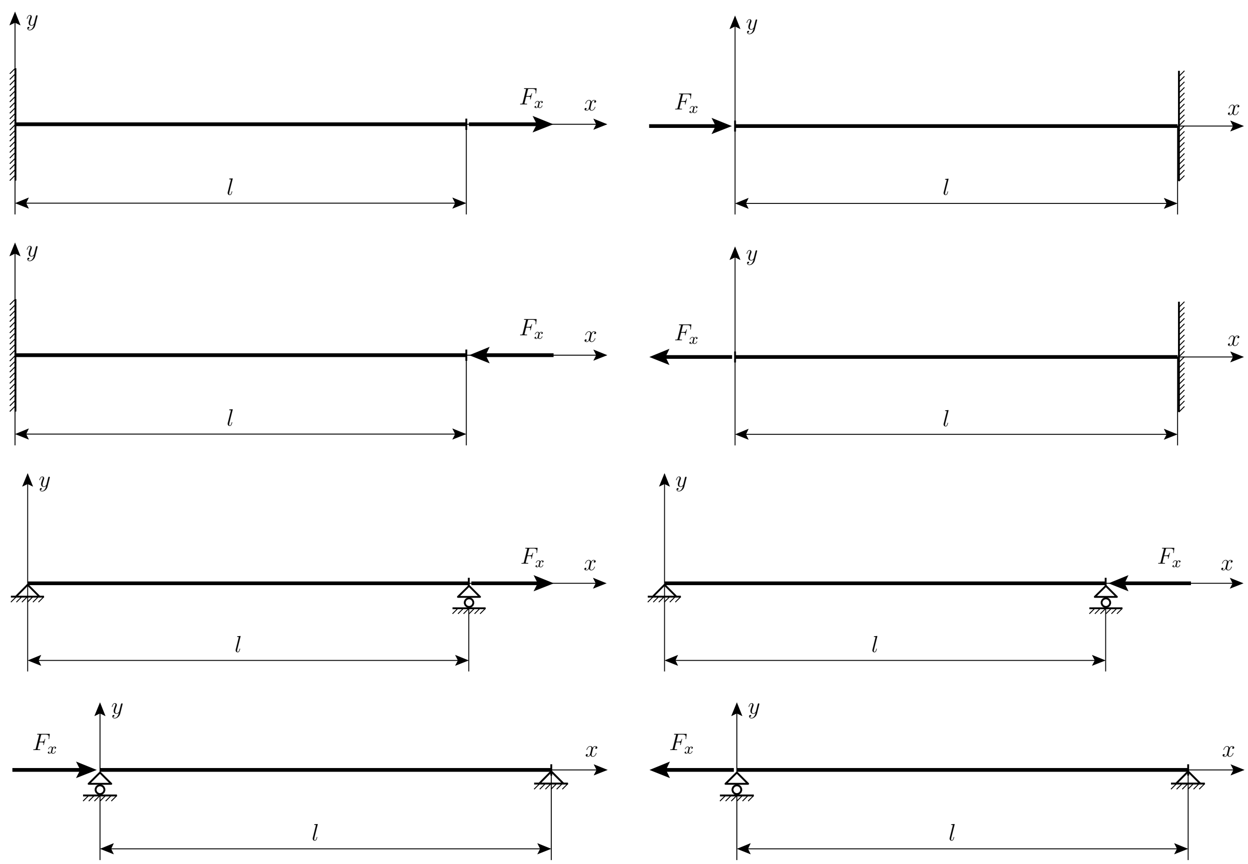
Széchenyi István Egyetem

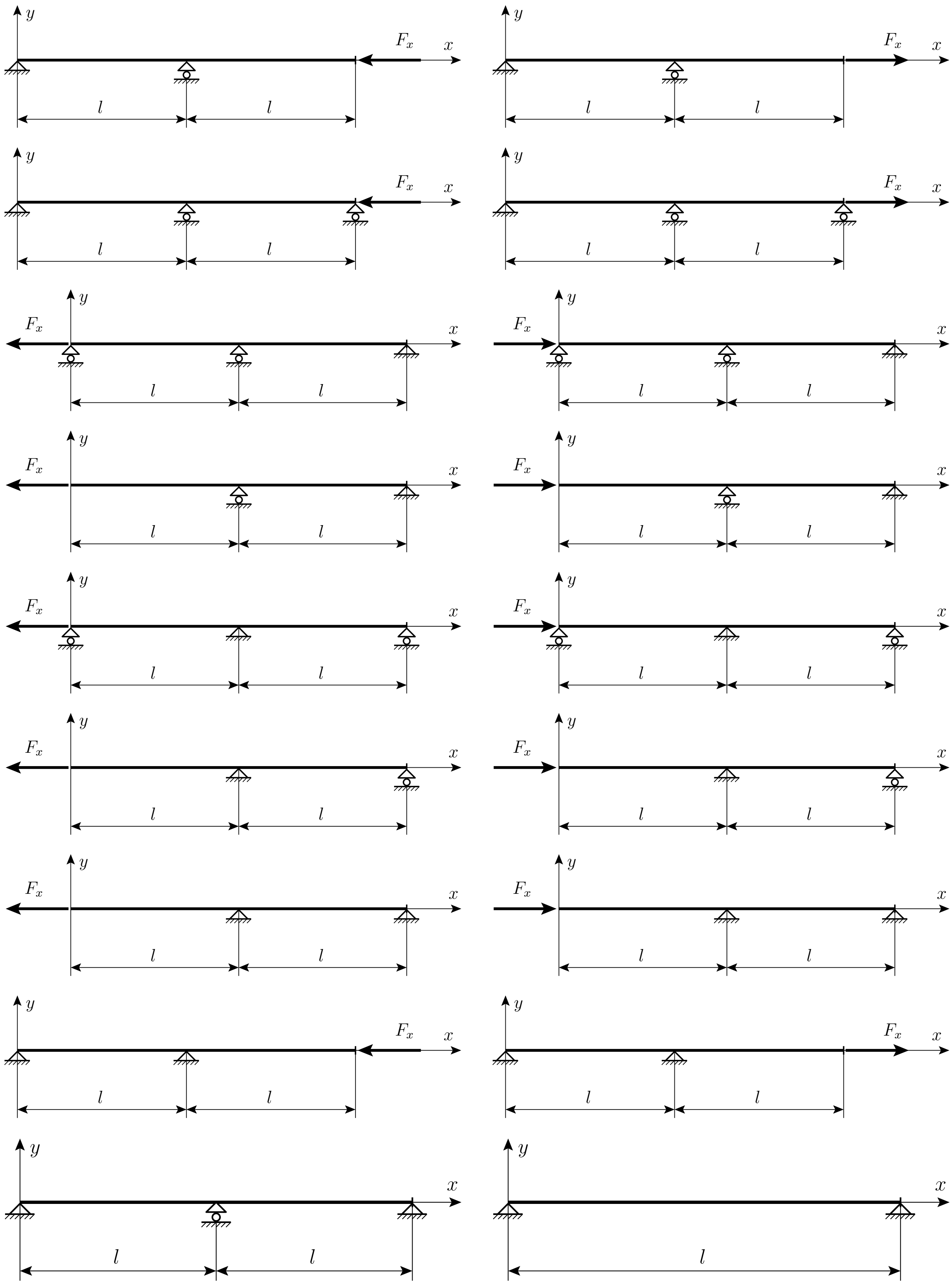
Alkalmazott Mechanika Tanszék

Végeselem módszer	**Elméleti kérdések egyetemi alapképzésben (BSc) résztvevő mérnökhallgatók számára**

2013. január 8.

1. Származtassa véges hosszúságú rúdszakasz egyensúlyából a húzott-nyomott rudakra vonatkozó egyensúlyi egyenlet differenciális alakját!
2. Írja fel a húzott-nyomott rudakra vonatkozó egyensúlyi egyenlet differenciális alakját!
3. Származtassa véges hosszúságú rúdszakasz fajlagos nyúlásából a húzott-nyomott rudakra vonatkozó kinematikai egyenlet differenciális alakját!
4. Írja fel a húzott-nyomott rudakra vonatkozó kinematikai egyenlet differenciális alakját!
5. Írja fel a húzott-nyomott rudakra érvényes anyagtörvényt!
6. Adja meg az ábrán látható rúdszerkezetre érvényes peremfeltételeket. Nevezze meg, hogy az egyes peremfeltételek milyen típusúak!





7. Adott az

$$\frac{dN(x)}{dx} \pm f_x = 0$$

$$\varepsilon_x(x) = \frac{du(x)}{dx}$$

$$N(x) = AE\varepsilon_x(x)$$

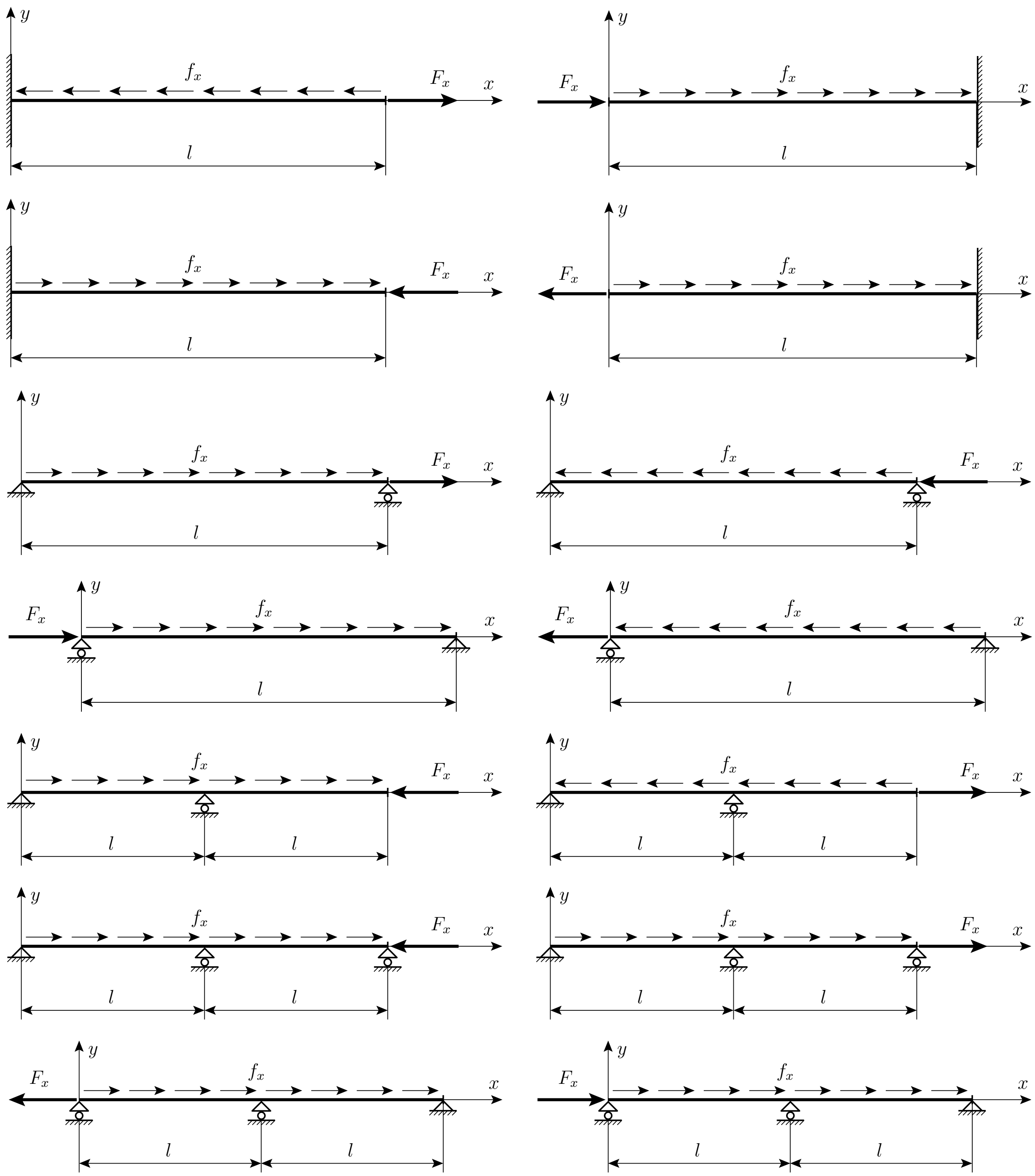
egyenletrendszer és az

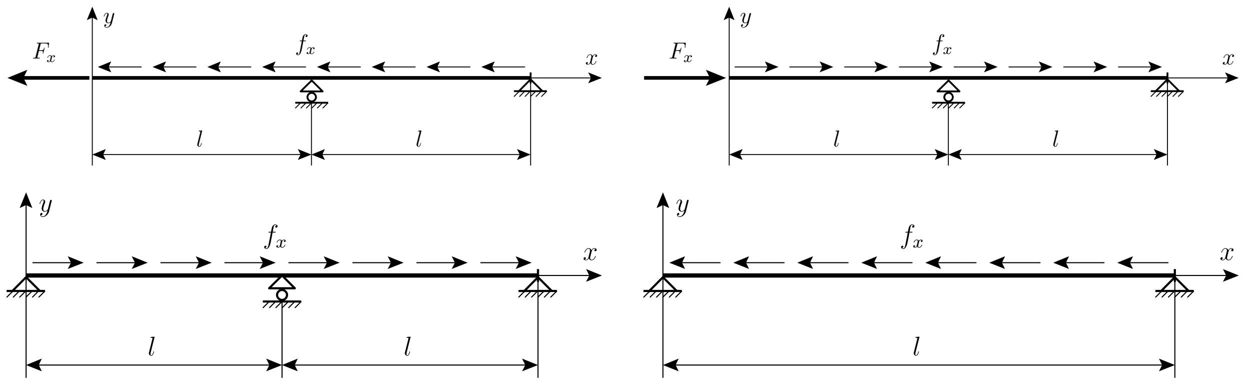
$$u(x = \dots) = \dots$$

valamint

$$N(x = \dots) = \dots$$

peremfeltételek. Oldja meg az egyenletrendszert az ábrán megadott adatokkal és peremfeltételekkel (ügyelve az előjelekre), valamint írja fel a megoldásként kapott $u(x)$ elmozdulásmezőt és az $N(x)$ rúderőt. Ábrázolja mindkét függvényt grafikonon az x koordináta függvényében, ha $F_x = 1\text{kN}$, $f_x = 1\frac{\text{kN}}{\text{m}}$, $A = 100\text{mm}^2$, $l = 1\text{m}$, $E = 2 \cdot 10^5\text{MPa}$.





8. Mit nevezünk kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőnek?

9. Mit nevezünk virtuális elmozdulásmezőnek? Mik a virtuális elmozdulásmező tulajdonságai?

10. Mit nevezünk az elmozdulásmező variációjának? Mik az elmozdulásmező variációjának tulajdonságai?

11. Mit nevezünk statikailag lehetséges feszültségmezőnek?

12. Szilárdságtani feladatok közelítő megoldásánál mit nevezünk elmozdulás módszernek?

13. Szilárdságtani feladatok közelítő megoldásánál mit nevezünk erő módszernek?

14. Az egyensúlyi egyenletből kiindulva vezesse le egydimenziós feladatra a virtuális munka elv variációs alakját! A szükséges peremfeltételek a 7. feladat ábráin láthatók.

