Széchenyi István Egyetem
Műszaki Tudományi Kar

Alkalmazott Mechanika
Tanszék

ALKALMAZOTT MECHANIKA	**Elméleti kérdések és válaszok MSc képzésben résztvevő mérnökhallgatók számára**

(1) Mi a mechanika tárgya?

Anyagi rendszerek (testek) helyzet-változtatással járó mozgásainak és az ezeket létrehozó hatásoknak (erőknek) a vizsgálata.
A helyzet-változást általánosan értelmezzük: magában foglalja testek nyugalmi állapotát és alakváltozását is.

(2) Adja meg általánosan a mechanikai test modell definícióját!

Olyan idealizált test, vagy testekből álló rendszer, amelynek a vizsgálat szempontjából lényeges tulajdonságait megtartjuk, a többi tulajdonságát pedig elhanyagoljuk.

(3) Definiálja a merev test és a szilárd test fogalmát!

Merev test: Olyan test-modell , amelyben bármely két pont távolsága állandó.
A test pontjainak távolsága terhelés hatására sem változik meg.
Szilárd test: Olyan test-modell, amely alakváltozásra képes.
A test pontjainak távolsága terhelés hatására megváltozik.

(4) Definiálja anyagi pont és anyagi pontrendszer fogalmát!

Anyagi pont: 1. def.: Anyagi tulajdonságokkal rendelkező geometriai pont.
2. def.: Olyan test modell (merev test), amelynek helyzete egyetlen pontjának helyzetével egyértelműen megadható.

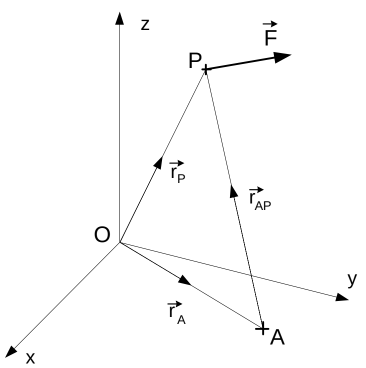
Anyagi pontrendszer: Anyagi pontok halmaza (összessége).

(5) Mi az erő (koncentrált erő) és az erőrendszer?

Az erő egy testnek egy másik testre gyakorolt hatása.
A koncentrált erő testek pontszerű érintkezése esetén jön létre.

Az erőrendszer valamely szempontból kapcsolatban álló – pl. ugyanarra a testre ható – erők halmaza (összessége).

(6) Mi a nyomaték? Definiálja koncentrált erő adott pontra számított nyomatékát!
A definícióhoz készítsen magyarázó ábrát!



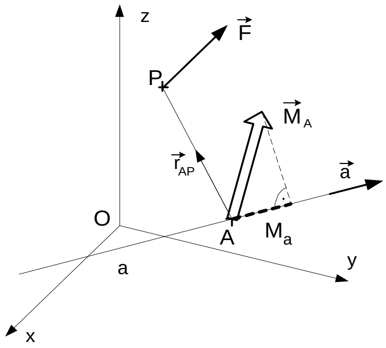
A nyomaték az erő forgató hatása.
A pontra számított nyomaték vektor mennyiség.

Az $\vec{F}$ erő A pontra számított nyomatéka:

$\vec{M}_A = \vec{r}_{AP} \times \vec{F}$, ahol

– $\vec{M}_A$ az $\vec{F}$ erő A pontra számított nyomatéka,
– $\vec{r}_{AP}$ az A pontból a P pontba mutató helyvektor és
– P a koncentrált erő támadáspontja.

(7) Mi a nyomaték? Értelmezze koncentrált erő tengelyre számított nyomatékát! Az értelmezéshez készítsen magyarázó ábrát!



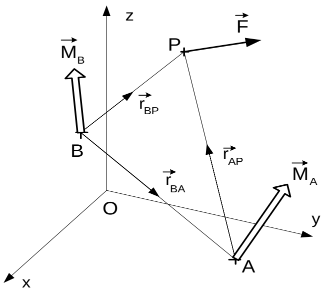
A nyomaték az erő forgató hatása.
A tengelyre számított nyomaték skalár mennyiség.

Az $\vec{F}$ erő a tengelyre számított nyomatéka:

$M_a = \vec{M}_A \cdot \vec{e}_a$, ahol

– M_a az $\vec{F}$ erő a tengelyre számított nyomatéka,
– $\vec{e}_a = \vec{a}/|\vec{a}|$ az a tengely irány egységvektora és
– $\vec{M}_A$ az erőnek az a tengely A pontjára számított nyomatéka: $\vec{M}_A = \vec{r}_{AP} \times \vec{F}$

(8) Adja meg az összefüggést egy erő két pontra számított nyomatéka között! Az értelmezéshez készítsen magyarázó ábrát!



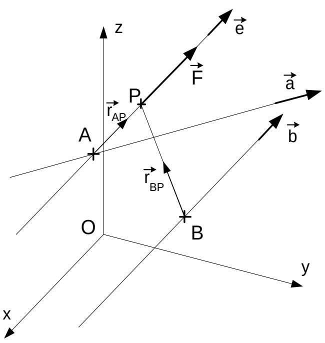
$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{r}_{BA} \times \vec{F},$$

vagy

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{F} \times \vec{r}_{AB},$$

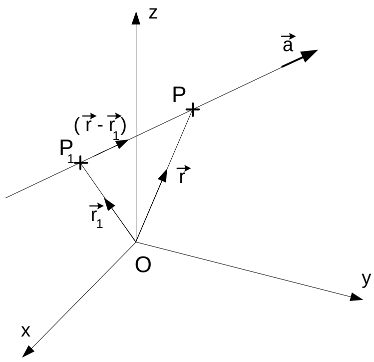
ahol A és B a tér két tetszőleges pontja.

(9) Mely geometriai alakzatokra nem ad az $\vec{F}$ erő nyomatékot? Állításait igazolja! A bizonyításokhoz készítsen magyarázó ábrát!



– Az erő hatásvonalán levő pontokra.
Bizonyítás: $\vec{M}_A = \vec{r}_{AP} \times \vec{F} = \vec{0}$, mert $\vec{r}_{AP} \parallel \vec{F}$.
– Az erő hatásvonalát metsző a tengelyre.
Bizonyítás: $M_a = \vec{M}_A \cdot \vec{e}_a = 0$, mert $\vec{M}_A = \vec{0}$
– Az erő hatásvonalával párhuzamos b tengelyre.
Bizonyítás: $M_b = \vec{M}_B \cdot \vec{e}_b = 0$, mert $\vec{M}_B$ merőleges $\vec{e}_b = \vec{b}/|\vec{b}|$ -vel, a b tengely irány egységvektorával és $\vec{e}_b$ párhuzamos $\vec{e}$ -vel, az $\vec{F}$ erő irány egységvektorával.

(10) Magyarázó ábrával vezesse le a tengely egyenletének Plücker-vektoros alakját! Adja meg az egyenletben szereplő mennyiségek jelentését!



$\vec{a} \parallel (\vec{r} - \vec{r}_1)$, ezért

$\vec{a} \times (\vec{r} - \vec{r}_1) = \vec{0}$,

$\vec{a} \times \vec{r} - \vec{a} \times \vec{r}_1 = \vec{0}$.

Jelölés: $\vec{b} = -\vec{a} \times \vec{r}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{a}$

A tengely egyenlete: $\quad \vec{a} \times \vec{r} + \vec{b} = \vec{0}, \quad$ ahol

– $\vec{a}$ a tengely irányvektora és
– $\vec{b}$ az $\vec{a}$ irányvektor O pontra számított nyomatéka.

(11) Értelmezze általános (szétszórt) erőrendszer redukált (eredő) vektorkettősét!

Eredő erővektor:

$$\vec{F}(A) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

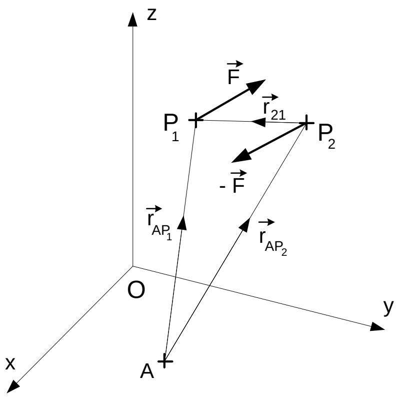
Eredő nyomatékvektor:

$$\vec{M}_A = \sum_{i=1}^{n} (\vec{M}_i + \vec{r}_{AP_i} \times \vec{F}_i)$$

ahol: n – az erőrendszer alkotó koncentrált erők / koncentrált nyomatékok száma,
A – a tér adott pontja,
$\vec{F}_i$ – az erőrendszer i jelű koncentrált erővektora,
$\vec{M}_i$ – az erőrendszer i jelű koncentrált nyomatékvektora,
$\vec{r}_{AP_i}$ – az A pontból az erő támadáspontjába mutató helyvektor.

A redukált vektorkettős nyomatéki tér vonatkozásában egyértelműen jellemzi az erőrendszert.

(12) Adja meg erőpár (koncentrált nyomaték) értelmezését, kiszámítását és legfontosabb tulajdonságát! Készítsen magyarázó ábrát!



Értelmezés: Olyan speciális erőrendszer, amely két, azonos nagyságú, ellentétes irányú és párhuzamos hatásvonalú erőből áll.

Kiszámítás:

$\vec{M}_A = \vec{r}_{AP_1} \times \vec{F} - \vec{r}_{AP_2} \times \vec{F} = (\vec{r}_{AP_1} - \vec{r}_{AP_2}) \times \vec{F}$

$\vec{M}_A = \vec{r}_{21} \times \vec{F} = \vec{M}_B$

Tulajdonság: Erőpár nyomatéka a tér bármely pontjára ugyananny.
Erőpár homogén nyomatéki vektorteret hoz létre.

