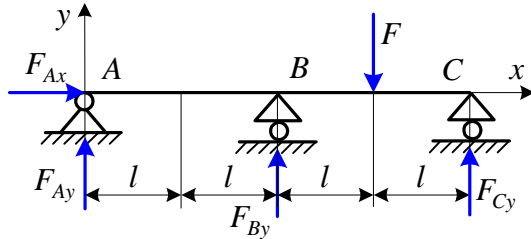


14. MECHANIKA-SZILÁRDSÁGTAN GYAKORLAT

(kidolgozta: Tarnai Gábor mérnök-tanár.)

**14.1. Statikailag határozatlan tartó igénybevételeinek meghatározása:  
(Castigliano tétel)**



Adott:  
 $l = 2 \text{ m}$ ,  
 $F = 32 \text{ kN}$ ,  
 $I_z = 50\,000 \text{ mm}^4$ ,  
 $E = 2,1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ .

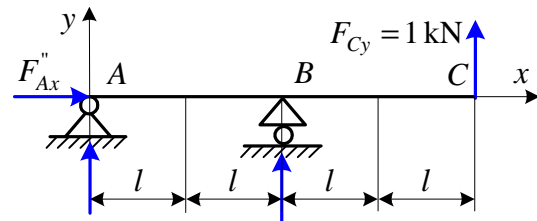
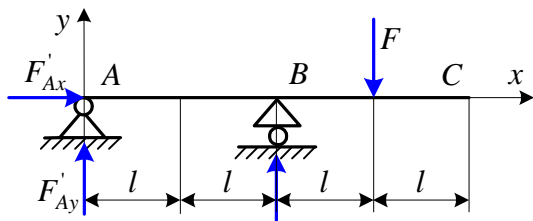
Statikai ismeretlenek:  $F_{Ax}$ ,  $F_{Ay}$ ,  $F_{By}$ ,  $F_{Cy}$ . Statikai egyenletek száma: 3 db.

A tartó statikailag egyszeresen határozatlan.

Feladat: határozza meg a tartó támasztó erőrendszerét.

Megoldás:

a) Statikailag határozottá tétel:



támasztó erőrendszer:

$$M_a = 0 = 2lF'_{By} - 3lF$$

$$F'_{By} = \frac{3}{2}F (\uparrow)$$

$$M_b = 0 = -2lF'_{Ay} - lF$$

$$F'_{Ay} = -\frac{1}{2}F (\downarrow)$$

$$F_x = 0 \Rightarrow F'_{Ax} = 0$$

$$M_a = 0 = 2lF''_{By} + 4l \cdot 1$$

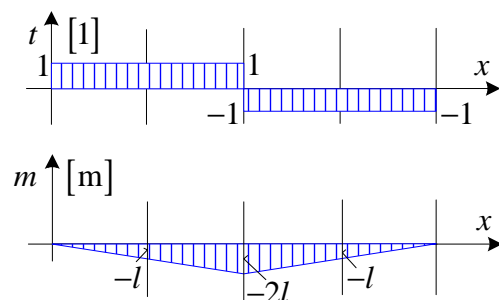
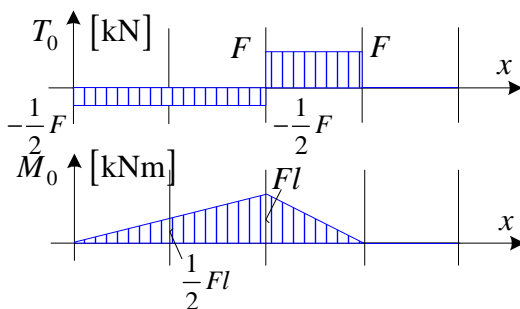
$$F''_{By} = 2 (\downarrow)$$

$$M_b = 0 = -2lF''_{Ay} + 2lF$$

$$F''_{Ay} = 1 (\uparrow)$$

$$F_x = 0 \Rightarrow F''_{Ax} = 0$$

igénybevételi ábrák:



b) Kinematikai előírás:  $v_c = 0$  (Castigliano-tétel)