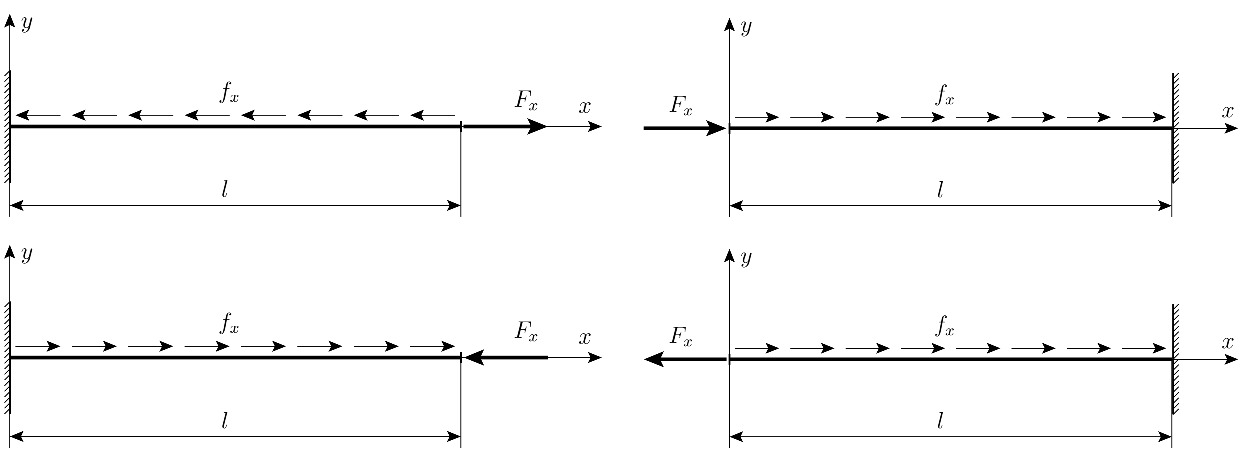
15. Az egyensúlyi egyenletből kiindulva vezesse le az egydimenziós rugalmas peremérték feladat gyenge alakját! A szükséges peremfeltételek a 7. feladat ábráin láthatók.

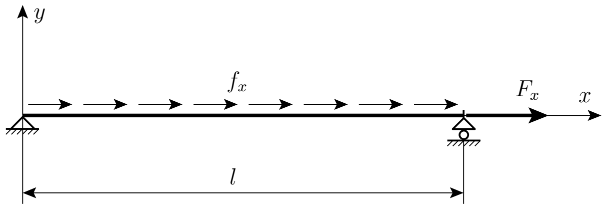
16. A gyenge alakra alapozott közelítő megoldásoknak milyen tulajdonságai vannak?

17. Definiálja a teljes potenciális energiát.

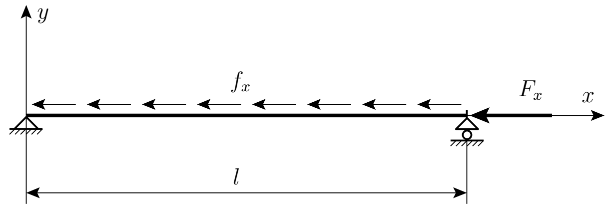
18. Írja fel egy l hosszúságú, A keresztmetszetű, E rugalmassági modulusú húzott-nyomott rúd alakváltozási energiáját az $u(x)$ elmozdulásmező függvényében.

19. Írja fel az ábrán látható A keresztmetszetű rúdra ható rúdirányú F_x erő és/vagy az f_x vonal mentén megoszló terhelés virtuális munkáját az $u(x)$ elmozdulásmező függvényében.

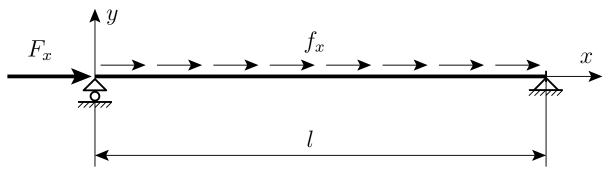




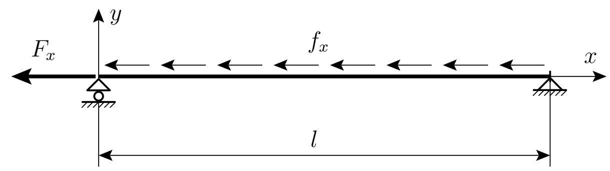
y
f_x
F_x
x
l



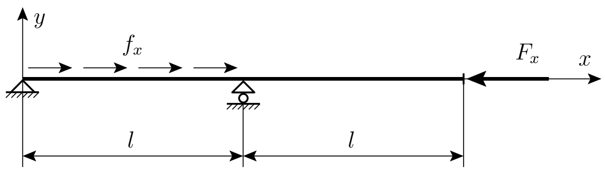
y
f_x
F_x
x
l



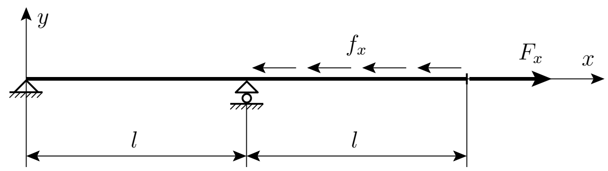
y
F_x
f_x
x
l



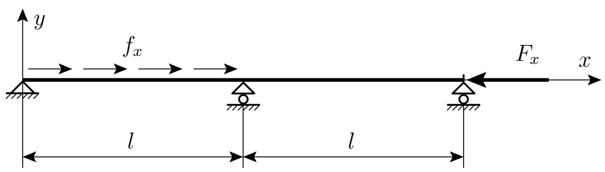
y
F_x
f_x
x
l



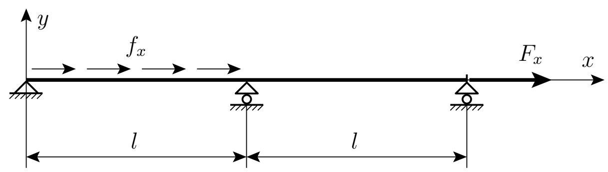
y
f_x
F_x
x
l l



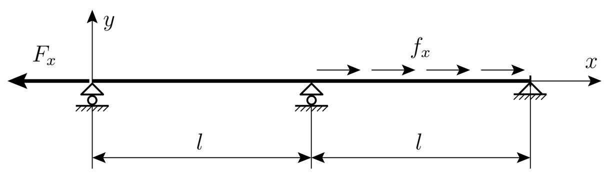
y
f_x
F_x
x
l l



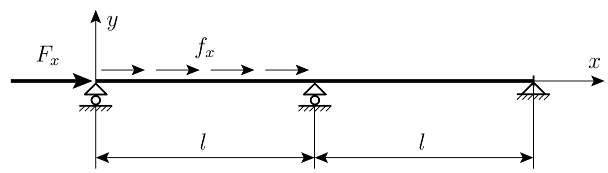
y
f_x
F_x
x
l l



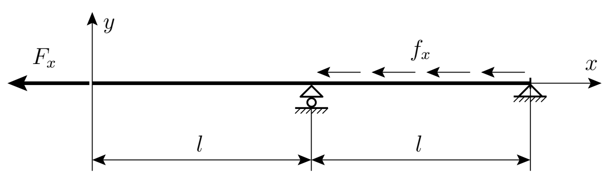
y
f_x
F_x
x
l l



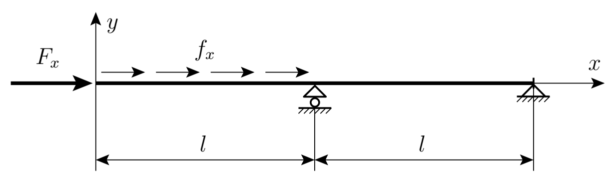
y
F_x
f_x
x
l l



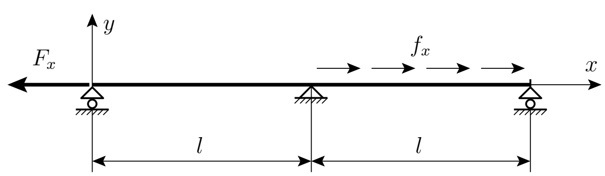
y
F_x
f_x
x
l l



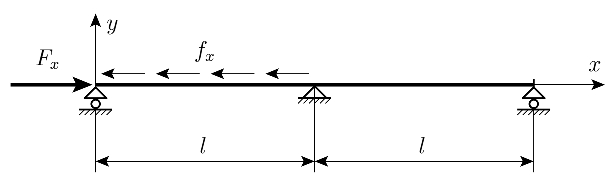
y
F_x
f_x
x
l l



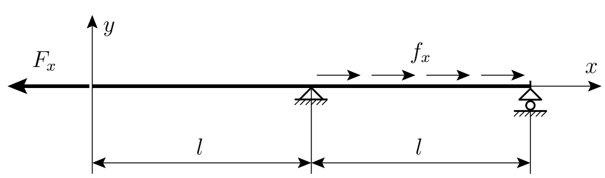
y
F_x
f_x
x
l l



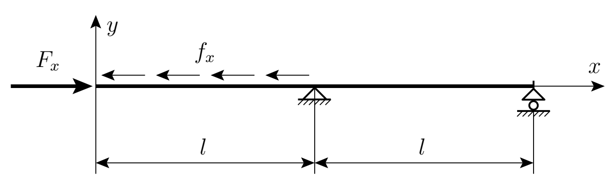
y
F_x
f_x
x
l l



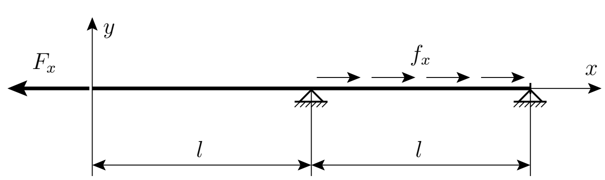
y
F_x
f_x
x
l l



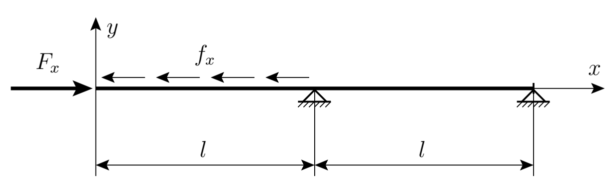
y
F_x
f_x
x
l l



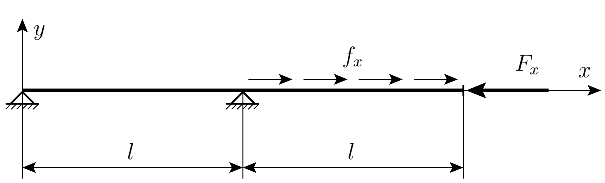
y
F_x
f_x
x
l l



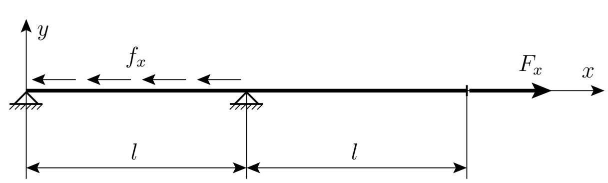
y
F_x
f_x
x
l l



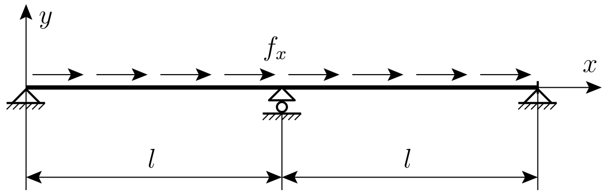
y
F_x
f_x
x
l l

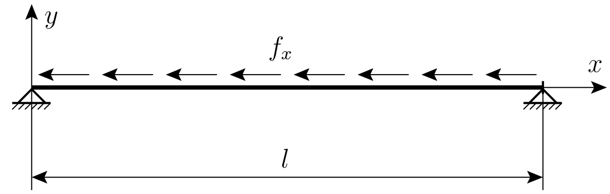


y
f_x
F_x
x
l l



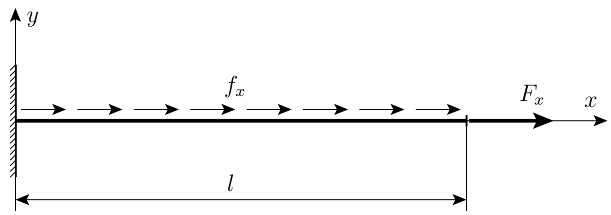
y
f_x
F_x
x
l l





20. Mit mond ki a teljes potenciális energia minimuma elv?

21. Bizonyítsa be a teljes potenciális energia minimuma elvet az ábrán látható feladat esetére, ahol a rúd keresztmetszete A, anyagának rugalmassági modulusa pedig E.

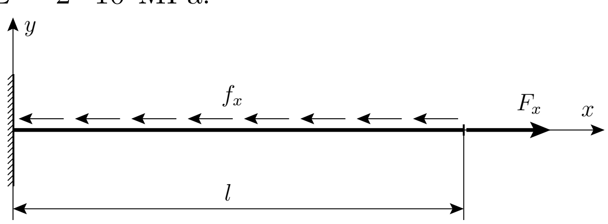


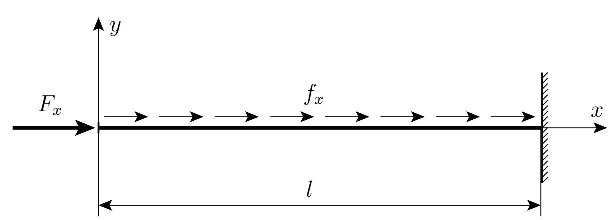
22. Írja fel teljes potenciális energiát, illetve annak első és második variációját az $u\,(x)$ elmozdulásmező és az elmozdulásmező $\delta u\,(x)$ variációjának függvényében.

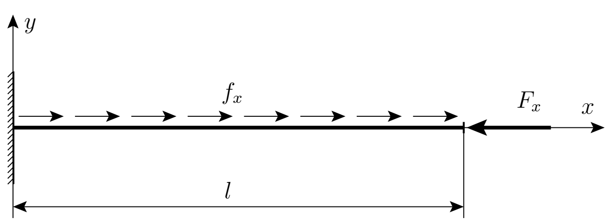
23. Milyen tulajdonságokkal rendelkezik a teljes potenciális energia első és második variációja?

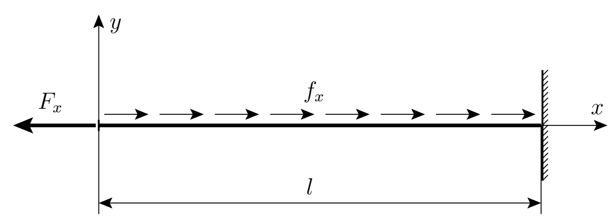
24. Egy rugalmas egydimenziós peremérték feladat teljes potenciális energiáját egy $u^*\,(x)$ kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőre a $\Pi_p\,[u^*\,(x)]$ funkcionál adja meg. Milyen feltételeknek kell teljesülni ahhoz, hogy a $\Pi_p\,[u^*\,(x)]$ funkcionálnak szélső értéke legyen, ha a kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőt az $u^*\,(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$ alakban írjuk fel? Ezek szükséges vagy elégséges feltételt jelentenek? Válaszát indokolja.

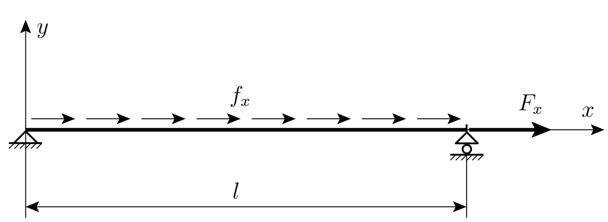
25. Számítsa ki Ritz-módszer és lineáris approximáció alkalmazásával az ábrán látható rúdszerkezet $u^*\,(x)$ közelítő elmozdulásmezejét illetve $N^*\,(x)$ közelítő rúderejét. A megoldásokat ábrázolja grafikonon az x koordináta függvényében, ha $F_x = 1\text{kN}$, $f_x = 1\frac{\text{kN}}{\text{m}}$, $A = 100\text{mm}^2$, $l = 1\text{m}$, $E = 2 \cdot 10^5\text{MPa}$.