(13) Értelmezze két erőrendszer egyenértékűségét!

Két erőrendszer egymással egyenértékű, ha azonos nyomatéki vektorteret hoznak létre.

Jelölés: $(E') \overset{M}{=} (E'')$

Az $\overset{M}{=}$ jel arra utal, hogy az egyenlőség a nyomatéki tér vonatkozásában áll fenn.

(14) Adja meg két erőrendszer egyenértékűségének kritériumait!

1. kritérium:	2. kritérium:	3. kritérium:
$\vec{F}' = \vec{F}''$, $\vec{M}'_A = \vec{M}''_A$,	$\vec{M}'_A = \vec{M}''_A$, $\vec{M}'_B = \vec{M}''_B$, $\vec{M}'_C = \vec{M}''_C$,	$M'_i = M''_i$,
ahol A a tér tetszőleges, rögzített pontja.	ahol A, B, C három, nem egy egyenesre eső pont.	ahol $(i = 1, 2, ..., 6)$ egymástól lineárisan független tengely.

(15) Adja meg az egyensúlyi erőrendszer értelmezését!

Egy erőrendszer akkor egyensúlyi, ha zérus nyomatéki vektorteret hoz létre.

Jelölés: $(E) \stackrel{M}{=} (0)$

Az $\stackrel{M}{=}$ jel arra utal, hogy az egyenlőség a nyomatéki tér vonatkozásában áll fenn.

(16) Adja meg egy erőrendszer egyensúlyának kritériumait!

1. kritérium:	2. kritérium:	3. kritérium:
$\vec{F} = \vec{0}$, $\vec{M}_A = \vec{0}$,	$\vec{M}_A = \vec{0}$, $\vec{M}_B = \vec{0}$, $\vec{M}_C = \vec{0}$,	$M_i = 0$,
ahol A a tér tetszőleges, rögzített pontja.	ahol A, B, C három, nem egy egyenesre eső pont.	ahol $i = 1, 2, \dots, 6$ egymástól lineárisan független tengely.

(17) Adja meg tengelyek lineáris függetlenségének feltételét!

Az $\vec{a}_i \times \vec{r} + \vec{b}_i = \vec{0}, \quad i = 1, 2, ..., 6$ tengelyek lineárisan függetlenek, ha az $\vec{a}_i$ és $\vec{b}_i$ Plücker vektoraik koordinátáiból felírt determináns nem nulla:

$$\begin{vmatrix} a_{1x} & a_{2x} & a_{3x} & a_{4x} & a_{5x} & a_{6x} \\ a_{1y} & a_{2y} & a_{3y} & a_{4y} & a_{5y} & a_{6y} \\ a_{1z} & a_{2z} & a_{3z} & a_{4z} & a_{5z} & a_{6z} \\ b_{1x} & b_{2x} & b_{3x} & b_{4x} & b_{5x} & b_{6x} \\ b_{1y} & b_{2y} & b_{3y} & b_{4y} & b_{5y} & b_{6y} \\ b_{1z} & b_{2z} & b_{3z} & b_{4z} & b_{5z} & b_{6z} \end{vmatrix} \neq 0 \,.$$

(18) Ismertesse a statika főtételét (merev testekből álló rendszer tartós nyugalomban maradásának szükséges feltételét)!

Egy merev testekből álló rendszer csak akkor lehet tartós nyugalomban, ha a rá ható külső erőrendszer egyensúlyi.

(19) Ismertesse a merev testekből álló rendszer tartós nyugalomban maradásának elégséges feltételét!

Egy merev testekből álló rendszer tartós nyugalomban maradásának az az elégséges feltétele, hogy a rendszer megtámasztása ne tegy lehetővé a rendszer merevtestszerű mozgását.

(20) Mi a statika feladata?

A statika feladata merev testekből álló rendszerek esetén a támasztóerők és a belső erők meghatározása statikai egyensúlyi egyenletek felhasználásával.

(21) A mechanikában milyen testeket tekintünk rúdnak? Mi a rúd mechanikai modellje?

A mechanikában rúdnak olyan testet tekintünk, amelynek egyik mérete lényegesen nagyobb, mint a másik kettő.
A rúd mechanikai modellje a rúd középvonala (súlyponti szála).

(22) Adja meg a rúd keresztmetszetének és középvonalának definícióját! Milyen feltételek teljesülése esetén beszélünk prizmatikus rúdról?

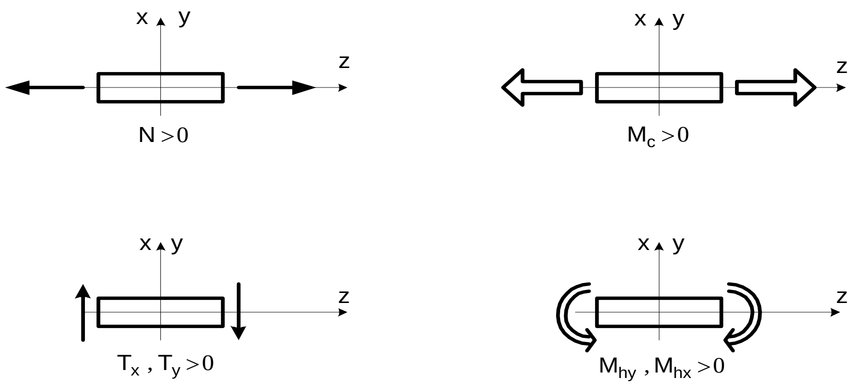
A keresztmetszet a rúd legnagyobb méretére merőleges metszet. A rúd középvonala a keresztmetszetek súlypontjai által meghatározott vonal. Egy rúd akkor prizmatikus, ha keresztmetszetei azonos alakúak és térbeli elhelyezkedésűek.

(23) Értelmezze rúd igénybevételét! Adja meg a rúd +z normálisú keresztmetszetében az $\vec{F}_S$ és $\vec{M}_S$ eredő vektorkettőst!

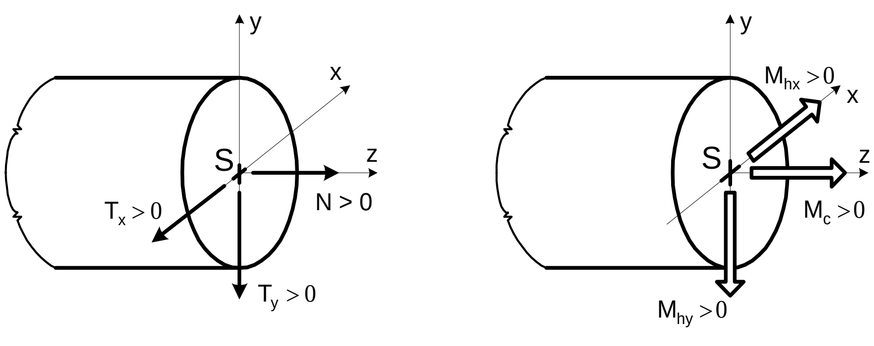
Az igénybevételek a rúd keresztmetszetén megoszló belső erőrendszer súlypontba redukált eredő vektorkettősének skaláris koordinátái.

$$\vec{F}_s = -T_x\vec{e}_x - T_y\vec{e}_y + N\vec{e}_z$$
$$\vec{M}_s = M_{hx}\vec{e}_x - M_{hy}\vec{e}_y + M_c\vec{e}_z$$

(24) Szemléltesse síkbeli ábrákon az igénybevételek előjelének értelmezését!



(25) Szemléltesse térbeli ábrákon az igénybevételek előjelének értelmezését!



(26) Írja fel az yz síkban terhelt egyenes rúd egyensúlyi egyenleteit differenciális alakban!

$$\frac{\mathrm{d}T_y}{\mathrm{d}z} = f_y(z)\,, \qquad \frac{\mathrm{d}M_{hx}}{\mathrm{d}z} = -T_y(z)\,,$$

ahol $f_y(z)$ a megoszló terhelés sűrűsége,
$T_y(z)$ a nyíróerő és
$M_{hx}(z)$ a hajlítónyomaték.

(27) Írja fel az yz síkban terhelt egyenes rúd egyensúlyi egyenleteit integrál alakban!

$$T_y(z) - T_{y0} = \int_{z_0}^{z} f_y(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\,, \qquad M_{hx}(z) - M_{hx0} = -\int_{z_0}^{z} T_y(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\,,$$

ahol $f_y(z)$ a megoszló terhelés sűrűsége,
$T_y(z)$ és T_{y0} a nyíróerő a z, illetve a z_0 pontban,
$M_{hx}(z)$ és M_{hx0} a hajlítónyomaték a z, illetve a z_0 pontban.

(28) Adja meg a tenzor értelmezését és tulajdonságait!

Értelmezés: A tenzor homogén, lineáris, vektor-vektor függvény által megvalósított leképezés (hozzárendelés): $\vec{w} = f(\vec{v}) = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{v}$

Tulajdonságok: a) Homogén: ha $\vec{v} = \vec{0}$, akkor $\vec{w} = \vec{0}$.
b) Lineáris:
A $\vec{w}_1 = f(\vec{v}_1)$ és $\vec{w}_2 = f(\vec{v}_2)$ jelölést bevezetve,
fennáll az alábbi összefüggés:
$\vec{w} = f(\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2) = \lambda_1 f(\vec{v}_1) + \lambda_2 f(\vec{v}_2) = \lambda_1\vec{w}_1 + \lambda_2\vec{w}_2.$

(29) Adja meg a $\underline{\underline{T}}$ tenzor és a $\underline{\underline{T}}^T$ transzponált tenzor diadikus értelmezését derékszögű descartesi koordináta-rendszerben!

