

## Differenciál egyenletek (rövid áttekintés)

**Differenciálegyenlet:** olyan matematikai egyenlet, amely egy vagy több változós ismeretlen függvény és deriváltjai közötti kapcsolatot írja le.

**Fontosabb típusok:** közönséges differenciálegyenletek,  
parciális differenciálegyenletek,  
(sztochasztikus differenciálegyenletek,  
késleltetett differenciálegyenletek)

**Közönséges differenciálegyenlet:** olyan matematikai egyenlet, amely egy független változójú függvény és deriváltjai közötti összefüggést adja meg.

$$\text{Pl. } m \frac{d^2 x}{dt^2} = F, \quad \text{ahol } x = x(t) \quad (\text{Newton II. törvénye})$$

**Parciális differenciálegyenlet:** olyan matematikai egyenlet, amely az ismeretlen többváltozós függvény és a parciális deriváltjai közötti kapcsolatot írja le.

$$\text{Pl. } \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 0; \quad \text{és a megoldás } u(x, y) = f(y).$$

**Speciális eset: Lineáris állandó együtthatós közönséges inhomogén differenciálegyenlet**

$$A_n \frac{d^n y}{dx^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + A_0 y = r(x), \quad \text{ahol } r(x) \text{ a zavaró függvény.}$$

**Megoldás:**  $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ ,

ahol  $y_h(x)$  a  $A_n \frac{d^n y_h}{dx^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} y_h}{dx^{n-1}} + \dots + A_0 y_h = 0$  homogén differenciálegyenlet általános megoldása,

$y_p(x)$  az  $A_n \frac{d^n y_p}{dx^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} y_p}{dx^{n-1}} + \dots + A_0 y_p = r(x)$  inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása.

**A homogén differenciálegyenlet általános megoldása:**

$$A_n \frac{d^n y_h}{dx^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} y_h}{dx^{n-1}} + \dots + A_0 y_h = 0$$

Megoldást  $y_h = e^{\lambda x}$  alakban keressük

$$\underbrace{(A_n \lambda^n + A_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + A_0)}_{=0} e^{\lambda x} = 0$$

**Karakterisztikus egyenlet:**

$$A_n \lambda^n + A_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + A_0 = 0 \quad (n\text{-ed rendű polinom})$$

**Megoldása:**  $n$  számú gyök:  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

A differenciálegyenletnek  $n$  számú alapmegoldása van:  $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ .

Az alapmegoldások lineáris kombinációja is megoldása differenciálegyenletnek:  $y_h(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$

Az ismeretlen  $C_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) konstansok a perem-, illetve kezdeti feltételekből meghatározhatóak.

Az inhomogén differenciálegyenlet egy **partikuláris megoldása**:

$$A_n \frac{d^n y_p}{dx^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} y_p}{dx^{n-1}} + \dots + A_0 y_p = r(x)$$

A megoldást célszerű a zavaró vagy más néven forrás függvény alakjában keresni, mert ez többnyire eredményre vezet:

$$y_p(x) = C r(x) .$$

Behelyettesítés után a  $C$  konstans meghatározható.

Deriváltak jelölése:  $\frac{dy}{dx} = y'$ ,  $\frac{d^2 y}{dx^2} = y''$ , ..., stb. (hely szerinti deriváltak)

$\frac{dy}{dt} = \dot{y}$ ,  $\frac{d^2 y}{dt^2} = \ddot{y}$ , ..., stb. (idő szerinti deriváltak)

### 1. Példa:

Adott egy másodrendű állandó együtthatós közönséges lineáris differenciálegyenlet valamint az  $x=0$  peremen a függvény és deriváltjának értéke:

$$y'' - 4y = 3x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4.$$

Feladat a differenciál egyenlet megoldásának előállítás.

**Megoldás:**  $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

Homogén megoldás:

homogén de.  $y_p'' - 4y_p = 0$ , megoldás keresése  $y_h = e^{\lambda x}$

$$\underbrace{(\lambda^2 - 4)}_{=0} \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} = 0$$

karakterisztikus egyenlet  $\lambda^2 - 4 = 0$ ;  $\lambda^2 = 4$ ;  $\lambda_{1,2} = \pm 2$

homogén ált megoldás:  $y_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$

Az alapmegoldások (bázisok) tetszőleges lineáris kombinációja is megoldás

$$y_h(x) = A_1 \underbrace{\left( \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} \right)}_{ch(2x)} + A_2 \underbrace{\left( \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} \right)}_{sh(2x)}$$

azaz  $y_h(x) = A_1 ch(2x) + A_2 sh(2x)$ .