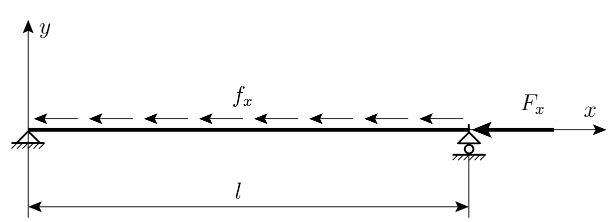


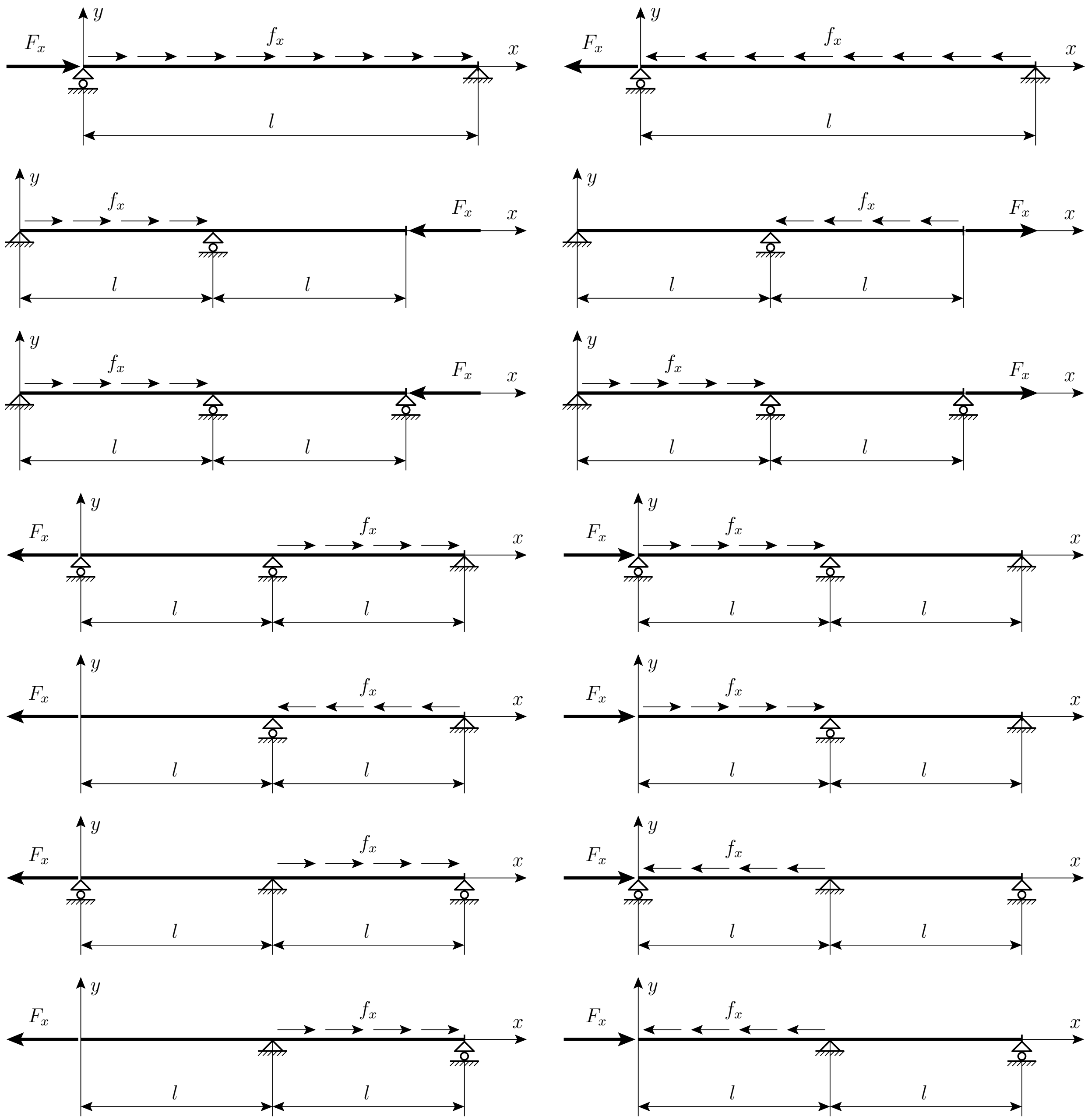




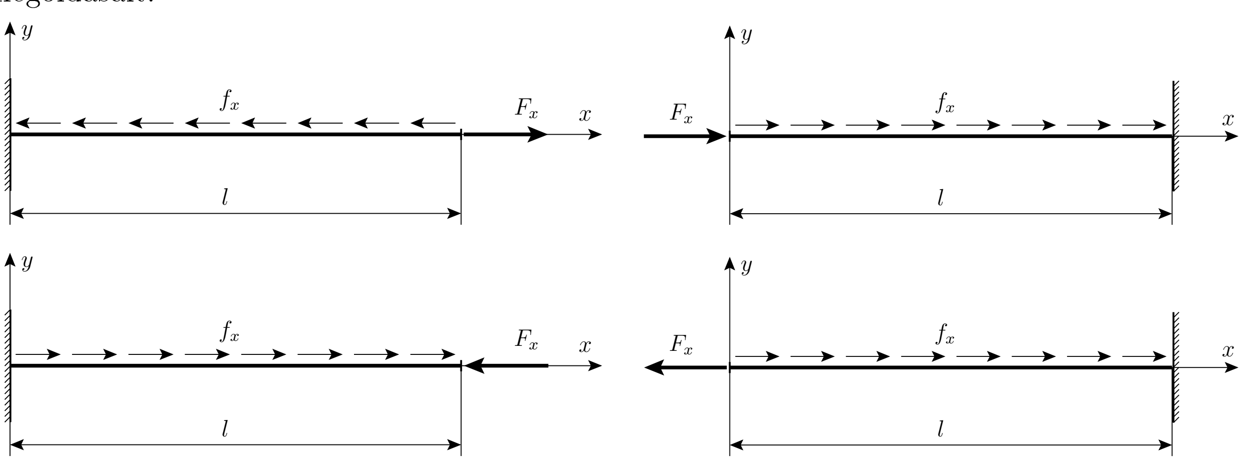


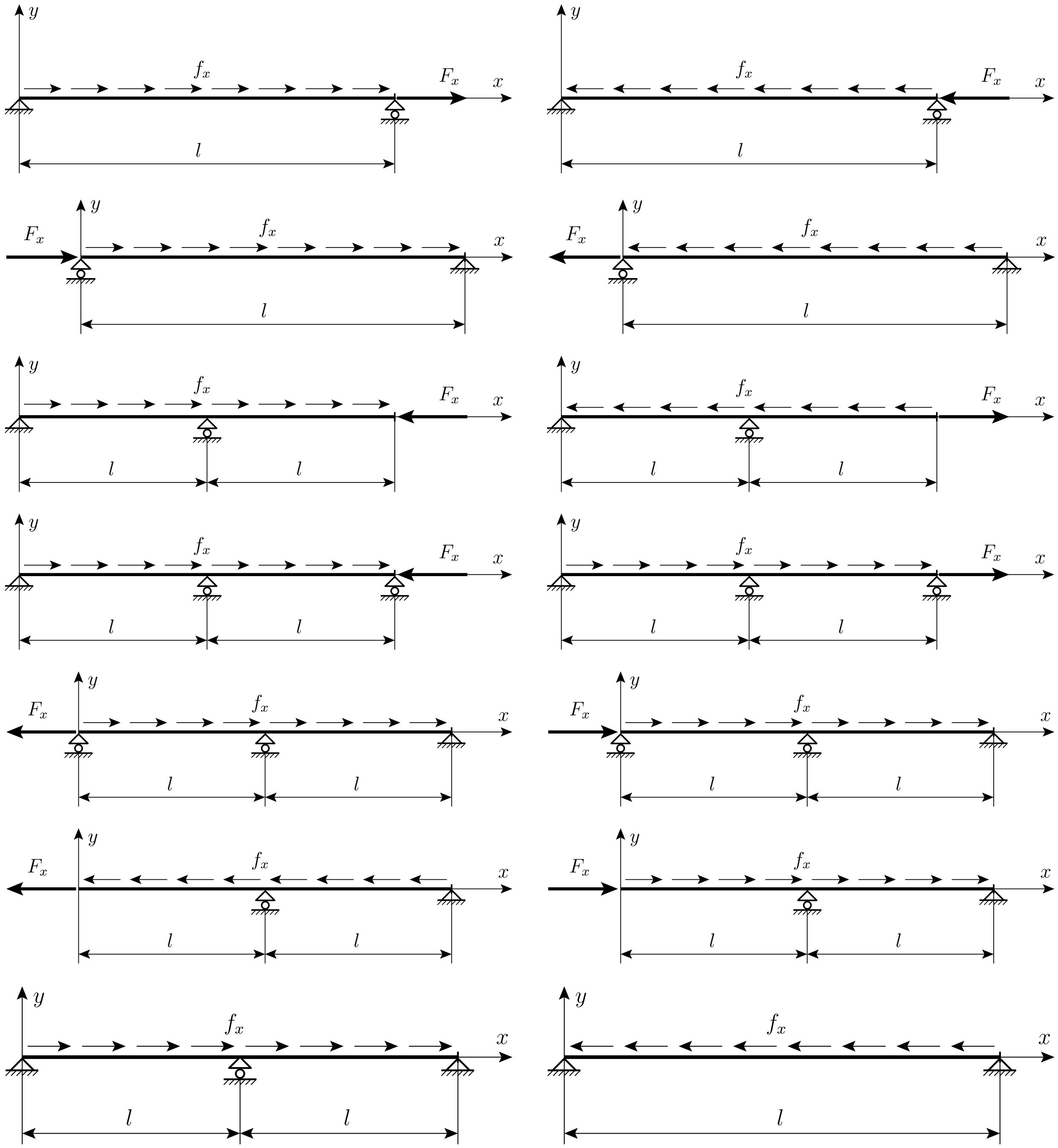




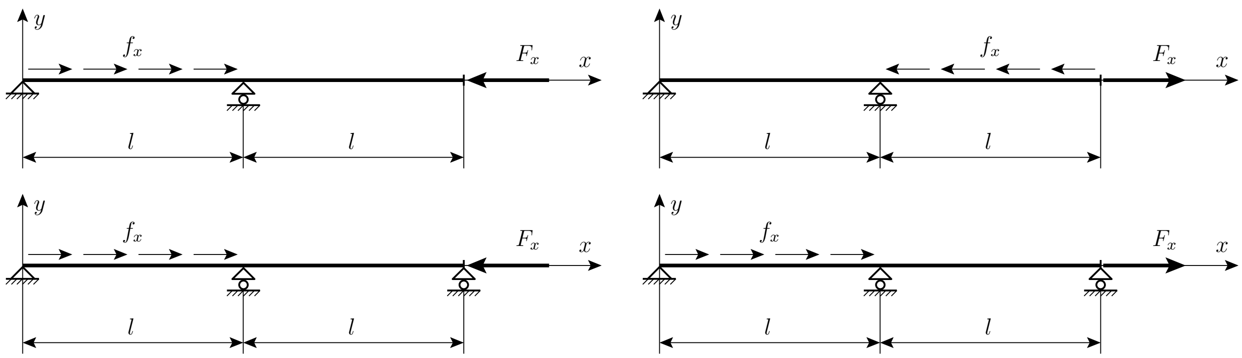


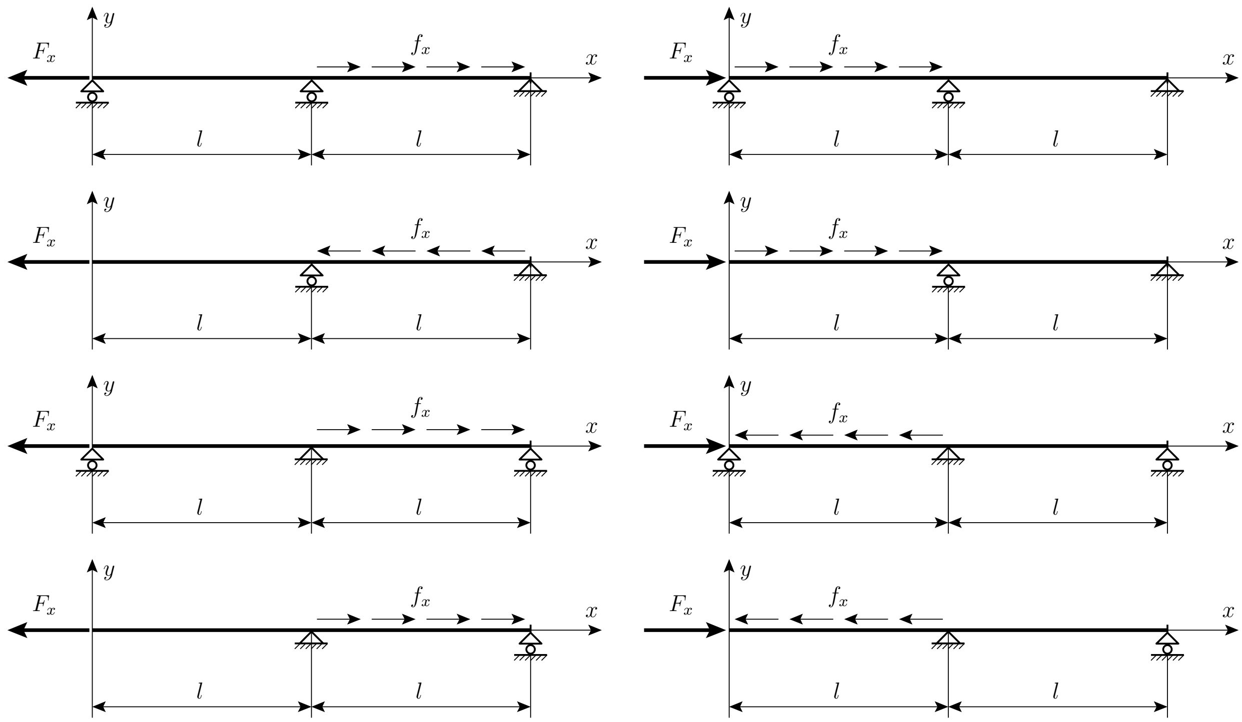
26. Számítsa ki az ábrán látható feladatok Ritz-módszerrel és lineáris approximációval kapott megoldásaihoz tartozó hiba energia normáját. A hiba kiszámításához használja fel a 7. feladat egzakt megoldásait.