Tenzor: $\underline{\underline{T}} = (\vec{a} \circ \vec{e}_x + \vec{b} \circ \vec{e}_y + \vec{c} \circ \vec{e}_z)$,

Transzponált tenzor: $\underline{\underline{T}}^T = (\vec{e}_x \circ \vec{a} + \vec{e}_y \circ \vec{b} + \vec{e}_z \circ \vec{c})$,

ahol $\vec{a}$ az $\vec{e}_x$, $\vec{b}$ az $\vec{e}_y$, és $\vec{c}$ az $\vec{e}_z$ vektorok kép vektorai.

(30) Adja meg a szimmetrikus és a ferdeszimmetrikus tenzor értelmezését!

Szimmetrikus a tenzor, ha egyenlő a transzponáltjával: $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^T$.

Ferdeszimmetrikus a tenzor, ha egyenlő a transzponáltja mínusz egyszeresével
$\underline{\underline{T}} = -\underline{\underline{T}}^T$.

(31) Ismertesse a tenzorok felbontásának tételét!

Minden tenzor felbontható egy szimmetrikus és egy ferdeszimmetrikus rész összegére:

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}_{sz} + \underline{\underline{T}}_{fsz} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}}^T) + \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} - \underline{\underline{T}}^T).$$

(32) Adja meg a mechanikai test modell értelmezését!

Olyan, idealizált tulajdonságokkal rendelkező test, amely a valóságos testnek a vizsgálat szempontjából leglényegesebb tulajdonságait tükrözi.

A test lényegesnek tartott tulajdonságait megtartjuk, a lényegtelennek ítélt tulajdonságokat pedig elhanyagoljuk.

(33) Mi a szilárdságtan?

A terhelés előtt és terhelés után is tartós nyugalomban levő, alakváltozásra képes testek kinematikája, dinamikája és anyagszerkezeti viselkedése.

(34) Definiálja az alakváltozás fogalmát!

Alakváltozásról beszélünk, ha terhelés hatására a test pontjai egymáshoz képest elmozdulnak és anyagi geometriai alakzatai (pl. hossz, szög, felület, térfogat) megváltoznak.

(35) Milyen esetben beszélünk rugalmas, illetve képlékeny alakváltozásról?

Rugalmas az alakváltozás, ha a terhelés hatására alakváltozott test a terhelés megszüntetése (a tehermentesítés) után visszanyeri eredeti alakját.

Képlékeny az alakváltozás, ha a terhelés hatására alakváltozott test a tehermentesítés után nem nyeri vissza eredeti alakját.

(36) Adja meg a kis elmozdulások és a kis alakváltozások értelmezését!

Kis elmozdulás esetén a test pontjainak elmozdulása nagyságrendekkel kisebb a test jellemző geometriai méreteinél.

Kis alakváltozások esetén a test alakváltozását jellemző mennyiségek lényegesen kisebbek, mint egy: $\varepsilon \ll 1$, $\gamma \ll 1$.

(37) Adja meg az alakváltozási jellemzők értelmezését!

a) ε_x, ε_y, ε_z - fajlagos nyúlások.
Pl. az ε_x az egységnyi, x irányú hossznak a terhelés hatására bekövetkező megváltozása.
Az ε_x akkor pozitív, ha az egységnyi hossz a terhelés hatására megnövekszik.

b) $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$, $\gamma_{zx} = \gamma_{zx}$ - fajlagos szögtorzulások.
Pl. az γ_{xy} az egymással 90^o-os szöget bezáró x és y irányok szögének a terhelés hatására bekövetkező megváltozása.
Az γ_{xy} akkor pozitív, ha a 90^o-os szög a terhelés hatására csökken.

(38) Adja meg az alakváltozási tenzor definícióját diadikus alakban és írja fel az alakváltozási tenzor mátrixát derékszögű descartesi koordináta-rendszerben!

a) Az alakváltozási tenzor diadikus alakban: $\underline{\underline{A}} = (\vec{\alpha}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\alpha}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\alpha}_z \circ \vec{e}_z)$,
ahol az alakváltozási vektorok az alábbi alakúak:

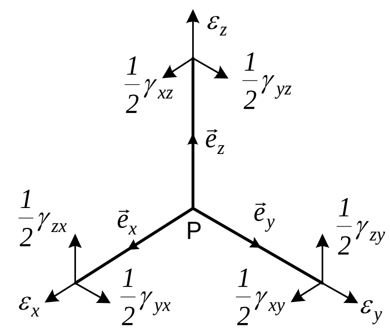
$$\begin{aligned}
\vec{\alpha}_x &= \varepsilon_x \vec{e}_x + \tfrac{1}{2}\gamma_{yx}\vec{e}_y + \tfrac{1}{2}\gamma_{zx}\vec{e}_z, \\
\vec{\alpha}_y &= \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\vec{e}_x + \varepsilon_y \vec{e}_y + \tfrac{1}{2}\gamma_{zy}\vec{e}_z, \\
\vec{\alpha}_z &= \tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\vec{e}_x + \tfrac{1}{2}\gamma_{yz}\vec{e}_y + \varepsilon_z \vec{e}_z.
\end{aligned}$$

és $\circ$ a diadikus szorzás jele.

b) Az alakváltozási tenzor mátrixa:

$$[\underline{\underline{A}}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

(39) Szemléltesse az alakváltozási tenzort az elemi triéderen!



(40) Hogyan számíthatók az alakváltozási tenzorból az adott $\vec{n}$ és $\vec{m}$ ($\vec{n} \cdot \vec{m} = 0$) egységvektorokkal megadott irányokhoz tartozó fajlagos nyúlások és szögtorzulások?

A fajlagos nyúlások számítása:

$$\varepsilon_n = \vec{n} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{n}, \qquad \varepsilon_m = \vec{m} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{m}.$$

A fajlagos szögtorzulások számítása:

$$\frac{1}{2}\gamma_{nm} = \frac{1}{2}\gamma_{mn} = \vec{n} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{m} = \vec{m} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{n}.$$

Az összefüggésekben $\cdot$ a skaláris szorzás jele.

(41) Adja meg az alakváltozási főtengelyek és főnyúlások értelmezését!

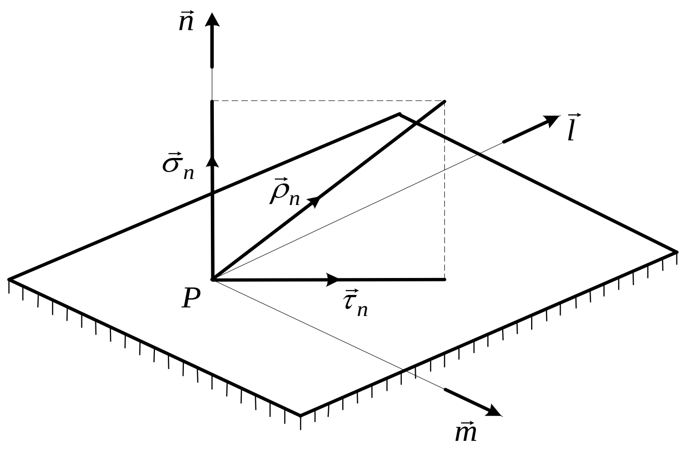
Ha $\vec{\alpha}_e = \varepsilon_e \vec{e}$ és minden $\vec{m} \perp \vec{e}$-re fennáll, hogy $\gamma_{me} = 2\,\vec{m} \cdot \vec{\alpha}_e = 0$, akkor $\vec{e}$ alakváltozási főtengely (alakváltozási főirány) és ε_e főnyúlás.

Megjegyzések:
- Az ε_e is lehet zérus ($\vec{\alpha}_e = \vec{0}$),
- Minden P pontban létezik legalább három főirány, amelyek kölcsönösen merőlegesek egymásra.

(42) Mi a feszültség?

A feszültségvektor a testben terhelés hatására fellépő, felület mentén megoszló belső erőrendszer sűrűségvektora.

(43) Hogyan számíthatók ki a feszültségvektor összetevői? Az összetevőkre bontást ábrán is szemléltesse!



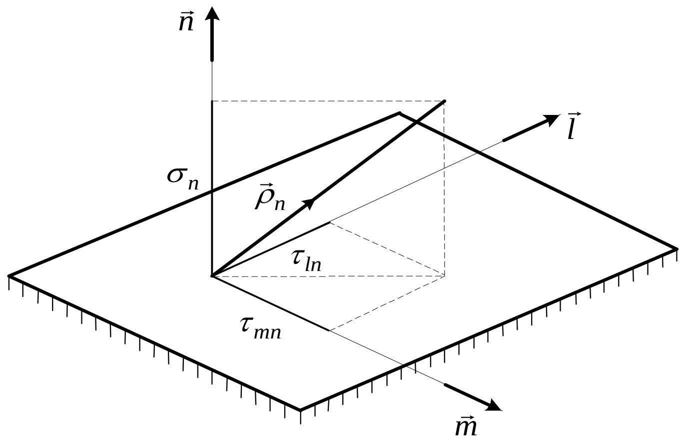
A normál feszültségi összetevő:

$\vec{\sigma}_n = \sigma_n \vec{n} = (\vec{n} \cdot \vec{\varrho}_n) \cdot \vec{n}$

A csúsztató feszültségi összetevő:

$\vec{\tau}_n = \vec{\varrho}_n - \sigma_n \vec{n} = (\vec{n} \times \vec{\varrho}_n) \times \vec{n}$

(44) Hogyan számíthatók ki a feszültségvektor koordinátái? A koordinátákra bontást ábrán is szemléltesse!