Partikuláris megoldás:  $y_p(x) = Cx$  (a zavaró függvény alakjában keressük)

$$y_p'' - 4y_p = 3x \text{ behelyettesítés után } -4Cx = 3x \Rightarrow C = -\frac{3}{4}$$

$$y_p(x) = -\frac{3}{4}x$$

Peremfeltételek figyelembevétele:  $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

$$y(0) = 1 \quad y(0) = 1 = A_1 \underbrace{ch(2 \cdot 0)}_1 + A_2 \underbrace{sh(2 \cdot 0)}_0 - \frac{3}{4} \cdot 0$$

$$1 = A_1 \underbrace{ch(2 \cdot 0)}_1 \Rightarrow A_1 = 1$$

$$y'(0) = 4 \quad y'(0) = 4 = A_1 \underbrace{2sh(2 \cdot 0)}_0 + A_2 \underbrace{2ch(2 \cdot 0)}_2 - \frac{3}{4}$$

$$4 = A_2 \underbrace{2ch(2 \cdot 0)}_2 - \frac{3}{4} \Rightarrow A_2 = 2 + \frac{3}{8} = \frac{19}{8}$$

Végül:  $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ch(2x) + \frac{19}{8} sh(2x) - \frac{3}{4}x$ .

## 2. Példa:

Adott egy másodrendű állandó együtthatós közönséges lineáris differenciálegyenlet valamint az  $x=0$  peremen a függvény és deriváltjának értéke:

$$y''+4y=3x, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=4.$$

Feladat a differenciálegyenlet megoldásának előállítása.

**Megoldás:**  $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

Homogén megoldás:

homogén de.

$$y_h'' + 4y_h = 0, \quad \text{megoldás keresése } y_h = e^{\lambda x}$$

$$\underbrace{(\lambda^2 + 4)}_{=0} \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} = 0$$

karakterisztikus egyenlet  $\lambda^2 + 4 = 0; \quad \lambda^2 = -4; \quad \lambda_{1,2} = \pm 2i$

homogén általános megoldás  $y_h(x) = C_1 e^{i2x} + C_2 e^{-i2x},$

ahol  $e^{i2x} = \cos(2x) + i \sin(2x); \quad e^{-i2x} = \cos(2x) - i \sin(2x)$

azaz  $y_h(x) = C_1 (\cos(2x) + i \sin(2x)) + C_2 (\cos(2x) - i \sin(2x))$

Az alapmegoldások (bázisok) tetszőleges lineáris kombináció is megoldás

$$y_h(x) = A_1 \underbrace{\left( \frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2} \right)}_{\cos(2x)} + A_2 \underbrace{\left( \frac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2} \right)}_{\sin(2x)}.$$

Behelyettesítés után:  $y_h(x) = A_1 \cos(2x) + A_2 \sin(2x)$

Partikuláris megoldás:  $y_p'' + 4y_p = 3x; \quad y_p(x) = Cx$  (alakban keressük)

behelyettesítés után  $4Cx = 3x \Rightarrow C = \frac{3}{4}; \quad y_p(x) = \frac{3}{4}x$

Peremfeltételek figyelembevétele:  $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

$$y(0) = 1 \quad y(0) = 1 = A_1 \underbrace{\cos(2 \cdot 0)}_1 + A_2 \underbrace{\sin(2 \cdot 0)}_0 + \frac{3}{4} \cdot 0$$

$$1 = A_1 \underbrace{\cos(2 \cdot 0)}_1 \Rightarrow A_1 = 1$$

$$y'(0) = 4 \quad y'(0) = 4 = -A_1 \underbrace{2 \sin(2 \cdot 0)}_0 + A_2 \underbrace{2 \cos(2 \cdot 0)}_2 + \frac{3}{4}$$

$$4 = A_2 \underbrace{2 \cos(2 \cdot 0)}_2 + \frac{3}{4} \Rightarrow A_2 = 2 + \frac{3}{4} = \frac{13}{8}$$

Végül:  $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \cos(2x) + \frac{13}{8} \sin(2x) + \frac{3}{4}x.$

### 3. Példa:

Adott egy kezdeti érték feladat differenciálegyenlete és a  $t=0$  időpontban a függvényérték és első deriváltja:

$$\ddot{y} + 9y = 3 \cos 2t \quad \text{és} \quad y(0) = -2; \quad \dot{y}(0) = 3.$$

Feladat az adott kezdeti érték feladat megoldásának előállítására.