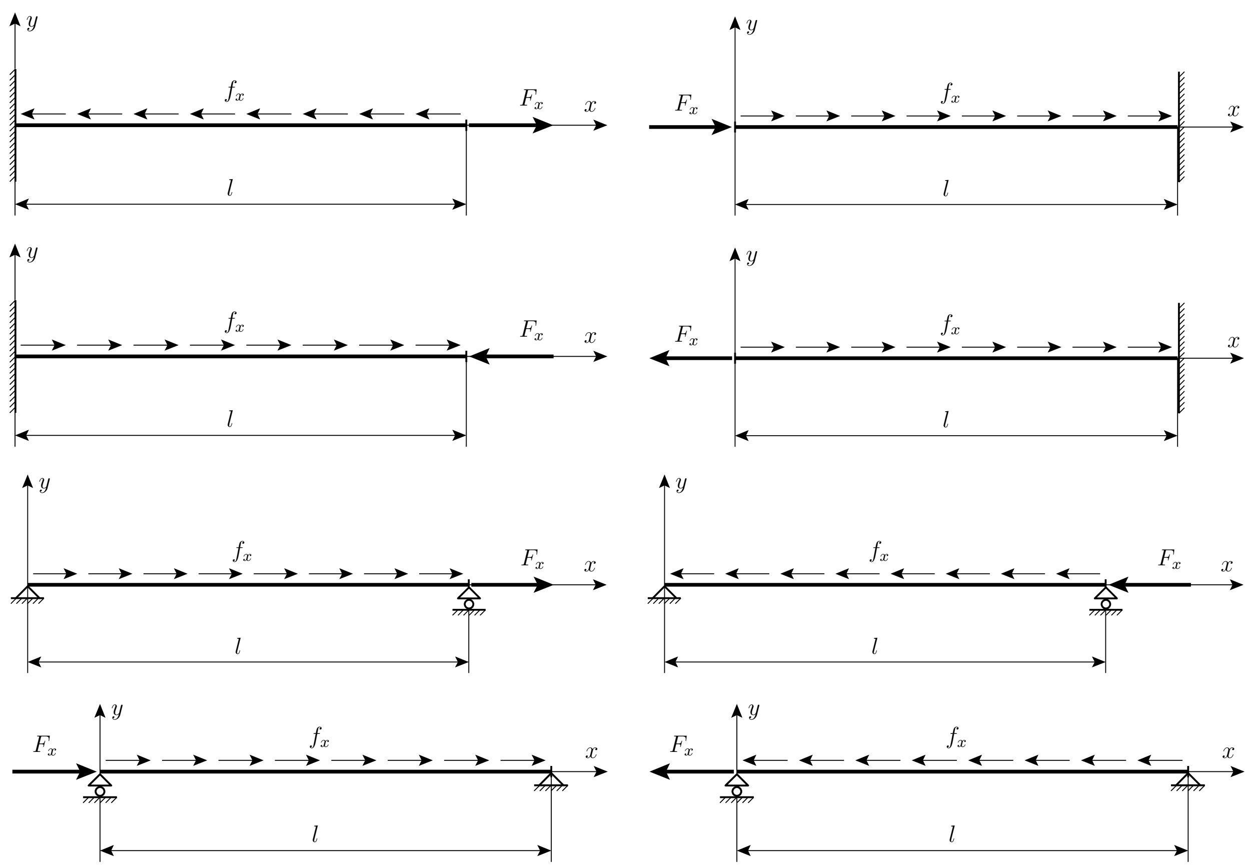


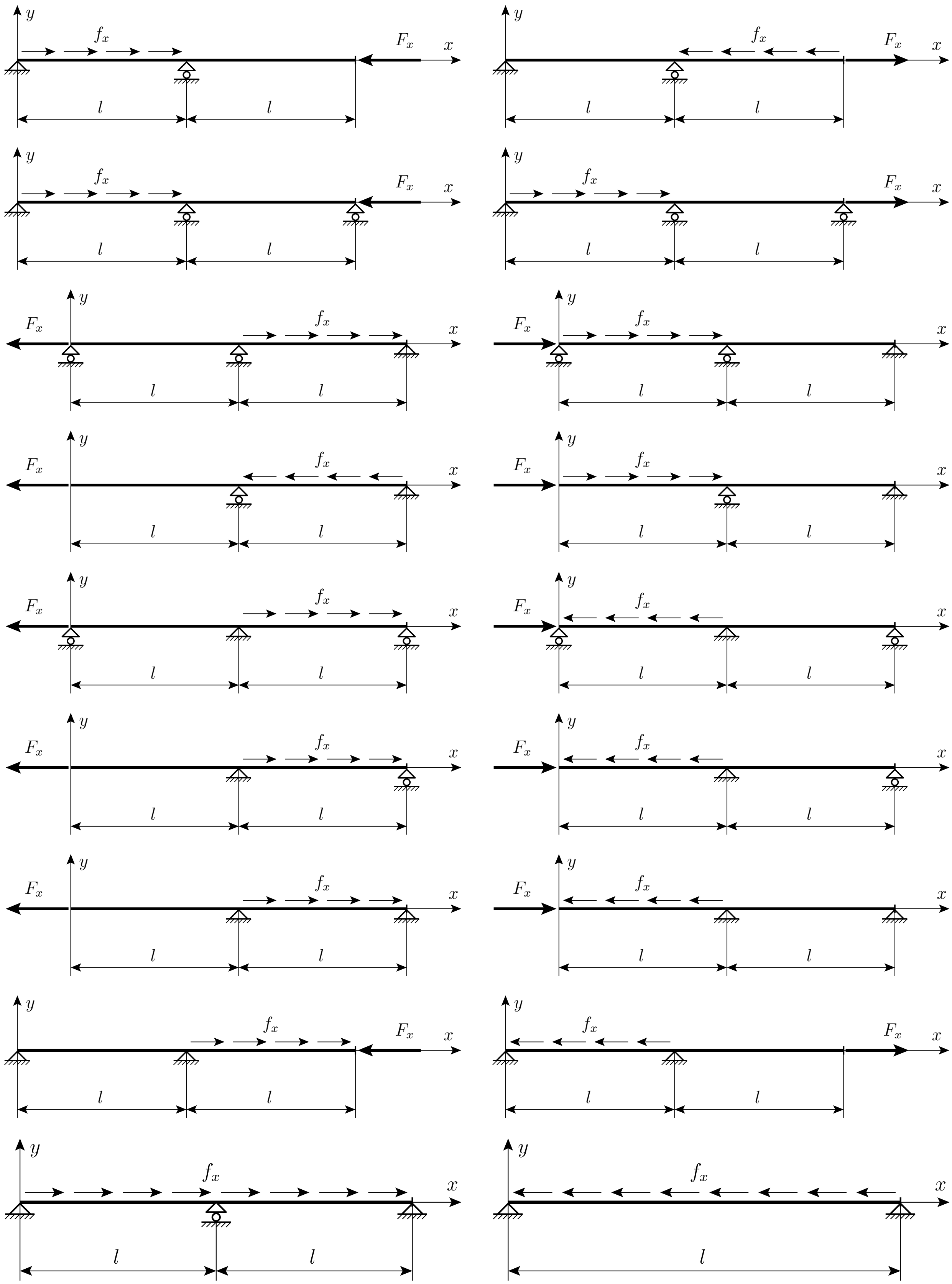
27.* Számítsa ki az ábrán látható feladatok Ritz-módszerrel és lineáris approximációval kapott megoldásaihoz tartozó hiba energia normáját. A hiba kiszámításához állítsa elő az feladatok egzakt megoldásait.



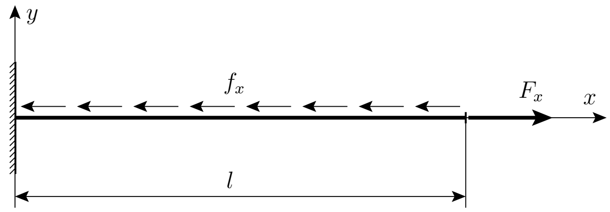


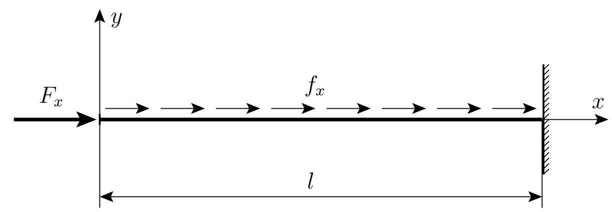
28. Számítsa ki Ritz-módszer és kvadratikus approximáció alkalmazásával az ábrán látható rúdszerkezet $u^*(x)$ közelítő elmozdulásmezejét illetve $N^*(x)$ közelítő rúderejét. A megoldásokat ábrázolja grafikonon az x koordináta függvényében, ha $F_x = 1\text{kN}$, $f_x = 1\frac{\text{kN}}{\text{m}}$, $A = 100\text{mm}^2$, $l = 1\text{m}$, $E = 2 \cdot 10^5\text{MPa}$.

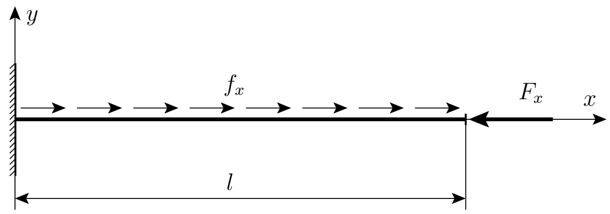


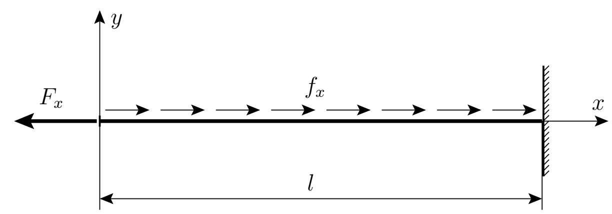


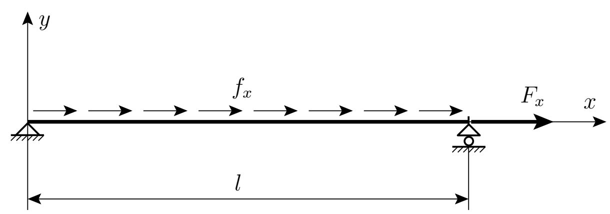
29.* Számítsa ki az ábrán látható feladatok Ritz-módszerrel és kvadratikus approximációval kapott megoldásaihoz tartozó hiba energia normáját. A hiba kiszámításához állítsa elő az feladatok egzakt megoldásait.