A normálfeszültség koordináta:

$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{\sigma}_n = (\vec{n} \cdot \vec{\varrho}_n)$

A csúsztató feszültségi koordináták:

$\tau_{mn} = \vec{m} \cdot \vec{\varrho}_n = \vec{m} \cdot \vec{\tau}_n$

$\tau_{ln} = \vec{l} \cdot \vec{\varrho}_n = \vec{l} \cdot \vec{\tau}_n$

(45) Adja meg a feszültségi tenzor definícióját diadikus alakban és írja fel a feszültségi tenzor mátrixát derékszögű descartesi koordináta-rendszerben!

a) A feszültségi tenzor diadikus alakban: $\underline{\underline{F}} = (\vec{\varrho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\varrho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\varrho}_z \circ \vec{e}_z)$,

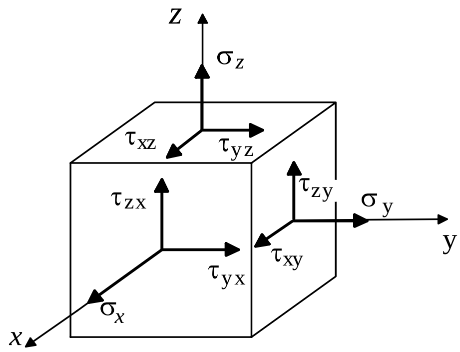
ahol a feszültségi vektorok az alábbi alakúak:

$$\begin{aligned}
\vec{\varrho}_x &= \sigma_x \vec{e}_x + \tau_{yx} \vec{e}_y + \tau_{zx} \vec{e}_z, \\
\vec{\varrho}_y &= \tau_{xy} \vec{e}_x + \sigma_y \vec{e}_y + \tau_{zy} \vec{e}_z, \\
\vec{\varrho}_z &= \tau_{xz} \vec{e}_x + \tau_{yz} \vec{e}_y + \sigma_z \vec{e}_z.
\end{aligned}$$

b) A feszültségi tenzor mátrixa:

$$[\,\underline{\underline{F}}\,] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

(46) Szemléltesse a feszültségi tenzort az elemi kockán!



(47) Hogyan számíthatók a feszültségi tenzorból az adott $\vec{n}$ normálisú síkon fellépő σ_n és τ_{mn} feszültség koordináták?

A normál feszültségi koordináta:

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{\varrho}_n = \vec{n} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \vec{n} \; .$$

A csúsztató feszültségi koordináta:

$$\tau_{mn} = \tau_{nm} = \vec{m} \cdot \vec{\varrho}_n = \vec{n} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \vec{m} = \vec{m} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \vec{n}.$$

Az összefüggésekben $\cdot$ a skaláris szorzás jele.

(48) Adja meg a feszültségi főirányok és főfeszültségek értelmezését!

Ha az $\vec{e}$ egységvektorra $\perp$ elemi felületen $\vec{\tau}_e = \vec{0}$ és ebből következően $\vec{\varrho}_e = \sigma_e \vec{e}$, akkor az $\vec{e}$ feszültségi főtengely (feszültségi főirány) és σ_e főfeszültség, valamint az $\vec{e}$-re $\perp$ elemi felület síkja főfeszültségi sík .

Megjegyzések:
- A σ_e is lehet zérus ($\vec{\varrho}_e = \vec{0}$).
- Minden P pontban létezik legalább három főirány, amelyek kölcsönösen merőlegesek egymásra.

(49) Milyen esetben beszélünk prizmatikus rúdról?

1. definíció: Prizmatikus rúdról abban az esetben beszélünk, ha a rúd kereszt-metszeteinek az alakja és térbeli elhelyezkedése a rúd hossza mentén nem változik.
2. definíció: Prizmatikus az az egyenes középvonalú rúd, amelynek keresztmetszetei állandó alakúak és a középvonal mentén párhuzamos eltolással egymásba tolhatók.

(50) Adja meg a homogén, izotróp, lineárisan rugalmas test (anyag) definícióját!

Homogén: Az anyagi tulajdonságok a test minden pontjában azonosak.

Izotróp: Az anyagi tulajdonságok nem függnek az iránytól.

Lineárisan rugalmas: Ha a feszültségek és az alakváltozási jellemzők között lineáris függvénykapcsolat áll fenn.

(51) Írja fel az egyszerű Hooke törvényt húzás-nyomásra!

$$\sigma_z = E\varepsilon_z \quad \text{és} \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_k = -\nu\varepsilon_z$$

ahol: - σ_z a középvonal irányú normálfeszültség,
- ε_z a középvonal irányú fajlagos nyúlás,
- $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_k$ a keresztirányú fajlagos nyúlás,
- E a (Young-féle) rugalmassági modulus,
- ν a Poisson tényező.

(52) Fogalmazza meg általánosan a szilárdságtani méretezés feladatát rúdszerkezetek esetén!

Adott: A rúd anyaga és terhelése (igénybevételei).

Feladat: A rúd keresztmetszeti méreteinek meghatározása úgy, hogy a rúd az adott terhelést kellő biztonsággal elviselje.

(53) Fogalmazza meg általánosan a szilárdságtani ellenőrzés feladatát rúdszerkezetek esetén!

Adott: a rúd anyaga, keresztmetszetének méretei és terhelése (igénybevételei).

Feladat: Annak eldöntése, hogy a rúd az adott terhelést kellő biztonsággal elviseli-e.

(54) Írja fel a P ponti feszültségi tenzort és adja meg a benne szereplő feszültség koordináták, valamint az l hosszúságú rúd rugalmas alakváltozási energiájának kiszámítási módját prizmatikus rúd húzás-nyomása esetén!

A feszültségi tenzor mátrixa:

$$[\underline{\underline{F}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

A normálfeszültség kiszámítása: $\sigma_z = \dfrac{N}{A}$,
ahol: N a rúderő és A a keresztmetszet területe.
A rugalmas alakváltozási energia: $U = \dfrac{1}{2}\dfrac{N^2}{A\,E}\,l$
ahol: E a rugalmassági modulus.

(55) Írja fel a P ponti feszültségi tenzort és adja meg a benne szereplő feszültség koordináták, valamint az l hosszúságú rúd rugalmas alakváltozási energiájának kiszámítási módját prizmatikus, kör- és körgyűrű keresztmetszetű rúd csavarása esetén!

A feszültségi tenzor mátrixa:

$$[\underline{\underline{F}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\varphi z} \\ 0 & \tau_{z\varphi} & 0 \end{bmatrix}.$$

A csúsztató feszültség kiszámítása: $\tau_{\varphi z} = \tau_{z\varphi} = \dfrac{M_c}{I_p}\,R$,

ahol: M_c a csavaró nyomaték, I_p a keresztmetszet poláris másodrendű nyomatéka és R a P pont súlyponttól mért távolsága.

A rugalmas alakváltozási energia: $U = \dfrac{1}{2}\dfrac{M_c^2}{I_p\,G}\,l$

ahol: G a csúsztató rugalmassági modulus.

(56) Adja meg az I_p poláris másodrendű nyomaték értelmezését és kiszámítását kör- és körgyűrű keresztmetszetre!

Értelmezés: $I_p = \int\limits_{(A)} R^2 dA.$

Kiszámítás:

kör keresztmetszetre: $I_p = \dfrac{d^4\pi}{32}$, körgyűrű keresztmetszetre $I_p = \dfrac{(D^4 - d^4)\pi}{32}$.

(57) Adja meg prizmatikus rúd tiszta hajlításának az értelmezését és ismertesse a Bernoulli hipotézist!

Tiszta hajlítás: ha a vizsgált rúdszakaszon az igénybevétel kizárólag hajlítónyomaték.

Bernoulli hipotézis: Tiszta hajlítás esetén a rúd deformált keresztmetszetei síkok maradnak, a keresztmetszetek síkjában nem lép fel szögtorzulás és a keresztmetszetek az alakváltozás után is merőlegesek maradnak a rúd alakváltozott S ponti szálára.

(58) Milyen esetben beszélünk egyenes hajlításról és ferde hajlításról?

Egyenes hajlítás: Ha az $\vec{M}_S$ hajlító nyomaték párhuzamos a keresztmetszet valamelyik S ponti tehetetlenségi főtengelyével.

Ferde hajlítás: Ha az $\vec{M}_S$ hajlító nyomaték nem párhuzamos a keresztmetszet egyik S ponti tehetetlenségi főtengelyével sem.

(59) Írja fel a P ponti feszültségi tenzort és adja meg a benne szereplő feszültség koordináták, valamint az l hosszúságú rúd rugalmas alakváltozási energiájának kiszámítási módját prizmatikus rúd tiszta, egyenes hajlítása esetén!

A feszültségi tenzor mátrixa:

$$[\underline{\underline{F}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

A normálfeszültség kiszámítása: $\sigma_z = \dfrac{M_{hx}}{I_x}\, y,$

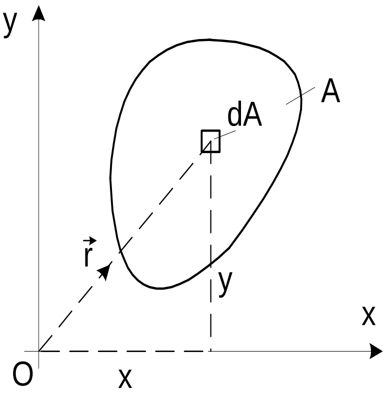
ahol: - M_{hx} az x irányú hajlító nyomaték,

- I_x a keresztmetszet x tengelyre számított másodrendű nyomatéka és
- y a P pont x tengelytől mért előjeles távolsága. (Az x tengely a keresztmetszet S ponti tehetetlenségi főtengelye.)

A rugalmas alakváltozási energia: $U = \dfrac{1}{2}\dfrac{M_{hx}^2}{I_x\, E}\, l$

ahol: E a rugalmassági modulus.

(60) Értelmezze keresztmetszet tengelyre, tengelypárra és pontra számított másodrendű (tehetetlenségi) nyomatékát!



Az x és y tengelyekre számított másodrendű nyomatékok:

$$I_x = \int_{(A)} y^2\, dA > 0, \qquad I_y = \int_{(A)} x^2\, dA > 0$$

Az x, y tengelypárra számított másodrendű nyomaték:

$$I_{xy} = I_{yx} = \int_{(A)} xy\, dA = \int_{(A)} yx\, dA$$

Az O pontra számított másodrendű nyomaték:

$$I_0 = \int_{(A)} (\vec{r})^2\, dA = \int_{(A)} (x^2 + y^2)\, dA = I_y + I_x > 0$$

(61) Írja fel a keresztmetszet S ponti tehetetlenségi tenzorának mátrixát és adja meg a mátrix elemeinek értelmezését!