$$v_c = \frac{\partial U}{\partial F_{Cy}} = 0, \quad U = \frac{1}{2} \int_{(4l)} \frac{(M_0 + F_{Cy}m)^2}{I_z E} dx, \quad (\text{ha a nyírási energiát elhanyagoljuk})$$

$$v_c = \frac{\partial U}{\partial F_{Cy}} = \frac{1}{I_z E} \int_{(4l)} (M_0 + F_{Cy}m)m dx = \frac{1}{I_z E} \left[ \int_{(4l)} M_0 m dx + F_{Cy} \int_{(4l)} m^2 dx \right]$$

$$\Rightarrow F_{Cy} = - \frac{\int M_0 m dx}{\int m^2 dx}$$

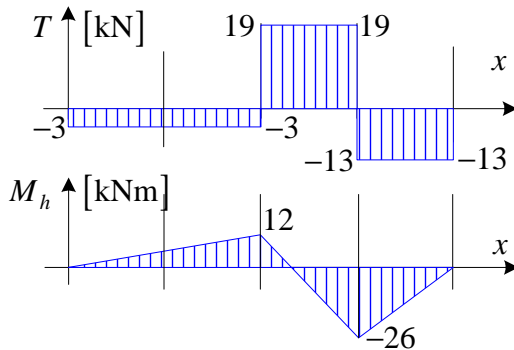
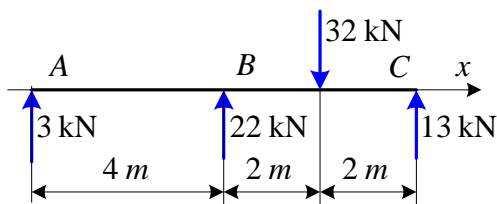
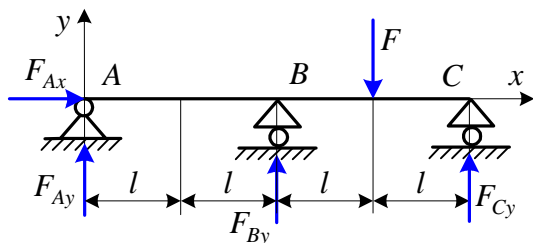
Integrálok kiszámítása:

$$\int_{(4l)} M_0 m dx = \frac{2l}{6} \left[ 0 + 4 \left( \frac{Fl}{2} \right) (-l) + (Fl)(-2l) \right] + \frac{l}{6} \left[ (Fl)(-2l) + 4 \left( \frac{Fl}{2} \right) \left( -\frac{3}{2}l \right) + 0 \right] = \frac{13l^3}{6}$$

$$\int_{(4l)} m^2 dx = \frac{2l}{6} \left[ 0 + 4(-l)^2 + (-2l)^2 \right] + \frac{2l}{6} \left[ (-2l)^2 + 4(-l)^2 + 0 \right] = \frac{32l^3}{6}$$

$$\Rightarrow F_{Cy} = - \frac{\int M_0 m dx}{\int m^2 dx} = - \frac{\frac{13l^3}{6}}{\frac{32l^3}{6}} = - \frac{13}{32} F (\uparrow) \quad \Rightarrow \quad F_{Cy} = \frac{13}{32} 32 = 12 \text{ kN} (\uparrow).$$

c) A hiányzó támasztóerők meghatározása



$$F_x = 0 \Rightarrow F_{Ax} = 0.$$

$$M_a = 0 = 2lF_{By} - 3lF + 4l \frac{13}{32} F$$

$$\Rightarrow F_{By} = \frac{11}{16} F = 22 \text{ kN} (\uparrow).$$

$$M_b = 0 = -2lF_{Ay} - lF + 2l \frac{13}{32} F$$

$$\Rightarrow F_{Ay} = -\frac{3}{32} F = -3 \text{ kN} (\downarrow).$$

d) Veszélyes keresztmetszet:

$$T = 19 \text{ kN};$$

$$M_h = -26 \text{ kNm};$$