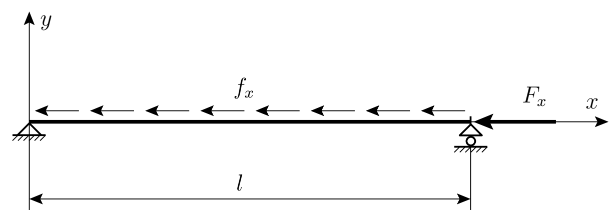

y
f_x
F_x
x
l

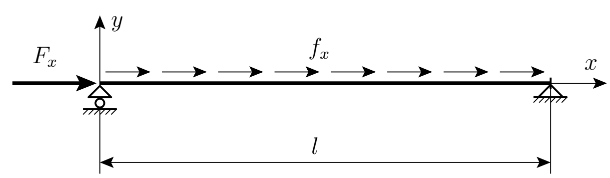

y
F_x
f_x
x
l

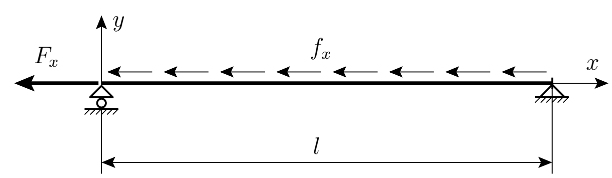

y
f_x
F_x
x
l

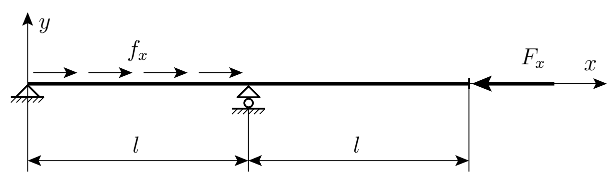

y
F_x
f_x
x
l

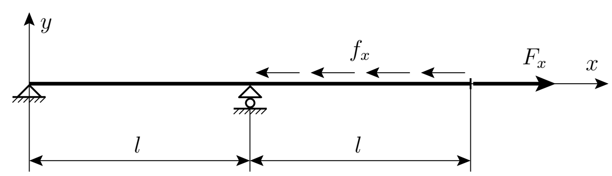

y
f_x
F_x
x
l

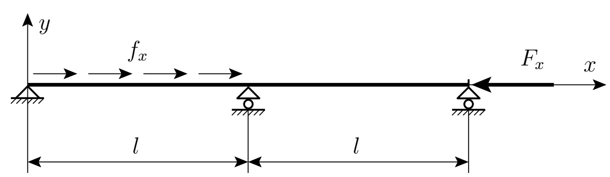

y
f_x
F_x
x
l

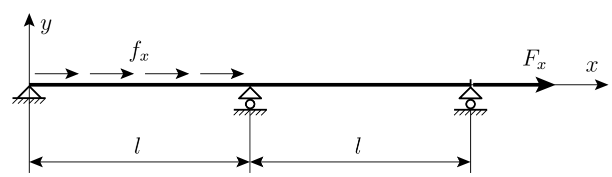

y
F_x
f_x
x
l

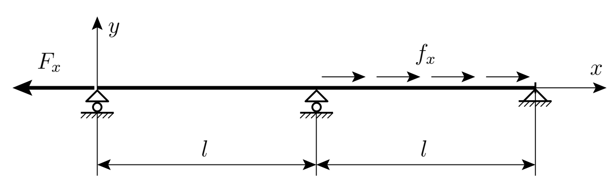

y
F_x
f_x
x
l

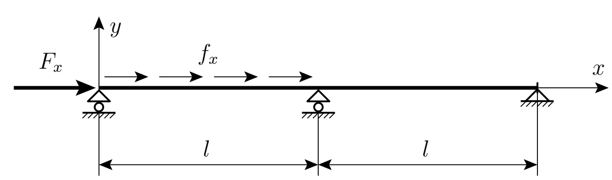

y
f_x
F_x
x
l
l

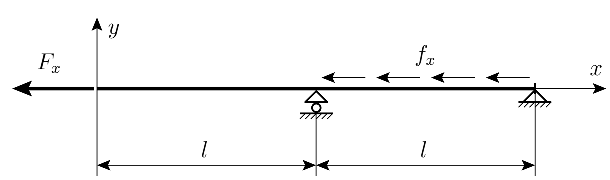

y
f_x
F_x
x
l
l

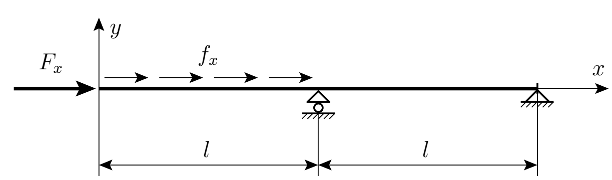

y
f_x
F_x
x
l
l

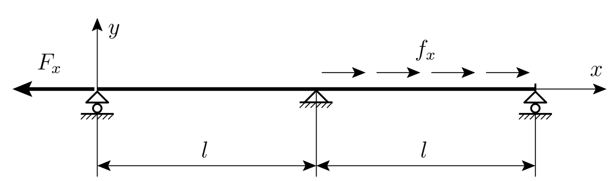

y
f_x
F_x
x
l
l

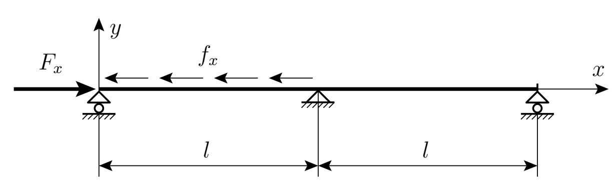

y
F_x
f_x
x
l
l

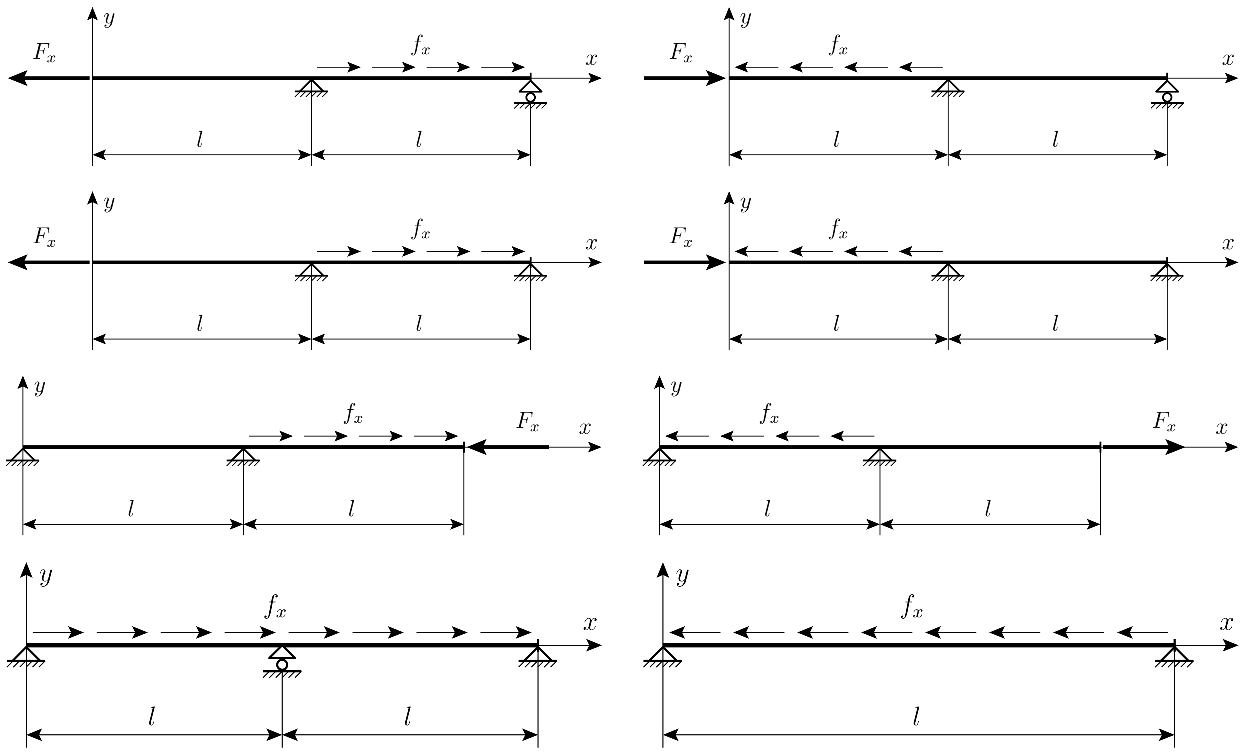

y
F_x
f_x
x
l
l


y
F_x
f_x
x
l
l

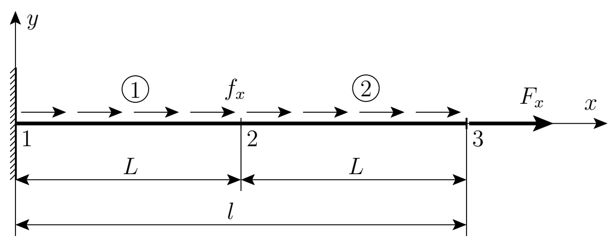

y
F_x
f_x
x
l
l


y
F_x
f_x
x
l
l

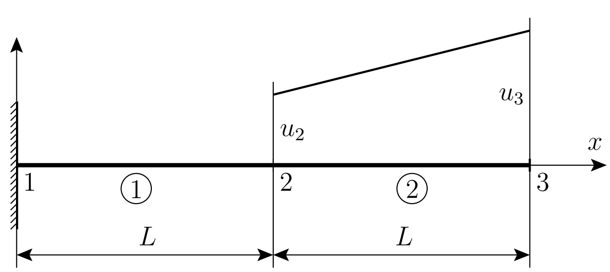

y
F_x
f_x
x
l
l



30. Írja fel az ábrán látható, két végeselemre bontott, húzott-nyomott rúdfeladat közelítő megoldását *csomópontokhoz* rendelt $h_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ alakfüggvények lineáris kombinációjaként. Az egyes csomópontok elmozdulásait jelölje u_1, u_2 és u_3. Hogyan vehető itt figyelembe a kinematikai peremfeltétel? Ábrázolja grafikonokon az egyes alakfüggvényeket szakaszonként lineáris közelítés esetére.



31. Az ábrán egy rúdszerkezet kettes számú végeselemének elmozdulását ábrázoltuk az x koordináta függvényében, lineáris közelítéssel. Írja fel az ábrán látható, 2. csomóponttól a 3. csomópontig terjedő intervallumon ábrázolt elmozdulást az x koordináta függvényeként. A felírt összefüggés segítségével definiáljon egy új ξ lokális koordinátát, amelynek origója a végeselem bal oldali csomópontja. Írja fel a kettes számú végeselemre vonatkozó elmozdulásmezőt a ξ koordináta függvényeként is.



32. Adott egy L hosszúságú, i és j jelű csomópontokkal rendelkező végeselemen az $u(\xi) = \frac{u_j - u_i}{L}\xi + u_i$ elmozdulásmező. Ábrázolja grafikonon az elmozdulásmezőt a ξ koordináta függvényében. Alakítsa át az $u(\xi)$ elmozdulásmező képletét olyan szorzat alakra, ahol az egyik szorzótényező az u_i és u_j csomóponti elmozduláskoordináták oszlopvektora.

33. Írja fel és ábrázolja az L hosszúságú húzott-nyomott végeselem lineáris approximációs függvényeit.

34. Írja fel egy L hosszúságú, két-csomópontú húzott-nyomott végeselem $\varepsilon_x(\xi)$ fajlagos nyúlás képletét olyan szorzat alakban, ahol az egyik szorzótényező az u_i és u_j csomóponti elmozduláskoordináták oszlopvektora.

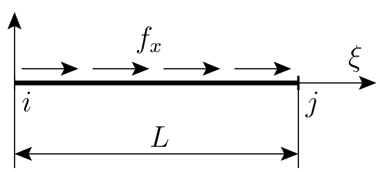
35. Írja fel egy L hosszúságú, A keresztmetszetű, E rugalmassági modulusú, két-csomópontú húzott-nyomott végeselem $N(\xi)$ rúderő függvényének képletét olyan szorzat alakban, ahol az egyik szorzótényező az u_i és u_j csomóponti elmozduláskoordináták oszlopvektora.

36. Helyettesítse be egy két-csomópontú húzott-nyomott rúdelem $\Pi_p[u(x)]$ potenciális energiájába az elmozdulásmező lineárisan közelített

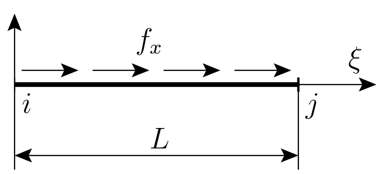
$$u(\xi) = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{\xi}{L}\right) & \frac{\xi}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}$$

alakját. Végezze el a kijelölt integrálásokat. Írja fel a kapott eredményt úgy, hogy az az u_i és u_j csomóponti elmozduláskoordináták oszlopvektorának a függvénye legyen. Nevezze meg a kapott eredményben lévő egyes mátrixokat.

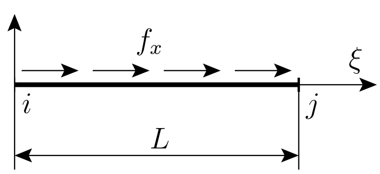
37. Írja fel az ábrán látható két-csomópontú, A keresztmetszetű, E rugalmassági modulusú végeselem csomóponti elmozdulásvektorát.



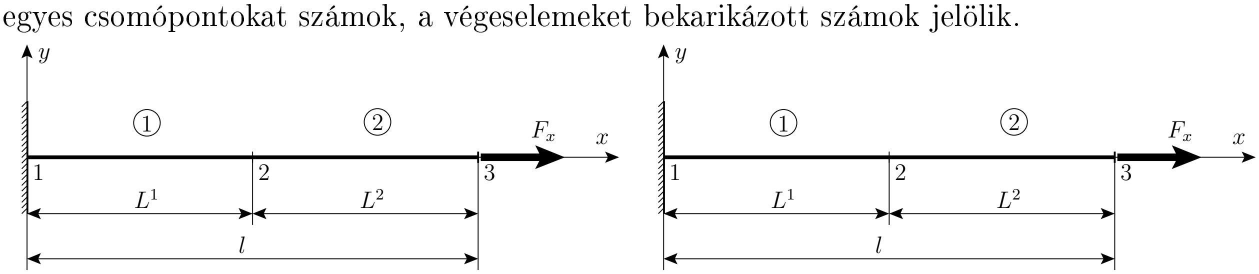
38. Írja fel az ábrán látható két-csomópontú, A keresztmetszetű, E rugalmassági modulusú végeselem merevségi mátrixát.

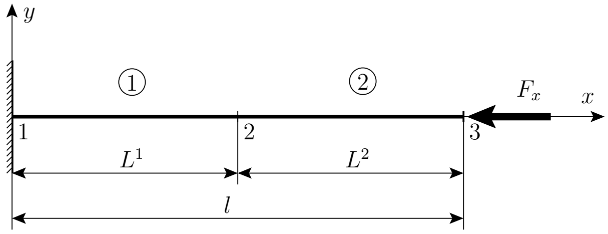


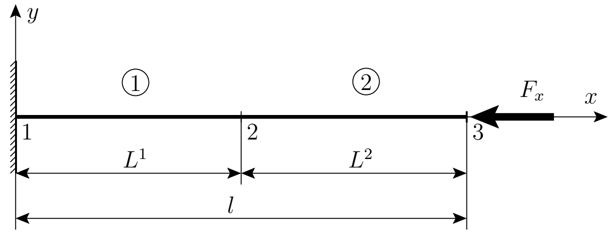
39. Írja fel az ábrán látható két-csomópontú, A keresztmetszetű, E rugalmassági modulusú végeselem tehervektorát.

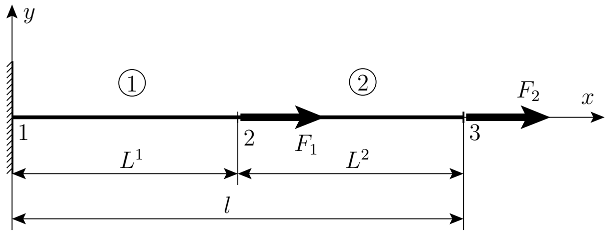


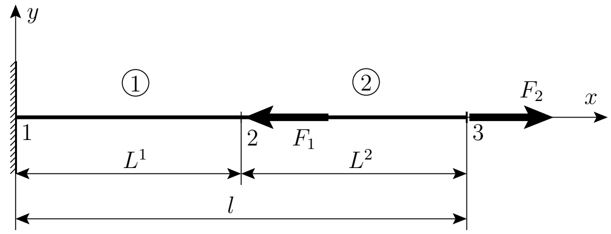
40. Az ábrán látható húzott-nyomott rúdszerkezet anyagának rugalmassági modulusa E, keresztmetszetének területe A. Írja fel a rúdszerkezet Π_p^* *kinematikailag lehetséges* potenciális energiáját úgy, hogy az elmozdulásmező közelítése végeselemenként lineáris függvénnyel történjen. Az ábrán az egyes csomópontokat számok, a végeselemeket bekarikázott számok jelölik.