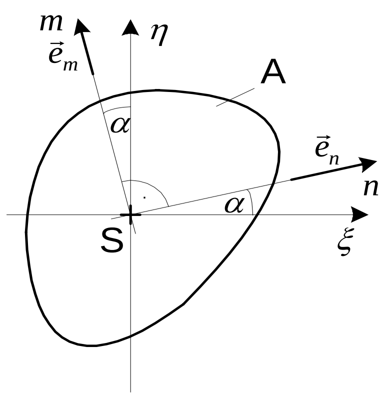
A tehetetlenségi tenzor a keresztmetszet S súlypontjához kötött ξ, η koordináta-rendszerben:

$$\left[\underline{\underline{I}}_S \right] = \begin{bmatrix} I_\xi & -I_{\xi\eta} \\ -I_{\eta\xi} & I_\eta \end{bmatrix}$$

A tenzor elemeinek értelmezése:

$$I_\xi = \int_{(A)} \eta^2 dA\,, \qquad I_\eta = \int_{(A)} \xi^2 dA\,, \qquad I_{\xi\eta} = \int_{(A)} \xi\eta dA\,.$$

(62) Az S ponti ξ, η koordináta-rendszerbeli $\underline{\underline{I}}_S$ tehetetlenségi tenzor ismeretében hogyan számíthatók ki az S ponti n és m tengelyekre és tengelypárra számított I_n, I_m, I_{nm} tehetetlenségi nyomatékok?



Az n és m tengelyekre számított másodrendű nyomatékok:

$$I_n = \vec{e}_n \cdot \underline{\underline{I}}_S \cdot \vec{e}_n, \qquad I_m = \vec{e}_m \cdot \underline{\underline{I}}_S \cdot \vec{e}_m.$$

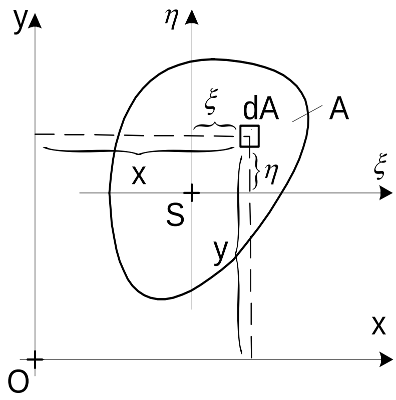
Az n, m tengelypárra számított másodrendű nyomaték:

$$I_{nm} = I_{mn} = -\vec{e}_n \cdot \underline{\underline{I}}_S \cdot \vec{e}_m = -\vec{e}_m \cdot \underline{\underline{I}}_S \cdot \vec{e}_n.$$

Az összefüggésekben $\vec{e}_n$ és $\vec{e}_m$ az n és m irányú egységvektorok:

$$\vec{e}_n = \cos\alpha \vec{e}_\xi + \sin\alpha \vec{e}_\eta, \qquad \vec{e}_m = -\sin\alpha \vec{e}_\xi + \cos\alpha \vec{e}_\eta$$

(63) Írja fel a keresztmetszet tehetetlenségi nyomatékaira vonatkozó Steiner-tételt tenzoriális és skaláris alakban!



A tenzoriális alak:

$\underline{\underline{I}}_O = \underline{\underline{I}}_S + \underline{\underline{I}}_{OS}$,

ahol: $\left[\underline{\underline{I}}_{OS}\right] = A \begin{bmatrix} {y_S}^2 & -y_S x_S \\ -x_S y_S & {x_S}^2 \end{bmatrix}$

A skaláris alak:

$I_x = I_\xi + A{y_S}^2$,
$I_y = I_\eta + A{x_S}^2$,
$I_{xy} = I_{\xi\eta} + Ax_S y_S$.

(64) Adja meg keresztmetszet tehetetlenségi főtengelyeinek és fő tehetetlenségi nyomatékainak az értelmezését!

Tehetetlenségi főtengely az n és m tengely $(n \perp m)$, ha az n, m tengelypárra számított nyomatékok eltünnek: $I_{nm} = I_{mn} = 0$.
Fő tehetetlenségi nyomatékok az n és m tehetetlenségi főtengelyekre számított I_n és I_m másodrendű nyomatékok.

(65) Írja fel a szilárd testre vonatkozó egyensúlyi egyenletet koordináta rendszertől független vektoriális alakban és adja meg a skaláris egyenleteket x, y, z derékszögű descartesi koordináta-rendszerben!
Vektoriális alak:

$$\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0},$$

ahol: $\underline{\underline{F}}$ a feszültségi tenzor,
∇ a Hamilton-féle differenciál operátor és
$\vec{q}$ a térfogati terhelés sűrűségvektora.

Skaláris egyenletek x, y, z koordináta-rendszerben:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + q_x = 0,$$
$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + q_y = 0,$$
$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z = 0.$$

(66) Adja meg a derivált tenzormező és az elmozdulásmező, az alakváltozási tenzormező és az elmozdulásmező, valamint a forgató tenzormező és az elmozdulásmező kapcsolatát koordináta rendszertől független alakban!

A derivált tenzor: $\underline{\underline{D}} = \vec{u} \circ \nabla$,
Az alakváltozási tenzor: $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}(\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u})$,
A forgató tenzor: $\underline{\underline{\Psi}} = \frac{1}{2}(\vec{u} \circ \nabla - \nabla \circ \vec{u})$,

ahol: $\vec{u}$ az elmozdulási vektormező,

∇ a Hamilton-féle differenciál operátor és
$\circ$ a diadikus szorzás jele.

(67) Írja fel az alakváltozási jellemzők és az elmozdulás-koordináták közötti kapcsolatot skaláris alakban!

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z},$$
$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}.$$

(68) Írja fel az általános Hooke törvény izotróp anyagra vonatkozó mindkét tenzoriális alakját és adja meg az egyenletekben szereplő mennyiségek jelentését!

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2G}(\underline{\underline{F}} - \frac{\nu F_I}{1+\nu}\underline{\underline{E}}), \qquad \underline{\underline{F}} = 2G(\underline{\underline{A}} + \frac{\nu A_I}{1-2\nu}\underline{\underline{E}}),$$

ahol: $\underline{\underline{A}}$ az alakváltozási tenzor,
$\underline{\underline{F}}$ a feszültségi tenzor,
$\underline{\underline{E}}$ az egység tenzor,
G a csúsztató rugalmassági modulus,
ν a Poisson tényező,
T_I a feszültségi tenzor első skalár invariánsa és
A_I az alakváltozási tenzor első skalár invariánsa.

(69) Vezesse le az E rugalmassági modulus és a G csúsztató rugalmassági modulus közötti kapcsolatot!

Egytengelyű feszültségi állapot esetén: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_z$.

Az egyszerű Hooke törvény: $\sigma_z = E\varepsilon_z$.

Az általános Hooke törvény:
$$\sigma_z = 2G[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)] =$$
$$= 2G[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}(-\nu\varepsilon_z - \nu\varepsilon_z + \varepsilon_z)] =.$$
$$= 2G[\varepsilon_z + \nu\varepsilon_z)] = 2G(1+\nu)\varepsilon_z.$$

Az egyszerű és az általános Hooke törvényt összevetve: $E = 2G(1+\nu)$.

(70) Adja meg a redukált (egyenértékű) feszültség definícióját!

Olyan feszültség, amely a pontbeli feszültségi állapotot tönkremenetel szempontjából egyértelműen jellemzi.

A redukált feszültség bevezetésével a tetszőleges térbeli feszültségi állapotot egytengelyű feszültségi állapotra vezetjük vissza.

(71) Hogyan értelmezzük a Coulomb-féle redukált feszültséget?

$$\sigma_{red}(Coulomb) = \sigma_{max} = max(|\sigma_1|, |\sigma_3|),$$

ahol: σ_1 a legnagyobb, σ_3 pedig a legkisebb főfeszültség.

Coulomb szerint a pontbeli feszültségi állapotot károsodás szempontjából a legnagyobb abszolút értékű normál feszültség jellemzi.

(72) Hogyan értelmezzük a Mohr-féle redukált feszültséget?

$$\sigma_{red}(Mohr) = \sigma_1 - \sigma_3,$$

ahol: σ_1 a legnagyobb, σ_3 pedig a legkisebb főfeszültség.

Mohr szerint a pontbeli feszültségi állapotot károsodás szempontjából a legnagyobb Mohr kör átmérője jellemzi.

(73) Hogyan értelmezzük a Huber-Mises-Hencky-féle redukált feszültséget?

$$\sigma_{red}(HMH) = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}\ ,$$

vagy

$$\sigma_{red}(HMH) = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]}\ ,$$

ahol: σ_1, σ_2, σ_3 főfeszültségek,

σ_x, σ_y, σ_z normál feszültségek,

τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{xz} csúsztató feszültségek.

A Huber-Mises-Hencky-féle redukált feszültség arányos az u_T fajlagos torzulási energiával.

(74) Adja meg a redukált feszültség számításának módját abban az esetben, amikor egy pontbeli feszültségi állapotot egy normál feszültség és egy (vele azonos síkon fellépő) csúsztató feszültség jellemzi!

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + \beta\tau^2}\ ,$$

ahol: Mohr esetében $\beta = 4$ és

Huber-Mises-Hencky esetében $\beta = 3$.

(75) Adja meg ferde hajlítás esetén a zérusvonal értelmezését és írja fel a zérusvonal egyenletét!

Zérusvonal: A keresztmetszet azon pontjai, ahol $\sigma_z = 0$.

