\pi}}_{A0} = \vec{M}_{A0}$$

$$\underline{\underline{J}}_A\vec{\varepsilon}_0 + \underbrace{\vec{\omega}_0 \times \vec{\pi}_{A0}}_{=\vec{0},\, mert\,||-ak} = \vec{M}_{A0} \quad \Rightarrow \quad \vec{M}_{A0} + \left(-J_a\vec{\varepsilon}_0\right) = \vec{0}$$

$$\left(mg\cos\alpha\,\frac{l}{2}\,\vec{b}\right) + \left(-J_a\varepsilon_0\,\vec{b}\right) = \vec{0} \qquad /\cdot\vec{b}$$

$$J_a\varepsilon_0 = mg\cos\alpha\,\frac{l}{2}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{mg\cos\alpha\,l}{2\cdot J_a} = \frac{mg\cos\alpha\,l}{2\cdot\left[J_S + m\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{mg\cos\alpha\,l}{2\cdot\left[\frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]} = \frac{mg\cos\alpha\,l}{2\cdot\left[\frac{1}{3}ml^2\right]} = \frac{4\cdot 10\cdot 0{,}866\cdot 2}{2\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot 4\cdot 2^2\right]} = \frac{69{,}28}{2\cdot 5{,}33} = 6{,}49\,\frac{1}{\mathrm{s}^2}$$

$\vec{\varepsilon}_0 = \left(6,49\,\vec{b}\right)\frac{1}{\mathrm{s}^2}$

$\vec{a}_{S0} = \left(a_{e0}\vec{e} + a_{n0}\vec{n}\right)$, ahol

$a_{e0} = \frac{l}{2}\varepsilon_0 = 1\cdot\left(6,49\right) = 6,49\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \Rightarrow \vec{a}_{e0} = \left(6,49\,\vec{e}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

$a_{n0} = \frac{v_{s0}^2}{l} = l\omega_0^2 = 2\cdot 0^2 = 0 \Rightarrow \vec{a}_{n0} = \vec{0}$

$\vec{a}_{S0} = \left(a_{e0}\vec{e} + a_{n0}\vec{n}\right) = \left(6,49\,\vec{e}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Az impulzus tétel (a kinetika alaptörvénye) alapján:

$\vec{F} = m\,\vec{a}_S$

$\left(\vec{F}_{A0} + \vec{G}\right) + \left(-m\,\vec{a}_S\right) = \vec{0}$

$\left(F_{Ae_0}\vec{e} + F_{An_0}\vec{n}\right) + \left(mg\cos\alpha_0 l\,\vec{e} + mg\sin\alpha\,\vec{n}\right) + \left(-ma_{e0}\vec{e} - ma_{n0}\vec{n}\right) = \vec{0} \qquad /\cdot\vec{e}\ \ /\cdot\vec{n}$

$F_{Ae_0} + mg\cos\alpha - ma_{e0} = 0$ $\qquad$ $F_{An_0} + mg\sin\alpha - ma_{n0} = 0$

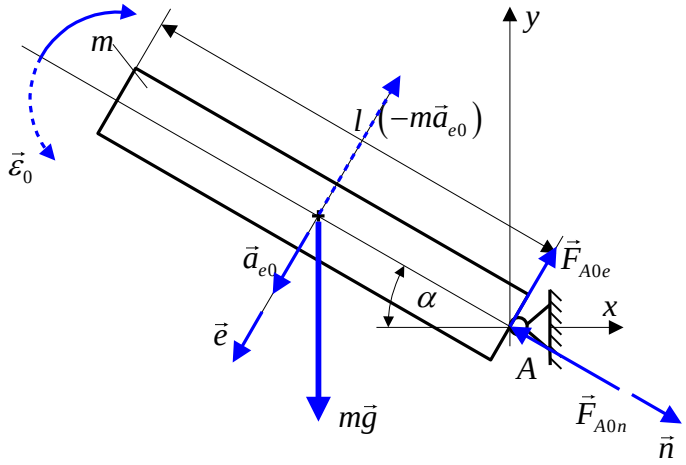
$F_{Ae_0} = m\left(a_{e0} - g\cos\alpha_0\right)$ $\qquad$ $F_{An_0} = m\left(g\cos\alpha_0 + a_{n0}\right)$

$F_{Ae_0} = 4\cdot\left(6,49 - 10\cdot 0,866\right) = -8,68\ \mathrm{N}$ $\qquad$ $F_{An_0} = -4\cdot 10\cdot 0,5 = -20\ \mathrm{N}$

$\vec{F}_{A0} = \left(-8,68\,\vec{e} - 20\,\vec{n}\right)\ \mathrm{N}$

A 0. helyzetben fellépő mennyiségek szemléltetése:

$\left(-J_a\vec{\varepsilon}_0\right)$



b) Vízszintes helyzet vizsgálata:

A rúd szögsebessége vízszintes helyzetben $\vec{\omega}_1$.

A munkatétel alapján: $E_1 - E_0 = W_{01}$

$\frac{1}{2}J_a\omega_1^2 - \frac{1}{2}J_a\underset{=0}{\omega_0^2} = mg\frac{l}{2}\sin\alpha$

$\frac{1}{2}J_a\omega_1^2 = mg\frac{l}{2}\sin\alpha$

$\omega_1^2 = \frac{mgl\sin\alpha}{J_a} = \frac{4\cdot 10\cdot 2\cdot 0,5}{5,33} = 7,5 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_1 = \sqrt{7,5} = 2,739\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

$\vec{\omega}_1 = \left(2,739\,\vec{b}\ \right)\frac{1}{\mathrm{s}}$