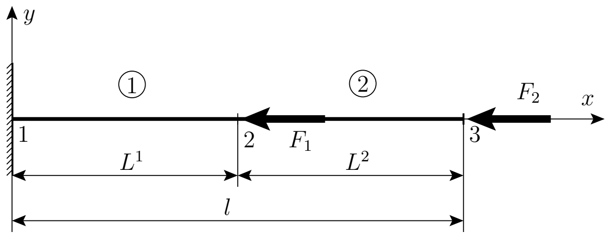


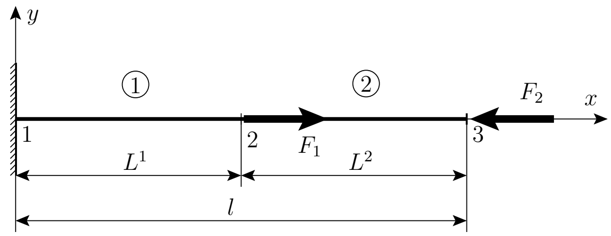

y
①
②
F_x
x
1
2
3
L^1
L^2
l

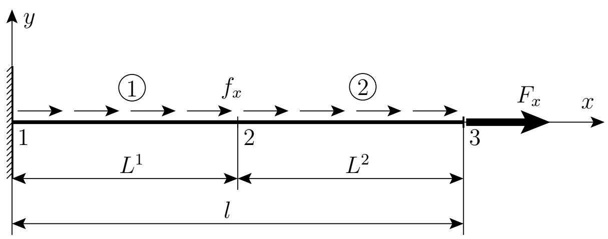

y
①
②
F_x
x
1
2
3
L^1
L^2
l

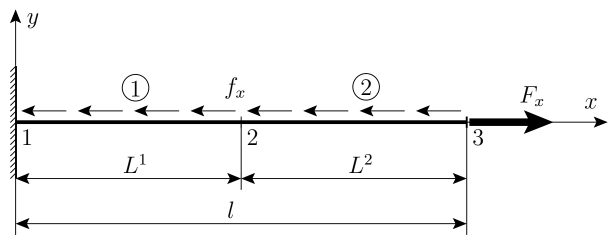

y
①
②
F_2
x
1
2
F_1
3
L^1
L^2
l

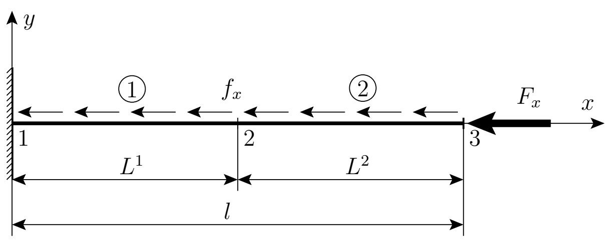

y
①
②
F_2
x
1
2
F_1
3
L^1
L^2
l

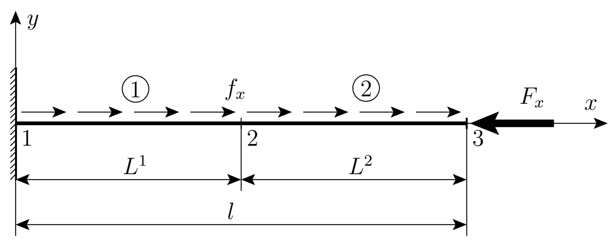

y
①
②
F_2
x
1
2
F_1
3
L^1
L^2
l

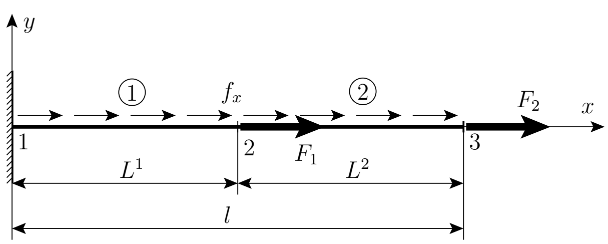

y
①
②
F_2
x
1
2
F_1
3
L^1
L^2
l

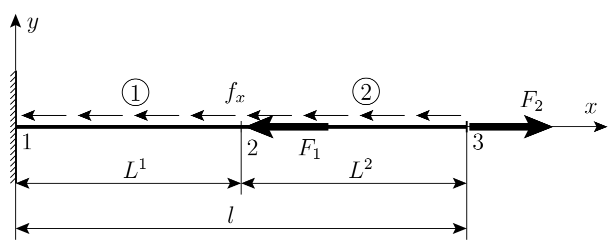

y
①
f_x
②
F_x
x
1
2
3
L^1
L^2
l

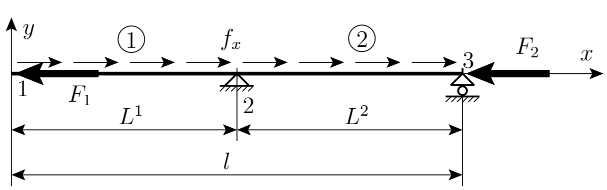

y
①
f_x
②
F_x
x
1
2
3
L^1
L^2
l

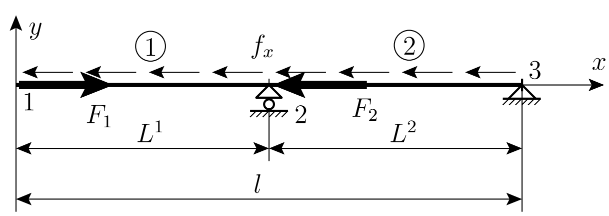

y
①
f_x
②
F_x
x
1
2
3
L^1
L^2
l

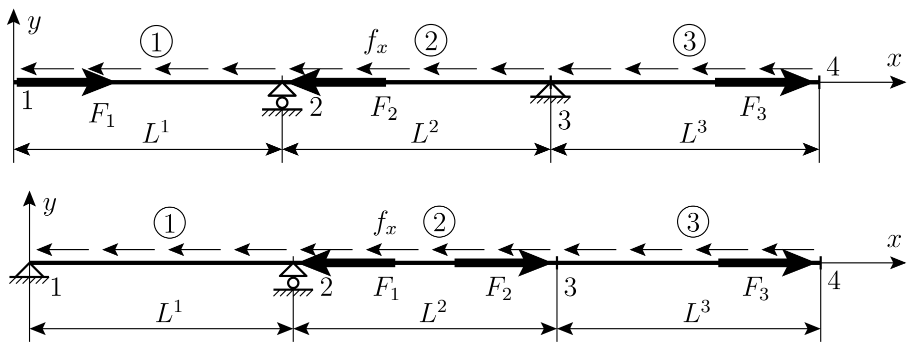

y
①
f_x
②
F_x
x
1
2
3
L^1
L^2
l


y
①
f_x
②
F_2
x
1
2
F_1
3
L^1
L^2
l


y
①
f_x
②
F_2
x
1
2
F_1
3
L^1
L^2
l


y
①
f_x
②
3
F_2
x
1
F_1
2
L^1
L^2
l


y
①
f_x
②
3
x
1
F_1
2
F_2
L^1
L^2
l

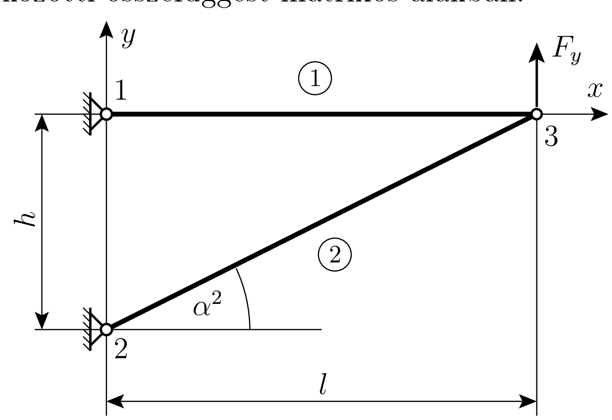


41. Adott a 40. feladat ábráin látható húzott-nyomott rúdszerkezet, amely anyagának rugalmassági modulusa E, keresztmetszetének területe A. Az ábrán az egyes csomópontokat számok, a végeselemeket bekarikázott számok jelölik. Írja fel a rúdszerkezet merevségi mátrixát végeselemenként lineáris közelítést feltételezve az elmozdulásmezőre. A merevségi mátrix felírásánál vegye figyelembe a kinematikai peremfeltételeket is.

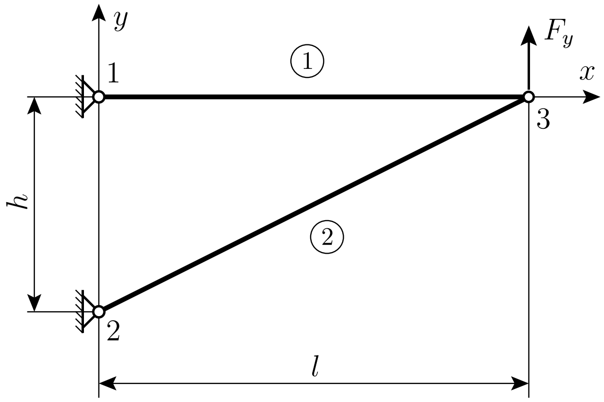
42. Adott a 40. feladat ábráin látható húzott-nyomott rúdszerkezet, amely anyagának rugalmassági modulusa E, keresztmetszetének területe A. Az ábrán az egyes csomópontokat számok, a végeselemeket bekarikázott számok jelölik. Írja fel a rúdszerkezet tehervektorát végeselemenként lineáris közelítést feltételezve az elmozdulásmezőre. A tehervektor felírásánál vegye figyelembe a kinematikai peremfeltételeket is.

43. Adott a 40. feladat ábráin látható húzott-nyomott rúdszerkezet, amely anyagának rugalmassági modulusa E, keresztmetszetének területe A. Az ábrán az egyes csomópontokat számok, a végeselemeket bekarikázott számok jelölik. Végeselemenként lineáris közelítést feltételezve az elmozdulásmezőre számítsa ki az egyes csomópontok elmozdulásainak értékét, és határozza meg az egyes végeselemeken fellépő rúderőt. Ábrázolja kapott elmozdulásmezőt és rúderőt grafikonon az x koordináta függvényében, ha $F_x = 1\mathrm{kN}$, $f_x = 1\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}}$, $A = 100\mathrm{mm}^2$, $l = 1\mathrm{m}$, $E = 2 \cdot 10^5\mathrm{MPa}$.

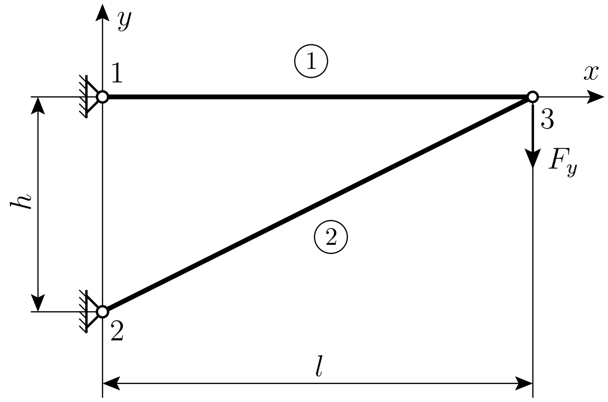
44. Írja fel az ábrán látható rácsos szerkezet 2-es számú (bekarikázott szám) végeseleméhez tartozó 3-as számú csomópontjának a lokális (elemhez kötött) és globális (xy) koordinátarendszerben adott elmozdulása (u_3^2, U_3 és V_3) közötti összefüggést mátrixos alakban.



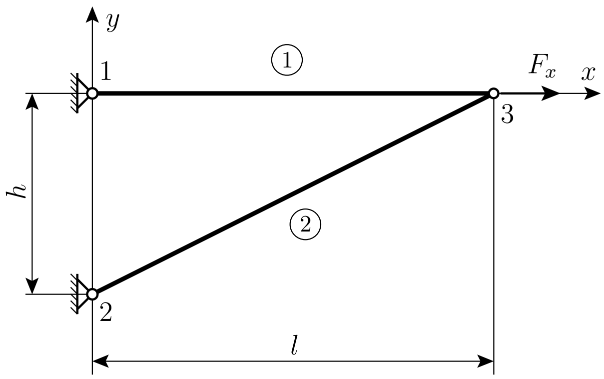
45. Az ábrán látható *rácsos tartót* két végeselemre osztottuk. Az egyes végeselemek hossza L^1 és L^2, a végeselemekhez rendelt keresztmetszet területe A^1 és A^2 (a felső indexek a végeselemek sorszámát jelölik az ábrán látható bekarikázott számoknak megfelelően), a végeselemek rugalmassági modulusa E, valamint $l = 2h$. Írja fel a szerkezetet alkotó végeselemek merevségi mátrixait a végeselemekhez kötött helyi (lokális) és az xy (globális) koordinátarendszerekben. Írja fel a számításhoz használt transzformációs mátrixot is.



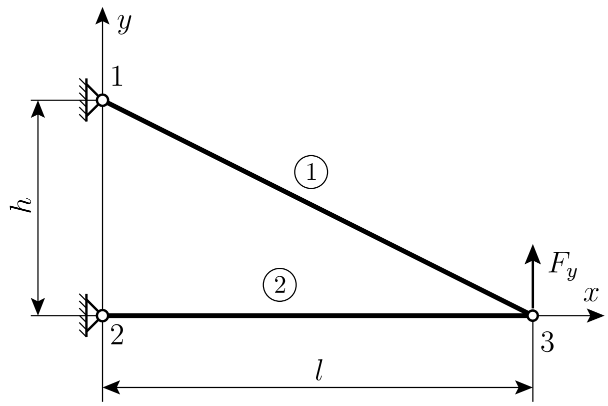
y
x
1
2
3
F_y
h
l



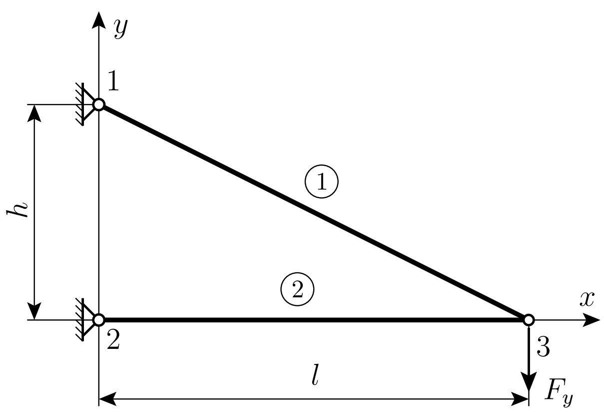
y
x
1
2
3
F_y
h
l



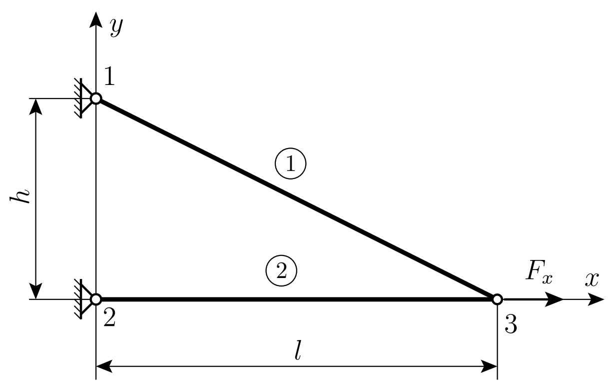
y
x
1
2
3
F_x
h
l



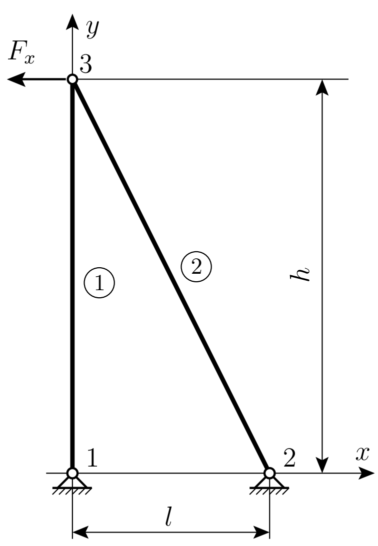
y
x
1
2
3
F_y
h
l



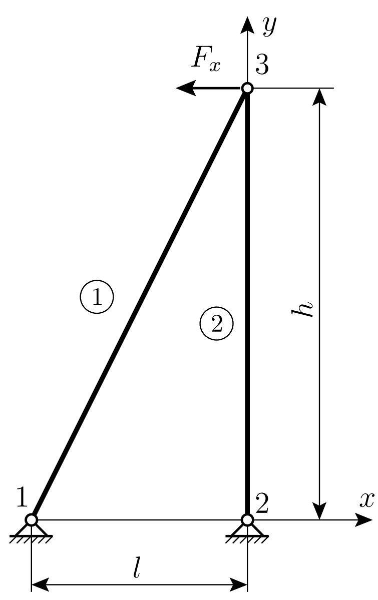
y
x
1
2
3
F_y
h
l



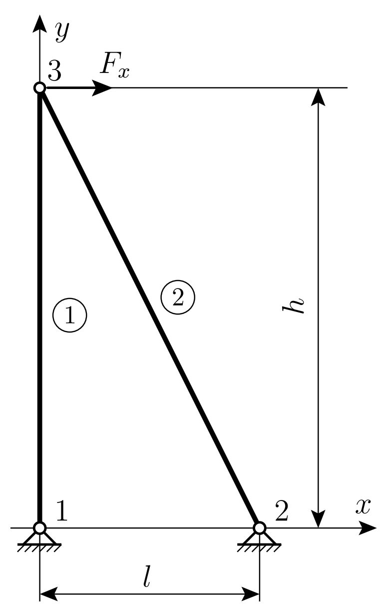
y
x
1
2
3
F_x
h
l



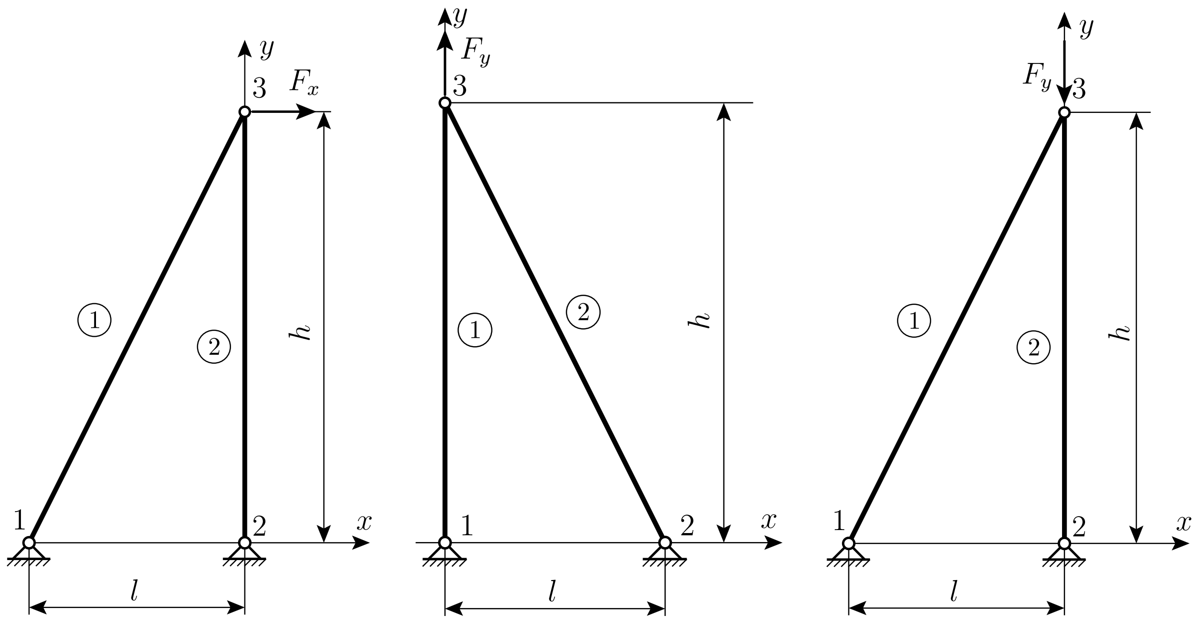
y
x
1
2
3
F_x
h
l



y
x
1
2
3
F_x
h
l



y
x
1
2
3
F_x
h
l



46. Írja fel a 45. feladat ábráin látható rácsos szerkezet teljes potenciális energiáját úgy, hogy az egyes rudak elmozdulásait lineáris függvénnyel közelíti. A teljes potenciális energiát fejezze ki a szerkezet csomóponti elmozdulás-koordinátái segítségével. Az egyes végeselemek hossza L^1 és L^2, a végeselemekhez rendelt keresztmetszet területe A^1 és A^2 (a felső indexek a végeselemek sorszámát jelölik az ábrán látható bekarikázott számoknak megfelelően), a végeselemek rugalmassági modulusa E, valamint $l = 2h$.

47. Írja fel a 45. feladat ábráin látható rácsos szerkezet merevségi mátrixát és tehervektorát a kinematikai peremfeltételek érvényesítése után. Az egyes végeselemek hossza L^1 és L^2, a végeselemekhez rendelt keresztmetszet területe A^1 és A^2 (a felső indexek a végeselemek sorszámát jelölik az ábrán látható bekarikázott számoknak megfelelően), a végeselemek rugalmassági modulusa E, valamint $l = 2h$.