A zérusvonal egyenlete:

$$\sigma_z = 0 = \frac{M_{hx}}{I_x}y + \frac{M_{hy}}{I_y}x, \quad \text{vagy} \qquad y = -\frac{M_{hy}}{M_{hx}}\frac{I_x}{I_y}x,$$

ahol: M_{hx}, M_{hy} az x, y tehetetlenségi főtengely irányú előjeles hajlítónyomatéki koordináták és

I_x, I_y az x, y tehetetlenségi főtengelyekre számított másodrendű nyomatékok.

(76) Írja fel a P ponti feszültségi tenzort és adja meg a benne szereplő feszültség koordináták kiszámítási módját prizmatikus rúd ferde hajlítása esetén!

A feszültségi tenzor mátrixa:

$$[\underline{\underline{F}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

A normál feszültség kiszámítása: $\sigma_z = \dfrac{M_{hx}}{I_x} y + \dfrac{M_{hy}}{I_y} x$,

ahol: M_{hx}, M_{hy} az x, y tehetetlenségi főtengely irányú hajlítónyomatéki koordináták és

I_x, I_y az x, y tehetetlenségi főtengelyekre számított másodrendű nyomatékok.

(77) Adja meg a ferde hajlítás mindkét értelmezését!

Ha az $\vec{M}_S$ nyomatékvektor nem párhuzamos az egyik S ponti tehetetlenségi főtengellyel sem.

Ha az $\vec{M}_S$ nyomatékvektor nem párhuzamos a zérus-vonallal.

(78) Írja le prizmatikus rúd hajlítás-nyírásánál alkalmazott feltételezéseket!

- A σ_z úgy számítható, mint tiszta hajlítás esetén.
- A τ_{yz} egyensúlyi feltételből határozható meg.
- Az x és y tengelyek a keresztmetszet S ponti tehetetlenségi főtengelyei.
- Az x tengelyen fellépő $\vec{\tau}_z$ feszültségek az y tengelyen egy pontban metsződnek.
- Minden x tengellyel párhuzamos egyenes mentén a τ_{yz} állandó.

(79) Írja fel a P ponti feszültségi tenzort és adja meg a benne szereplő feszültség koordináták kiszámítási módját prizmatikus rúd hajlítás-nyírása esetén!

A feszültségi tenzor mátrixa:

$$[\underline{\underline{F}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

A normál feszültség kiszámítása: $\sigma_z = \dfrac{M_{hx}}{I_x} y$,

ahol: M_{hx} az x tehetetlenségi főtengely irányába mutató hajlítónyomaték,

I_x az x tehetetlenségi főtengelyre számított másodrendű nyomaték.

A τ_{yz} csúsztató feszültség kiszámítása: $\tau_{yz} = -\dfrac{T_y\, S_x(y)}{I_x\, a(y)}$,

ahol: T_y az y tengely irányú nyíróerő,

$S_x(y)$ a keresztmetszet $y = áll.$ egyenes fölé (alá) eső részének az x tengelyre számított statikai nyomatéka,

$a(y)$ a keresztmetszetbe metsző $y = áll.$ egyenes hossza.

A τ_{xz} csúsztató feszültség kiszámítása abból a feltételből történik, hogy a $\vec{\tau}_z$ feszültségek az y tengelyen egy pontban metsződnek.

(80) Hogyan számítható ki rúdszerkezetek alakváltozási energiája általános esetben?

$$U = \int_{(V)} u\, dV = \underbrace{U_N}_{\substack{\text{húzás-nyomási}\\ \text{alakváltozási}\\ \text{energia}}} + \underbrace{U_{M_h}}_{\substack{\text{hajlítási}\\ \text{alakváltozási}\\ \text{energia}}} + \underbrace{U_C}_{\substack{\text{csavarási}\\ \text{alakváltozási}\\ \text{energia}}} + \underbrace{U_T}_{\substack{\text{nyírási}\\ \text{alakváltozási}\\ \text{energia}}}.$$

Ha $U_T \approx 0$, akkor $U = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{(l)} \left(\frac{N^2}{A\,E} + \frac{M_{hx}^2}{I_x\,E} + \frac{M_{hy}^2}{I_y\,E} + \frac{M_c^2}{I_p\,G} \right) ds$

(81) Ismertesse a Castigliano tételt!

1. alak:

$$u_i = \frac{\partial\, U}{\partial\, F_i}.$$

A szerkezetet terhelő F_i erő támadáspontjának az F_i erő irányába eső u_i elmozdulása egyenlő a szerkezet U alakváltozási energiájának az F_i erő szerint vett deriváltjával.

2. alak:

$$\psi_i = \frac{\partial\, U}{\partial\, M_i}.$$

A szerkezetet terhelő M_i nyomaték keresztmetszetének az M_i nyomaték iránya körüli ψ_i szögelfordulása egyenlő a szerkezet U alakváltozási energiájának az M_i nyomaték szerint vett deriváltjával.

(82) *Mikor statikailag határozott egy szerkezet?*

Ha az ismeretlen támasztó és belső erő koordináták száma egyenlő a szerkezetre felírható, egymástól független skaláris statikai egyensúlyi egyenletek számával.

Ha a szerkezet támasztó és belső erőrendszerének skaláris koordinátái statikai egyensúlyi (vetületi és nyomatéki) egyenletekből meghatározhatók.

(83) *Mikor statikailag határozatlan egy szerkezet?*

Ha az ismeretlen támasztó és belső erő koordináták száma nagyobb, mint a szerkezetre felírható, egymástól független skaláris statikai egyensúlyi egyenletek számával.

Ha a szerkezet támasztó és belső erőrendszerének skaláris koordinátái statikai egyensúlyi (vetületi és nyomatéki) egyenletekből nem határozhatók meg.

(84) *Írja le a statikailag határozatlan tartószerkezetek támasztóerői meghatározásának gondolatmenetét!*

- A szerkezet statikailag határozottá tétele (törzstartó).
- Az alakváltozási (geometriai) korlátozási egyenlet felírása.
- Az alakváltozási korlátozásból a Castigliano tétellel a plusz támasztóerő koordináta meghatározása.
- Statikai egyensúlyi egyenletekből a többi támasztóerő koordináta meghatározása.

(85) *Adja meg a sík-alakváltozási állapot definícióját!*

Ha a testnek van egy olyan kitüntetett síkja, amellyel párhuzamos valamennyi sík alakváltozása azonos és alakváltozás közben a síkok távolsága nem változik.

(86) *Írja fel feszültségi és az alakváltozási tenzort sík-alakváltozási állapot esetén!*

A feszültségi tenzor: $[\,\underline{\underline{F}}(x,y)\,] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}.$

Az alakváltozási tenzor: $[\,\underline{\underline{A}}(x,y)\,] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

(87) *Adja meg az általánosított sík-feszültségi állapot definícióját!*

Általánosított sík-feszültségi állapotban a saját síkjukban terhelt lemezek vannak.
A lemez olyan test, amelynek egyik mérete a másik két kiterjedéséhez képest kicsi és értelmezhető középsík.
A terhelés vastagság menti eredője a lemez középsíkjában működik.

(88) *Írja fel feszültségi és az alakváltozási tenzort általánosított sík-feszültségi állapot esetén!*

A feszültségi tenzor: $[\,\overline{\underline{\underline{F}}}(x,y)\,] = \begin{bmatrix} \overline{\sigma}_x & \overline{\tau}_{xy} & 0 \\ \overline{\tau}_{yx} & \overline{\sigma}_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Az alakváltozási tenzor: $[\,\overline{\underline{\underline{A}}}(x,y)\,] = \begin{bmatrix} \overline{\varepsilon}_x & \frac{1}{2}\overline{\gamma}_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\overline{\gamma}_{yx} & \overline{\varepsilon}_y & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\varepsilon}_z \end{bmatrix}.$

(89) *Írja fel általánosított sík-feszültségi állapot esetén az átlag feszültségek értelmezését!*

$$\overline{\sigma}_x(x,y) = \frac{1}{b}\int\limits_{(b)} \sigma_x(x,y,z)\,dz, \quad \overline{\sigma}_y(x,y) = \frac{1}{b}\int\limits_{(b)} \sigma_y(x,y,z)\,dz,$$

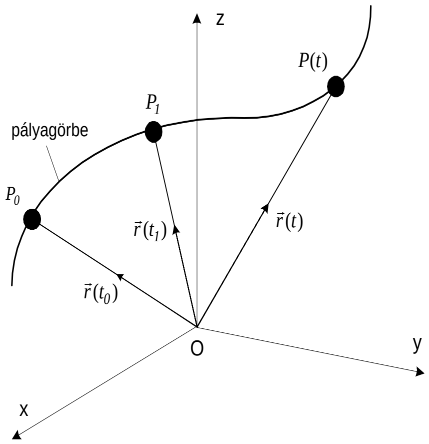
$$\overline{\tau}_{xy}(x,y) = \frac{1}{b}\int\limits_{(b)} \tau_{xy}(x,y,z)\,dz.$$

(90) *Hogyan kell felvenni sík alakváltozásnál és általánosított sík feszültségi állapotnál a feszültségfüggvényt és hogyan származtathatók a feszültségek a feszültségfüggvényből?*

A feszültségfüggvényt úgy kell felvenni, hogy a belőle számított feszültségek kielégítsék az egyensúlyi egyenleteket.

$$\sigma_x(x,y) = \frac{\partial^2\chi(x,y)}{\partial y^2}, \qquad \sigma_y(x,y) = \frac{\partial^2\chi(x,y)}{\partial x^2}, \qquad \tau_{xy}(x,y) = -\frac{\partial^2\chi(x,y)}{\partial x\partial y}.$$

(91) *Adja meg anyagi pont mozgástörvényének (mozgásfüggvényének) és pályájának definícióját!*



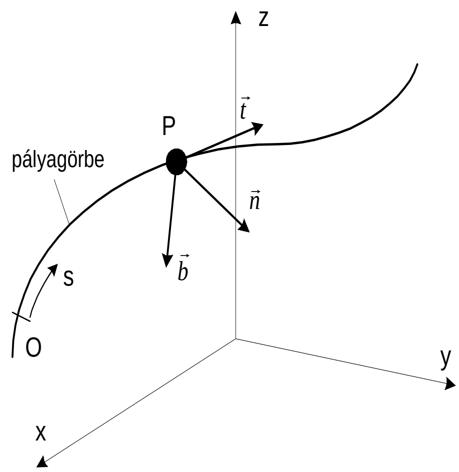
A mozgástörvény az az $\vec{r} = \vec{r}(t)$ helyvektor - idő (vektor - skalár) függvény, amely az anyagi pont pillanatnyi helyzetét meghatározza.