**Megoldás:**  $y(x) = y_h(t) + y_p(t)$

Homogén megoldás:

homogén de.

$$\ddot{y}_h + 9y_h = 0, \quad \text{megoldás keresése } y_h = e^{\lambda t}$$

$$\underbrace{(\lambda^2 + 9)}_{=0} e^{\lambda t} = 0$$

karakterisztikus egyenlet  $\lambda^2 + 9 = 0; \quad \lambda^2 = -9; \quad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-1}\sqrt{9} = \pm i3$

homogén általános megoldás  $y_h(t) = C_1 e^{i3t} + C_2 e^{-i3t}$ ,

ahol  $e^{i3t} = \cos(3t) + i \sin(3t); \quad e^{-i3t} = \cos(3t) - i \sin(3t)$

azaz  $y_h(x) = C_1 (\cos(3t) + i \sin(3t)) + C_2 (\cos(3t) - i \sin(3t))$

az alapmegoldások (bázisok) tetszőleges lineáris kombináció is megoldás

$$y_h(x) = A_1 \underbrace{\left( \frac{e^{i3t} + e^{-i3t}}{2} \right)}_{\cos(3t)} + A_2 \underbrace{\left( \frac{e^{i3t} - e^{-i3t}}{2} \right)}_{\sin(3t)}$$

behelyettesítés után  $y_h(x) = A_1 \cos(3t) + A_2 \sin(3t)$

Partikuláris megoldás:  $\ddot{y}_p + 4y_p = 3 \cos 2t; \quad y_p(x) = C \cos 2t$  (alakban keressük)

a deriváltak:  $\dot{y}_p(x) = -2C \sin 2t; \quad \ddot{y}_p(x) = -4C \cos 2t$  behelyettesítése után  
 $-4C \cos 2t + 9C \cos 2t = 3 \cos 2t$

$$5C = 3; \quad C = \frac{3}{5}; \quad y_p(x) = \frac{3}{5} \cos 2t$$

Peremfeltételek figyelembevétele:  $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

$$y(0) = -2 \quad y(0) = -2 = A_1 \underbrace{\cos(3 \cdot 0)}_1 + A_2 \underbrace{\sin(3 \cdot 0)}_0 + \frac{3}{5} \underbrace{\cos(2 \cdot 0)}_1$$

$$-2 = A_1 \underbrace{\cos(3 \cdot 0)}_1 + \frac{3}{5} \Rightarrow A_1 = -2 - \frac{3}{5} = -\frac{13}{5}$$

$$y'(0) = 3 \quad \dot{y}(0) = 3 = -A_1 \underbrace{3 \sin(3 \cdot 0)}_0 + A_2 \underbrace{3 \cos(3 \cdot 0)}_2 - 2 \frac{3}{5} \cos(2 \cdot 0)$$

$$3 = A_2 \underbrace{3 \cos(3 \cdot 0)}_3 \Rightarrow A_2 = 1$$

Végül:  $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = -\frac{13}{5} \cos(3t) + \sin(3t) + \frac{3}{5} \cos 2t.$

### Egy rezgés alakítások (addíciós tételek):

**I.**  $y = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \xrightarrow{\text{átalakítás}} y = a \cos(\omega t + \varphi)$

$$y = a \cos(\omega t + \varphi) = \underbrace{a \cos \varphi}_{c_1} \cos \omega t - \underbrace{a \sin \varphi}_{c_2} \sin \omega t$$

$$(c_1)^2 + (c_2)^2 = a^2 (\cos \varphi)^2 + a^2 (\sin \varphi)^2 = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{(c_1)^2 + (c_2)^2}$$

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{-a \sin \varphi}{a \cos \varphi} = -\operatorname{tg} \varphi \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \left( -\frac{c_2}{c_1} \right)$$

**II.**  $y = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \xrightarrow{\text{átalakítás}} y = a \sin(\omega t + \varphi)$

$$y = a \sin(\omega t + \varphi) = \underbrace{a \sin \varphi}_{c_1} \cos \omega t + \underbrace{a \cos \varphi}_{c_2} \sin \omega t$$

$$(c_1)^2 + (c_2)^2 = a^2 (\sin \varphi)^2 + a^2 (\cos \varphi)^2 = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{(c_1)^2 + (c_2)^2}$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{a \sin \varphi}{a \cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \left( \frac{c_1}{c_2} \right)$$