48. Számítsa ki a 45. feladat ábráin látható rácsos tartószerkezet rúderőit, ha a 3-as számú csomópontjának az elmozdulása $U_3 = 2\,\mathrm{mm}$ és $V_3 = -3\,\mathrm{mm}$, valamint $h = 1\mathrm{m}$, $l = 2\mathrm{m}$, $A^1 = 10^{-4}\mathrm{m}^2$, $A^2 = 2 \cdot 10^{-4}\mathrm{m}^2$ és $E = 2 \cdot 10^5\mathrm{MPa}$. (A felső indexek a végeselemek sorszámát jelölik az ábrán látható bekarikázott számoknak megfelelően).

49. Számítsa ki a 45. feladat ábráin látható rácsos tartószerkezet csomópontjainak elmozdulásait (U_1, V_1, U_2, V_2, U_3 és V_3) és rúderőit (N^1 és N^2) végeselem módszerrel, ha $F_x = 5\mathrm{N}$ (vagy $F_y = 5\mathrm{N}$), $h = 1\mathrm{m}$, $l = 2\mathrm{m}$, $A^1 = 10^{-4}\mathrm{m}^2$, $A^2 = 2 \cdot 10^{-4}\mathrm{m}^2$ és $E = 2 \cdot 10^5\mathrm{MPa}$. (A felső indexek a végeselemek sorszámát jelölik az ábrán látható bekarikázott számoknak megfelelően).

---

50. Mikor nevezünk egy végeselemet izoparametrikusnak?

51. Rajzoljon fel kettő illetve három csomópontú 1D-s végeselemeket. Milyen mechanikai modelleknél alkalmazhatók ezek a végeselemek? Sorolja fel, hogy az egyes mechanikai modelleknél kettő illetve három dimenziós feladatok esetén egy csomóponthoz hány paraméter tartozik?

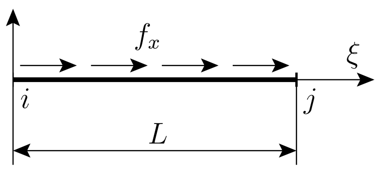
52. Rajzoljon fel három, négy, hat illetve nyolc csomópontú 2D-s végeselemeket. Milyen mechanikai modelleknél alkalmazhatók ezek a végeselemek? Sorolja fel, hogy az egyes mechanikai modelleknél kettő illetve három dimenziós feladatok esetén egy csomóponthoz hány paraméter tartozik?

53. Rajzoljon fel négy, hat, nyolc, tíz, tizenöt illetve húsz csomópontú 3D-s végeselemeket. Milyen mechanikai modellnél alkalmazhatók ezek a végeselemek? Egy csomóponthoz hány paraméter tartozik?

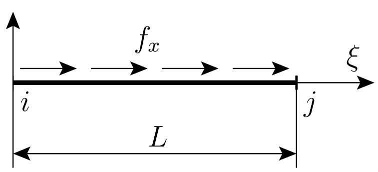
54. Írja fel és ábrázolja az 1D-s húzott-nyomott izoparametrikus végeselem alakfüggvényeit.

55. Adott egy két csomópontú húzott-nyomott izoparametrikus végeselem két csomópontjának u_i és u_j elmozdulása. Írja fel, hogy hogyan közelíthető az elmozdulásmező a végeselem tetszőleges ξ koordinátájú pontjában. Írja fel az összefüggést mátrixos alakban is.

56. Húzott-nyomott, két csomópontú, izoparametrikus végeselem alakfüggvényeit felhasználva *számítsa ki* a végeselem merevségi mátrixát. A végeselem rugalmassági modulusa E, keresztmetszetének területe A.



57. Húzott-nyomott, két csomópontú, izoparametrikus végeselem alakfüggvényeit felhasználva *számítsa ki* a végeselem tehervektorát. A végeselem rugalmassági modulusa E, keresztmetszetének területe A.



58. Sorolja fel a rugalmasságtan 2D-s feladatait.

59. Mit nevezünk síkalakváltozás feladatnak?

60. Mit nevezünk általánosított síkfeszültség feladatnak?

61. Mit nevezünk forgásszimmetrikus feladatnak?

62. Írja fel síkalakváltozás feladat esetén a vizsgált test elmozdulásvektorának, alakváltozási- és feszültségi tenzorának általános alakját.

63. Írja fel általánosított síkfeszültség feladat esetén a vizsgált test elmozdulásvektorának, alakváltozási- és feszültségi tenzorának általános alakját.

64. Írja fel forgásszimmetrikus feladat esetén a vizsgált test elmozdulásvektorának, alakváltozási- és feszültségi tenzorának általános alakját.

65. Írja fel síkalakváltozás feladat esetén az alakváltozási és feszültségi tenzor koordinátáiból képzett $\underline{\underline{\sigma}}$ illetve $\underline{\underline{\varepsilon}}$ oszlopmátrixokat.

66. Írja fel általánosított síkfeszültség feladat esetén az alakváltozási és feszültségi tenzor koordinátáiból képzett $\underline{\underline{\sigma}}$ illetve $\underline{\underline{\varepsilon}}$ oszlopmátrixokat.

67. Írja fel forgásszimmetrikus feladat esetén az alakváltozási és feszültségi tenzor koordinátáiból képzett $\underline{\underline{\sigma}}$ illetve $\underline{\underline{\varepsilon}}$ oszlopmátrixokat.

68. Írja fel részletesen síkalakváltozás feladat esetén az anyagtörvény (Hooke-törvény) $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{D}}}\underline{\underline{\varepsilon}}$ mátrixos alakjából az anyagállandók mátrixát.

69. Írja fel részletesen általánosított síkfeszültség feladat esetén az anyagtörvény (Hooke-törvény) $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{D}}}\underline{\underline{\varepsilon}}$ mátrixos alakjából az anyagállandók mátrixát.

70. Írja fel részletesen forgásszimmetrikus feladat esetén az anyagtörvény (Hooke-törvény) $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{D}}}\underline{\underline{\varepsilon}}$ mátrixos alakjából az anyagállandók mátrixát.

71. Vezesse le a Hooke-törvényből kiindulva síkalakváltozás feladat esetére az anyagtörvény $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{D}}}\underline{\underline{\varepsilon}}$ mátrixos alakját. Bizonyítsa be, hogy a $\underline{\underline{\sigma}}$ oszlopvektorban nem szereplő normálfeszültség nem független a többi feszültségi koordinátától.

72. Vezesse le a Hooke-törvényből kiindulva általánosított síkfeszültség feladat esetére az anyagtörvény $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{D}}}\underline{\underline{\varepsilon}}$ mátrixos alakját. Bizonyítsa be, hogy az $\underline{\underline{\varepsilon}}$ oszlopvektorban nem szereplő fajlagos nyúlás nem független a többi alakváltozási koordinátától.

73. Vezesse le a Hooke-törvényből kiindulva forgásszimmetrikus feladat esetére az anyagtörvény $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{D}}}\underline{\underline{\varepsilon}}$ mátrixos alakját.

74. Írja fel és ábrázolja egy négy csomópontú (lineáris) izoparametrikus végeselem 1. (2., 3. vagy 4.) csomópontjához tartozó alakfüggvényét.

75. Egy négy csomópontú (lineáris) izoparametrikus végeselem csomópontjainak koordinátái és alakfüggvényeinek segítségével írja fel a végeselem egy tetszőleges (ξ, η) koordinátájú pontjának x és y koordinátáit, ahol a ξ és η a végeselemhez kötött (vagy természetes) koordinátarendszerben vett koordinátákat jelölik.

76. Egy négy csomópontú (lineáris) izoparametrikus végeselem csomópontjainak elmozdulásai és alakfüggvényeinek segítségével írja fel a végeselem egy tetszőleges (ξ, η) koordinátájú pontjának u és v elmozdulás koordinátáit, ahol a ξ és η a végeselemhez kötött (vagy természetes) koordinátarendszerben vett koordinátákat jelölik.

77. Sík alakváltozás vagy általánosított síkfeszültség feladat esetén írja fel egy négy csomópontú (lineáris) izoparametrikus végeselem tetszőleges pontjának elmozdulását leíró $\underline{\underline{u}}^e$ oszlopvektort a végeselem csomóponti elmozdulásvektorának és az alakfüggvényeknek (esetleg azok deriváltjainak) a segítségével mátrixos alakban.

78. Sík alakváltozás vagy általánosított síkfeszültség feladat esetén írja fel egy négy csomópontú (lineáris) izoparametrikus végeselem tetszőleges pontjának alakváltozását leíró $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ oszlopvektort a végeselem csomóponti elmozdulásvektorának és az alakfüggvényeknek (esetleg azok deriváltjainak) a segítségével mátrixos alakban.

79. Írja fel egy négy csomópontú (lineáris) izoparametrikus végeselem $h_i(\xi, \eta)$ alakfüggvényének ξ és η illetve x és y koordináták szerinti deriváltjai között érvényes összefüggést. Adja meg az összefüggést mátrixos alakban is.

80. Írja fel egy négy csomópontú (lineáris) izoparametrikus végeselem leképezését leíró $\underline{\underline{J}}^e$ Jacobi-mátrixának kiszámítási módját, ha ismertek a csomópontok x_i és y_i koordinátái, valamint a $h_i(\xi, \eta)$ alakfüggvények.

81. Sík alakváltozás vagy általánosított síkfeszültség feladat esetén írja fel egy négy csomópontú (lineáris) izoparametrikus végeselem tetszőleges pontjának feszültségállapotát leíró $\underline{\underline{\sigma}}^e$ oszlopvektort a végeselem csomóponti elmozdulásvektorának és az anyagállandók $\underline{\underline{D}}^e$ mátrixának segítségével.

82. Írja fel tömören azokat a képleteket, amelyek segítségével a 2D-s feladatokban szereplő $\underline{\underline{u}}^e$, $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ és $\underline{\underline{\sigma}}^e$ oszlopvektorok a $\underline{\underline{q}}^e$ csomóponti elmozdulásvektor felhasználásával kiszámíthatók. Adja meg a képletekben szereplő mennyiségek elnevezését.

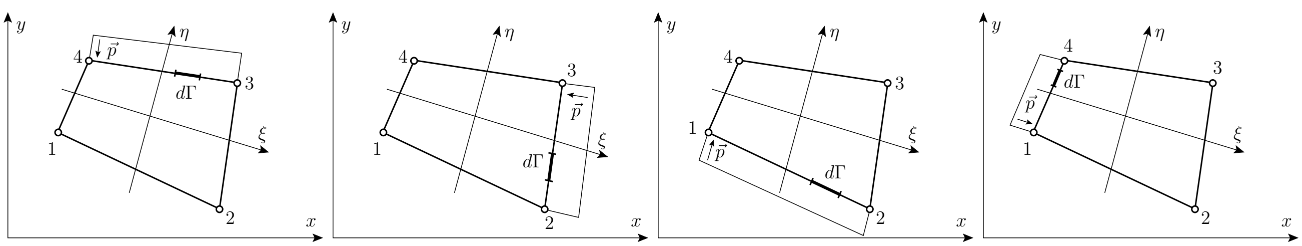
83. Írja fel egy 2D-s végeselem U^e alakváltozási energiáját a mátrixos alakban adott $\underline{\underline{u}}^e$ elmozdulásmező és/vagy $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ alakváltozási mező segítségével. Adja meg a felírt összefüggésben szereplő egyéb mennyiségek elnevezését is.

84. Írja fel egy 2D-s végeselemre ható külső erők W_k^e virtuális munkáját a mátrixos alakban adott $\underline{\underline{u}}^e$ elmozdulásmező és/vagy $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ alakváltozási mező segítségével. Adja meg a felírt összefüggésben szereplő egyéb mennyiségek elnevezését is. Szemléltesse ábrán a felírt összefüggésben szereplő erőket.

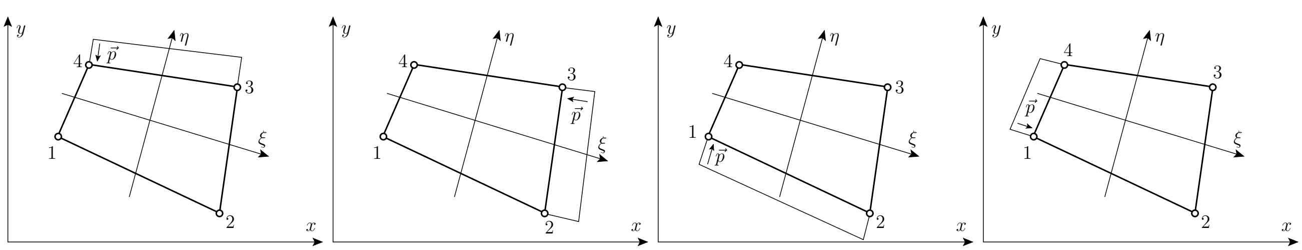
85. Írja fel egy 2D-s végeselem Π_p^e potenciális energiáját a mátrixos alakban adott $\underline{\underline{u}}^e$ elmozdulásmező és/vagy $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ alakváltozási mező segítségével. Adja meg a felírt összefüggésben szereplő egyéb mennyiségek elnevezését is.

86. Írja fel általánosított síkfeszültség feladat esetén egy végeselem U^e alakváltozási energiáját a mátrixos alakban adott $\underline{\underline{u}}^e$ elmozdulásmező és/vagy $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ alakváltozási mező segítségével. A felírás során vegye figyelembe, hogy az egyes mezők a végeselemhez rögzített koordinátarendszer ξ és η koordinátáitól függenek. Adja meg a felírt összefüggésben szereplő egyéb mennyiségek elnevezését is.

87. Az ábrán egy négy csomópontú végeselem látható a globális és a lokális (elemhez kötött) koordinátarendszerben. Tegyük fel, hogy ismerjük az $x = x(\xi, \eta)$ és $y = y(\xi, \eta)$ függvényeket. Hogyan számítható ki a $d\Gamma$ elemi vonalszakasz hossza a lokális koordinátarendszerben lévő ξ és η irányú elemi hosszok segítségével?



88. Írja fel általánosított síkfeszültség feladat esetén egy végeselemre ható külső erők W_k^e virtuális munkáját a mátrixos alakban adott $\underline{\underline{u}}^e$ elmozdulásmező és/vagy $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ alakváltozási mező segítségével (lásd: ábra). A felírás során vegye figyelembe, hogy az egyes mezők a végeselemhez rögzített koordinátarendszer ξ és η koordinátáitól függenek. Adja meg a felírt összefüggésben szereplő egyéb mennyiségek elnevezését is.



89. Írja fel általánosított síkfeszültség feladat esetén egy végeselem Π_p^e potenciális energiáját a mátrixos alakban adott $\underline{\underline{u}}^e$ elmozdulásmező és/vagy $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ alakváltozási mező segítségével (lásd: a 88. feladat

ábráit). A felírás során vegye figyelembe, hogy az egyes mezők a végeselemhez rögzített koordinátarendszer ξ és η koordinátáitól függenek. Adja meg a felírt összefüggésben szereplő egyéb mennyiségek elnevezését is.

90. Hogyan számítható ki az $\int\limits_{-1}^{1} f(\xi)\, d\xi$ integrál a Gauss-kvadratúra segítségével? Nevezze meg a felhasznált mennyiségeket.

91. Hogyan számítható ki az $\int\limits_{-1}^{1} f(\xi, \eta)\, d\xi d\eta$ integrál a Gauss-kvadratúra segítségével? Nevezze meg a felhasznált mennyiségeket.