Anyagi pont pályája az a térgörbe, amelyen a pont a mozgás során végig halad.

(92) *Adja meg az s=s(t) ívkoordináta értelmezését!*

Az s ívkoordináta egy adott O kezdőponttól, a pályagörbe mentén mért előjeles távolság (előjeles ívhossz), amely a tömegpont helyét a pályagörbén egyértelműen megadja.

(93) *Értelmezze anyagi pont pályagörbéjének egy tetszőleges pontjában a $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ kísérő triédert!*



- Az érintő irányú egységvektor:
$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds}, \quad |\vec{t}| = 1.$$
- A főnormális egységvektor:
$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \kappa\vec{n} = \frac{1}{\varrho}\vec{n}, \quad |\vec{n}| = 1.$$
- A binormális egységvektor:
$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}, \quad |\vec{b}| = 1.$$

s - ívkoordináta (előjeles ívhossz),
κ - a pályagörbe görbülete,
ϱ - a pályagörbe görbületi sugara.

(94) *Adja meg anyagi pont $\vec{v}$ (t) sebességfüggvényének, valamint pillanatnyi sebességvektorának értelmezését és írja le a pillanatnyi sebességvektor tulajdonságait!*

A sebességfüggvény a mozgástörvény (mozgásfüggvény) idő szerint vett első deriváltja:
$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}.$$

A pillanatnyi sebességvektor a sebesség-függvény egy adott időpillanatban felvett értéke: $\vec{v}_1 = \vec{v}(t_1)$.

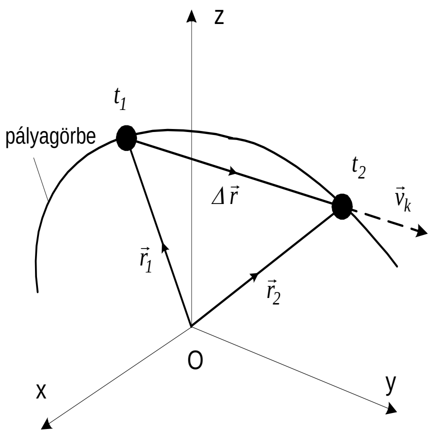
A pillanatnyi sebességvektor tulajdonságai:
- vektor mennyiség,
- iránya megegyezik a pályagörbe érintőjének irányával.

(95) *Bizonyítsa be, hogy anyagi pont sebességvektorának iránya megegyezik a pályagörbe érintőjének irányával!*

Bizonyítás: $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{ds}}_{\vec{t}} \frac{ds}{dt} = v(t)\vec{t}.$

s - a pályagörbe mentén mért ívkoordináta,
$\vec{t}$ - a pályagörbe érintő egységvektora,
$v(t)$ - a pályasebesség.
1mm]

(96) *Értelmezze anyagi pont elmozdulásvektorát és közepes sebességét!*



- Az elmozdulás-vektor: $\triangle\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.
- Az elmozdulásvektor az anyagi pont t_1 időpillanatban elfoglalt helyéből a t_2 időpillanatbeli helyzetébe mutató helyvektor.
- A közepes sebesség: $\vec{v}_k = \frac{\triangle\vec{r}}{\triangle t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$.
- Az elmozdulásvektor és a közepes sebességvektor is egy adott idő-intervallumra vonatkozik.

(97) *Értelmezze anyagi pont pálya menti sebességét (pályasebességét) és írja le a tulajdonságait!*

A pálya menti sebesség a pályagörbe mentén mért ívkoordináta idő szerint vett első deriváltja: $v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$.

Tulajdonságai:
- (előjeles) skalár mennyiség,
- előjelét a s ívkoordináta irányítása dönti el, előjele a $\vec{t}$ irányára vonatkozik (a pályasebesség akkor pozitív, ha az ívkoordináta nő).

(98) *Adja meg anyagi pont gyorsulásfüggvényének, valamint pillanatnyi gyorsulásvektorának értelmezését és írja le a pillanatnyi gyorsulásvektor tulajdonságait!*

A gyorsulásfüggvény a sebességfüggvény idő szerint vett első deriváltja, illetve a mozgásfüggvény (mozgástörvény) idő szerint vett második deriváltja:
$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$.

A pillanatnyi gyorsulásvektor a gyorsulásfüggvény egy adott időpillanatban felvett értéke: $\vec{a}_1 = \vec{a}(t_1)$.

A pillanatnyi gyorsulásvektor tulajdonságai:
- vektormennyiség,
- a pályagörbe simulósíkjába esik és a pályagörbe $\vec{t}$ érintője és $\vec{n}$ főnormálisa irányába eső összetevőkből áll.

(99) *Bizonyítsa be, hogy anyagi pont gyorsulásvektora a pályagörbe $\vec{t}$, $\vec{n}$ simulósíkjába esik!*

$$\vec{a} = \vec{a}(t) = \frac{d}{dt}[v(t)\vec{t}(t)] = \frac{dv(t)}{dt}\vec{t} + v(t)\underbrace{\frac{d\vec{t}}{ds}}\underbrace{\frac{ds}{dt}} = \frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{\varrho}\vec{n}.$$

$$\frac{\vec{n}}{\varrho} \quad v(t)$$

(100) *Adja meg az anyagi pont gyorsulásvektora koordinátáinak elnevezését, kiszámítási módját és fizikai tartalmát az pályagörbe $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ természetes koordináta-rendszerében!*

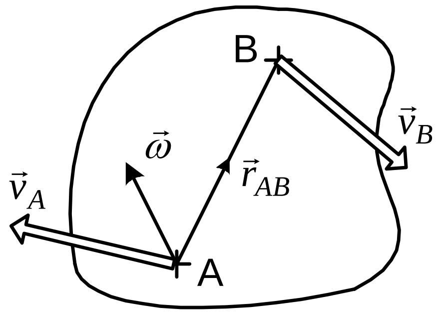
Elnevezés:	Kiszámítási mód:	Fizikai tartalom:
Pálya menti gyorsulás (Pályagyorsulás)	$a_t(t) = \frac{dv(t)}{dt}$	A sebességvektor nagyságának változását jellemzi.
Normális gyorsulás	$a_n(t) = \frac{v^2}{\varrho}$	A sebességvektor irányának változását jellemzi.

(101) *Adja meg a merev test sebességállapotának értelmezését! Milyen mennyiségekkel adható meg egyértelműen merev test sebességállapota?*

Merev test sebességállapota egy adott időpillanatban a merev test összes pontjához tartozó sebességvektorok halmaza.

Megadás:
- a test pillanatnyi $\vec{\omega}$ szögsebességével,
- a test egy adott A pontjának pillanatnyi $\vec{v}_A$ sebességével.

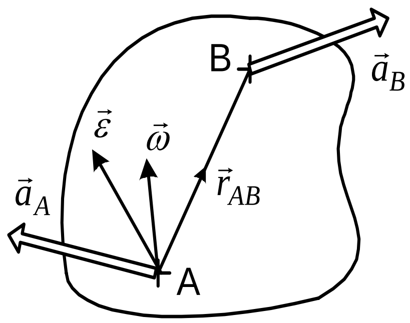
(102) *Adja meg egy adott időpillanatban a merev test két pontjának sebességvektora közötti összefüggést!*



$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}$,

$\vec{\omega}$ - a test pillanatnyi szögsebessége,
$\vec{v}_A, \vec{v}_B$ - az A és B pontok pillanatnyi sebessége,
$\vec{r}_{AB}$ - az A pontból a B pontba mutató helyvektor.

(103) *Adja meg egy adott időpillanatban a merev test két pontjának gyorsulásvektora közötti összefüggést térbeli mozgás és síkmozgás esetén!*



Térbeli mozgás: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB})$,

$\vec{\varepsilon}$ - a test pillanatnyi szöggyorsulása,
$\vec{\omega}$ - a test pillanatnyi szögsebessége,
$\vec{a}_A, \vec{a}_B$ - az A és B pontok pillanatnyi gyorsulása,
$\vec{r}_{AB}$ - az A pontból a B pontba mutató helyvektor.

Síkmozgás: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \varepsilon\vec{n} \times \vec{R}_{AB} - \omega^2\vec{R}_{AB}$,

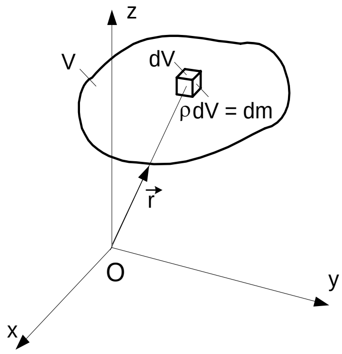
$\vec{n}$ - a sík normális egységvektora,
$\vec{R}_{AB}$ - az $\vec{r}_{AB}$ helyvektor síkba eső összetevője.

(104) *Adja meg a merev test gyorsulásállapotának értelmezését! Milyen mennyiségekkel adható meg egyértelműen merev test gyorsulásállapota?*

Merev test gyorsulásállapota egy adott időpillanatban a merev test összes pontjához tartozó gyorsulásvektorok halmaza.