92. Számítsa ki az $f(x) = \sin(x^2)$ (vagy $f(x) = \cos(x^2)$, $f(x) = e^{-x^2}$, $f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2+1}$) függvény integrálját a $[-1; 1]$ intervallumon Gauss-kvadratúra segítségével. Használjon két (három) pontos integrálást.

n	x_i	W_i
1	0	2,0
2	-0,577350269189626	1,0
	0,577350269189626	1,0
3	-0,774596669241483	0,555555555555555
	0	0,888888888888888
	0,774596669241483	0,555555555555555

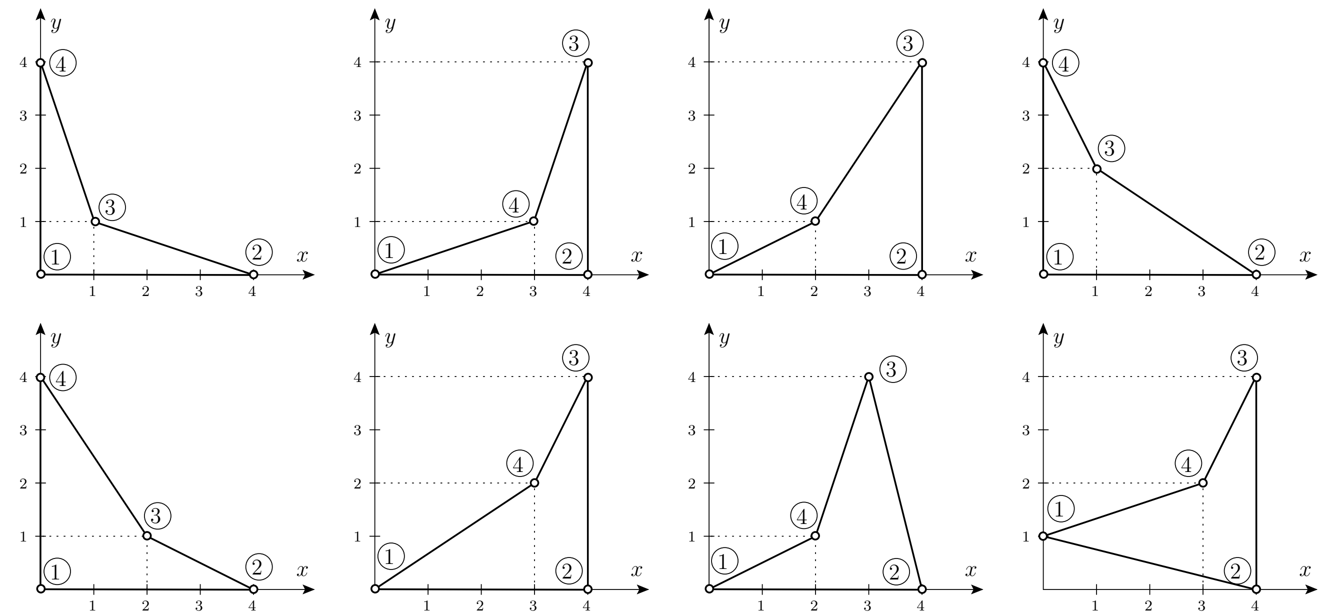
93. Számítsa ki az $f(x,y) = \sin(x^2 + y)$ (vagy $f(x,y) = \cos(x + y^2)$, $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$, $f(x) = \frac{\cos(x)}{y^2+1}$) függvény integrálját a $[-1; 1]$ intervallumon Gauss-kvadratúra segítségével. Használjon két (három) pontos integrálást.

n	x_i	W_i
1	0	2,0
2	-0,577350269189626	1,0
	0,577350269189626	1,0
3	-0,774596669241483	0,555555555555555
	0	0,888888888888888
	0,774596669241483	0,555555555555555

94. Írja fel egy általánosított síkfeszültség feladat megoldásának közelítésénél használt végeselem merevségi mátrixának kiszámítási módját. Tekintse ismertnek az $\underline{\underline{u}}^e$, $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$, $\underline{\underline{q}}^e$, $\underline{\underline{N}}$, $\underline{\underline{B}}^e$, $\underline{\underline{D}}^e$, $\underline{\underline{p}}^e$ és/vagy $\underline{\underline{g}}^e$ mátrixokkal megadott mennyiségeket. Alkalmazza az összefüggésre a Gauss-integrálást.

95. Írja fel egy általánosított síkfeszültség feladat megoldásának közelítésénél használt végeselem tehervektorának kiszámítási módját. Tekintse ismertnek az $\underline{\underline{u}}^e$, $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$, $\underline{\underline{q}}^e$, $\underline{\underline{N}}$, $\underline{\underline{B}}^e$, $\underline{\underline{D}}^e$, $\underline{\underline{p}}^e$ és/vagy $\underline{\underline{g}}^e$ mátrixokkal megadott mennyiségeket. Alkalmazza az összefüggésre a Gauss-integrálást.

96. Adott az ábrán látható elfajuló négy csomópontú végeselem. Számítsa ki a végeselem leképezésének Jacobi-determinánsát. A számítási eredmények segítségével indokolja meg, hogy miért tekintjük a végeselemet elfajulónak?



97. Adott egy végeselem leképezése. Rajzolja meg a végeselemet az xy koordinátarendszerben. Számítsa ki a leképezés Jacobi-determinánsát! Ez a leképezés elfajuló, vagy nem elfajuló? Indokolja a válaszát!

$$x(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(5\xi + 5 - 3\eta - 3\xi\eta) \qquad y(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(5\eta + 5 - 3\xi - 3\xi\eta)$$

vagy

$$x(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(5\xi + 3\eta - 3\xi\eta + 11) \qquad y(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(5\eta + 5 + 3\xi + 3\xi\eta)$$

$$x(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(3\xi + 5 + \eta - \xi\eta) \qquad y(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(5\eta + 5 + 3\xi + 3\xi\eta)$$

$$x(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(5\xi + 5 - 3\eta - 3\xi\eta) \qquad y(\xi,\eta) = \frac{1}{2}(3\eta + 3 - \xi - \xi\eta)$$

$$x(\xi,\eta) = \frac{1}{2}(3\xi + 3 - \eta - \xi\eta) \qquad y(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(5\eta + 5 - 3\xi - 3\xi\eta)$$

$$x(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(5\xi + 11 + 3\eta - 3\xi\eta) \qquad y(\xi,\eta) = \frac{1}{2}(3\eta + 3 + \xi + \xi\eta)$$

$$x(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(5\xi + 9 + \eta - 3\xi\eta) \qquad y(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(5\eta + 5 + 3\xi + 3\xi\eta)$$

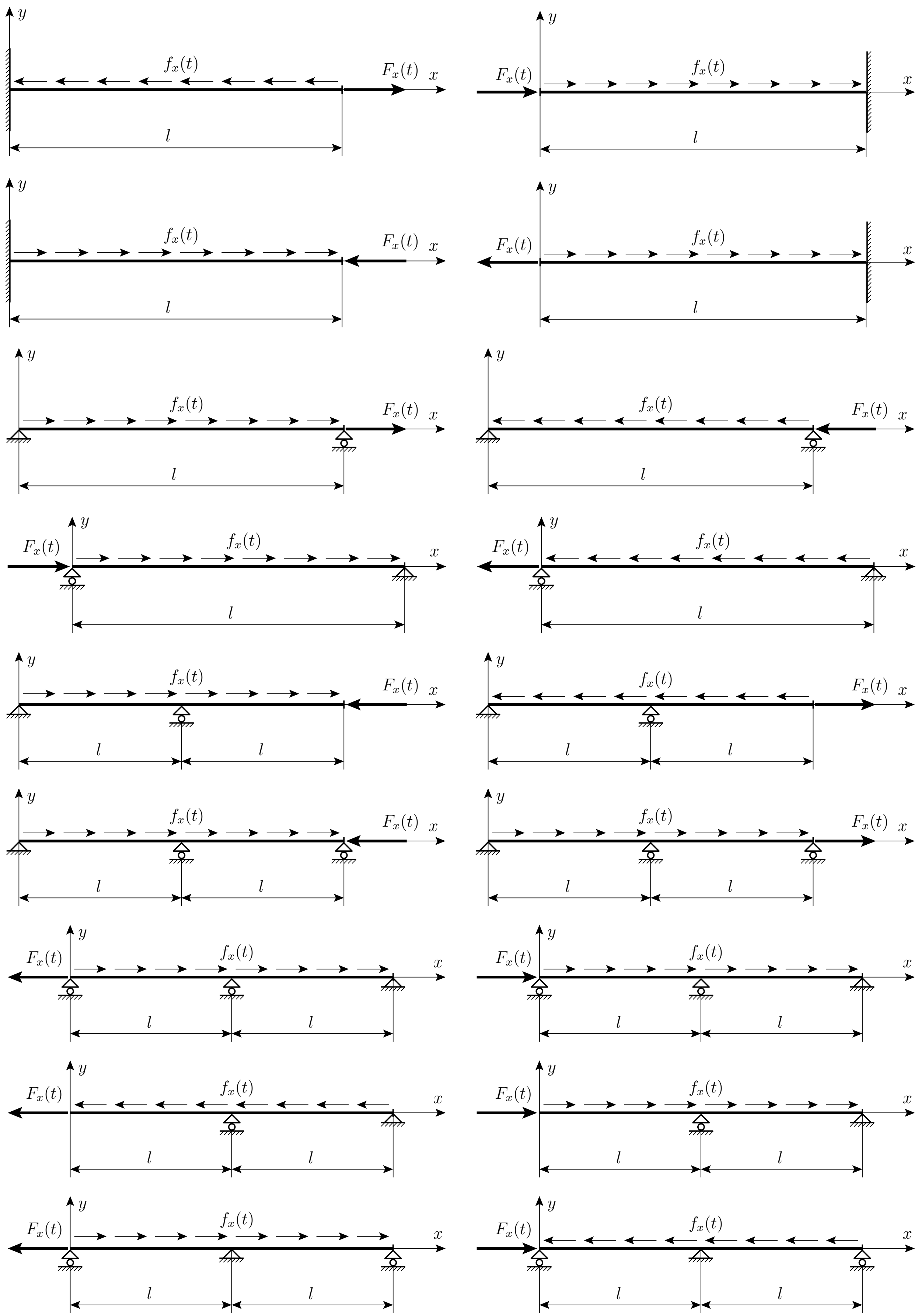
$$x(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(5\xi + 11 + 3\eta - 3\xi\eta) \qquad y(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(5\eta + 7 + \xi + 3\xi\eta)$$

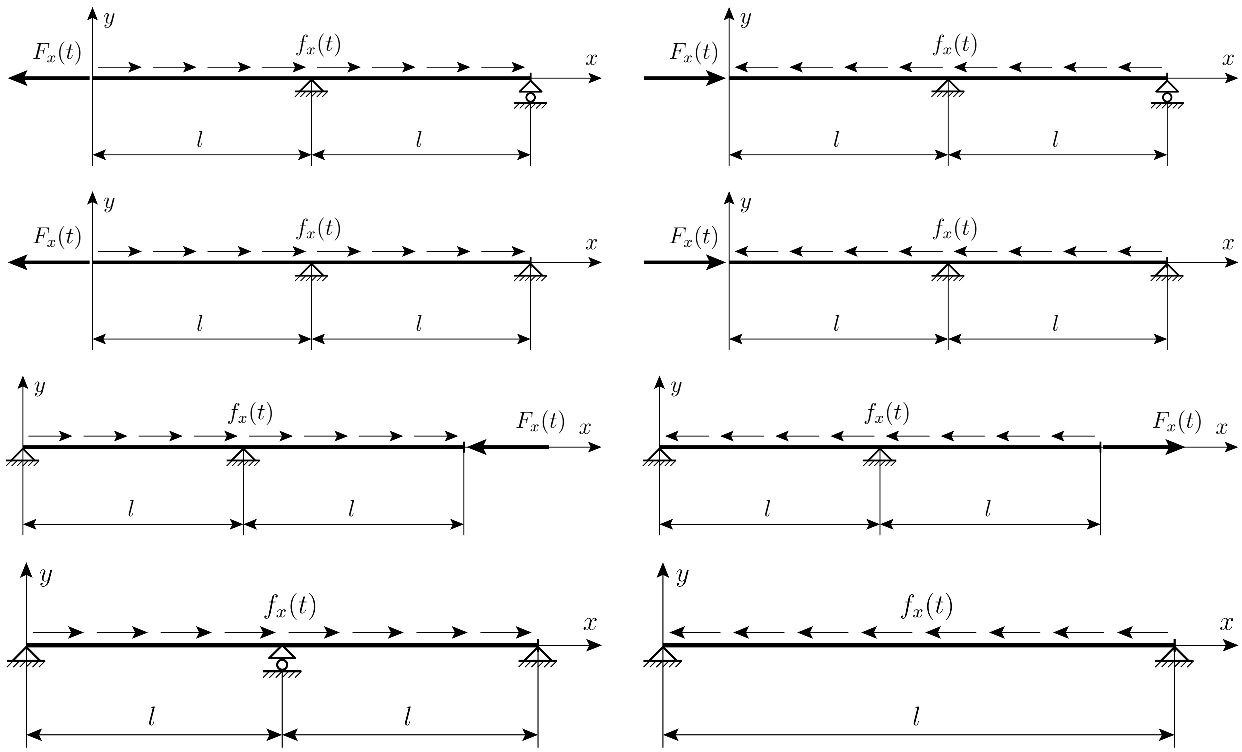
98. Írja fel egy húzott-nyomott rúdszerkezet dinamikai feladatára vonatkozó kinematikai egyenlet differenciális alakját. Jelölje, hogy az egyes mennyiségek milyen változóknak a függvényei.

99. Írja fel egy húzott-nyomott rúdszerkezet dinamikai feladatára vonatkozóan az impulzus tétel differenciális alakját. Jelölje, hogy az egyes mennyiségek milyen változóknak a függvényei.

100. Írja fel egy húzott-nyomott rúdszerkezet dinamikai feladatára vonatkozóan az anyagegyenletet. Jelölje, hogy az egyes mennyiségek milyen változóknak a függvényei.

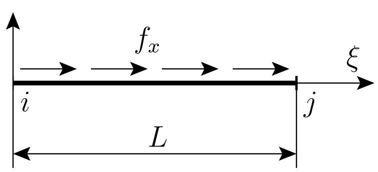
101. Adja meg az ábrán látható rúdszerkezet kezdeti- és peremfeltételeit, ha a rúd a vizsgálat elején nyújtatlan és nyugalomban van.



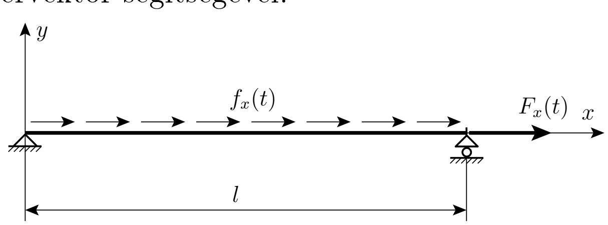


102. Adja meg az ábrán látható (lásd a 101. feladat ábráit) húzott-nyomott rúdszerkezet dinamikai feladatának gyenge alakját.

103. Számítsa ki az ábrán látható két-csomópontú, A keresztmetszetű, E rugalmassági modulusú, ρ sűrűségű végeselem tömegmátrixát.



104. Írja fel az ábrán látható rúdszerkezet mozgásegyenletét a csomóponti elmozdulásvektor, merevségi mátrix, tömegmátrix és tehervektor segítségével.



105. Adott egy húzott-nyomott rúdszerkezet $\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{q}} + \underline{\underline{K}}\,\underline{q} = \underline{0}$ diszkretizált mozgásegyenlete. Mutassa be a mozgásegyenlet megoldásának módszerét szabad rezgések esetére, és írja fel a mozgásegyenlet megoldását. Nevezze meg a képletekben szereplő mennyiségeket.

106. Adott egy húzott-nyomott rúdszerkezet $\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{q}} + \underline{\underline{K}}\,\underline{q} = \underline{f}\,(t)$ diszkretizált mozgásegyenlete, ahol az $\underline{f}\,(t) = \underline{f}_0 \cos(\omega t)$ gerjesztés egy időben harmonikusan változó függvény. Mutassa be a mozgásegyenlet megoldásának módszerét állandósult rezgések esetére, és írja fel a mozgásegyenlet megoldását. Nevezze meg a képletekben szereplő mennyiségeket.