Megadás:
- a test $\vec{\varepsilon}$ pillanatnyi szöggyorsulásával,
- a test $\vec{\omega}$ pillanatnyi szögsebességével,
- a test egy adott A pontjának $\vec{a}_A$ pillanatnyi gyorsulásával.

(105) *Értelmezze a test tömegét és a test O pontra számított statikai nyomatékát! Készítsen magyarázó ábrát!*



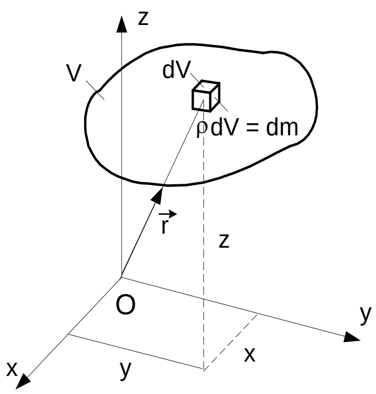
A test tömege a test tehetetlenségének mérőszáma:

$$m = \int_{(m)} dm = \int_{(V)} \rho\, dV.$$

A test O pontra számított statikai nyomatéka:

$$\vec{S}_O = \int_{(m)} \vec{r}\, dm = \int_{(V)} \vec{r}\, \rho\, dV.$$

(106) *Értelmezze a test koordináta síkokra számított statikai nyomatékát! Készítsen magyarázó ábrát!*



A koordináta síkokra számított statikai nyomatékok:

$$S_{xy} = \int_{(m)} z\, dm = \int_{(V)} z\, \rho\, dV \; = \vec{S}_O \cdot \vec{e_z},$$

$$S_{yz} = \int_{(m)} x\, dm = \int_{(V)} x\, \rho\, dV \; = \vec{S}_O \cdot \vec{e_x},$$

$$S_{xz} = \int_{(m)} y\, dm = \int_{(V)} y\, \rho\, dV \; = \vec{S}_O \cdot \vec{e_y},$$

ahol:
$\vec{S_O}$ – a test O pontra számított statikai nyomatéka,
$\vec{e_x}$,$\vec{e_y}$, $\vec{e_z}$ – a síkok normális egységvektorai.

(107) *Adja meg az összefüggést egy merev test két pontra számított statikai nyomatéka között!*

$$\vec{S}_B = \vec{S}_A - m\vec{r}_{AB}\,, \quad vagy \quad \vec{S}_B = \vec{S}_A + m\vec{r}_{BA}$$

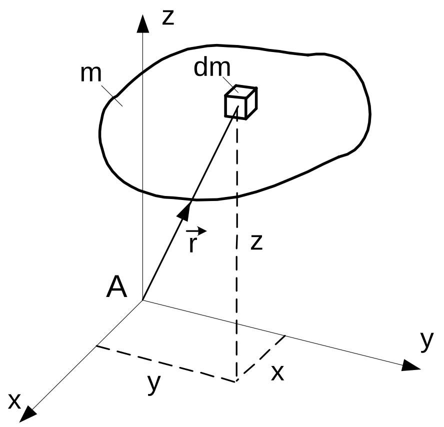
ahol A és B a tér két tetszőleges pontja,
merev test esetén: $m = \int_{(m)} dm = \int_{(V)} \rho\, dV.$

(108) *Definiálja merev test T tömegközéppontját és adja meg a tömegközéppont helyvektorának kiszámítási módját! Milyen esetben esik egybe a tömegközéppont a súlyponttal?*

- A tömegközéppont az a pont, amelyre számított statikai nyomaték zérus.

- A tömegközéppont helyvektora: $\vec{r}_{OT} = \vec{r}_T = \frac{\vec{S}_O}{m}$,
  ahol O a koordináta-rendszer kezdőpontja,
  m a rendszer tömege és
  $\vec{S}_O$ a koordináta-rendszer kezdőpontjára számított statikai nyomaték.
- A tömegközéppont akkor azonos a súlyponttal, ha a gravitációs gyorsulás állandó.

(109) *Értelmezze merev test pontra és a koordináta-rendszer tengelyeire számított tehetetlenségi nyomatékát! Adja meg a pontra és a tengelyre számított tehetetlenségi nyomatékok legfontosabb tulajdonságát!*



Pontra számított:

$J_A = \int\limits_{(m)} r^2 dm = \int\limits_{(m)} (x^2 + y^2 + z^2) dm.$

A koordináta tengelyekre számított nyomatékok:

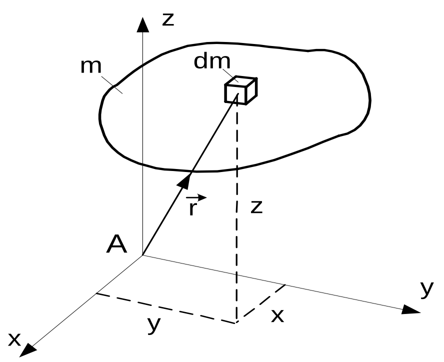
$J_x = \int\limits_{(m)} (y^2 + z^2) dm$ - x tengelyre számított,

$J_y = \int\limits_{(m)} (x^2 + z^2) dm$ - y tengelyre számított,

$J_z = \int\limits_{(m)} (x^2 + y^2) dm$ - z tengelyre számított.

Tulajdonság: $J_A \geq 0$, $J_a \geq 0$.
1mm]

(110) *Értelmezze merev test koordináta-síkpárokra számított tehetetlenségi nyomatékát!*



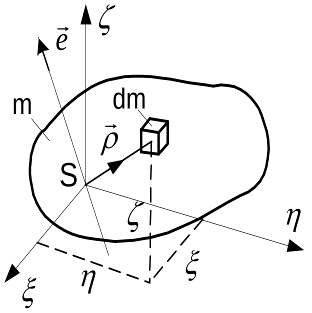
A koordináta-síkpárokra számított nyomatékok:

$J_{xy} = \int\limits_{(m)} (xy) dm$ - az [yz]-[xz] síkpárra számított,

$J_{yz} = \int\limits_{(m)} (yz) dm$ - az [xz]-[xy] síkpárra számított,

$J_{zx} = \int\limits_{(m)} (zx) dm$ - az [xy]-[yz] síkpárra számított.

(111) *Adja meg a merev test S súlyponti e tengelyre számított tehetetlenségi vektorának, valamint tehetetlenségi tenzorának értelmezését és írja fel a tenzor mátrixát az S ponthoz kötött ξ, η, ζ koordináta-rendszerben!*



Tehetetlenségi vektor értelmezése:

$\vec{J}_e = \int\limits_{(m)} \vec{\varrho} \times (\vec{e} \times \vec{\varrho}) dm.$

Tenzor értelmezése:

$\underline{\underline{J}}_S = \int\limits_{(m)} [\varrho^2 \underline{\underline{E}} - \vec{\varrho} \circ \vec{\varrho}] dm = (\vec{J}_\xi \circ \vec{e}_\xi + \vec{J}_\eta \circ \vec{e}_\eta + \vec{J}_\zeta \circ \vec{e}_\zeta).$

A tenzor mátrixa:

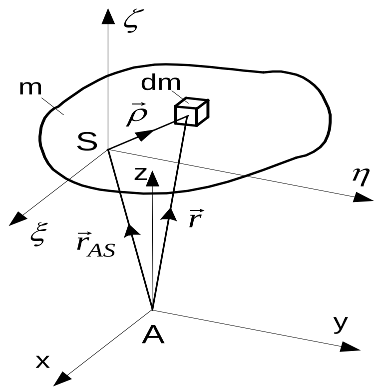
$$\left[\underline{\underline{J}}_S \right] = \begin{bmatrix} J_\xi & -J_{\xi\eta} & -J_{\xi\zeta} \\ -J_{\eta\xi} & J_\eta & -J_{\eta\zeta} \\ -J_{\zeta\xi} & -J_{\zeta\eta} & J_\zeta \end{bmatrix}.$$

(112) *Hogyan számíthatók ki a $\underline{\underline{J}}_S$ súlyponti tehetetlenségi tenzor, valamint az $\vec{n}$ és az $\vec{m}$ irány egységvektorok ismeretében a J_n tengelyre és a J_{nm} síkpárra számított tehetetlenségi nyomaték?*

$$J_n = \vec{n} \cdot \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{n}, \qquad J_{nm} = J_{mn} = -\vec{n} \cdot \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{m} = -\vec{m} \cdot \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{n}$$

(113) *Írja fel merev test tehetetlenségi tenzorára a Steiner tételt!*

A Steiner tétel összefüggést ad meg az egymással párhuzamos S súlyponti és tetszőleges A ponti tengelyekre (és síkpárokra) számított tehetetlemségi nyomatékok között.



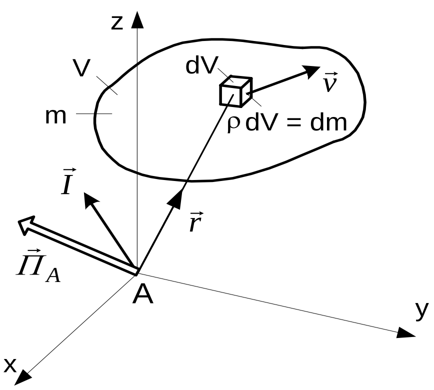
Tenzoriális alak:

$$\underline{\underline{J}}_A = \underline{\underline{J}}_S + \underline{\underline{J}}_{SA}.$$

Skaláris alak:

$$J_x = J_\xi + m(y_{AS}^2 + z_{AS}^2) = J_\xi + m(\eta_{SA}^2 + \zeta_{SA}^2),$$
$$J_y = J_\eta + m(x_{AS}^2 + z_{AS}^2) = J_\xi + m(\xi_{SA}^2 + \zeta_{SA}^2),$$
$$J_z = J_\zeta + m(x_{AS}^2 + y_{AS}^2) = J_\zeta + m(\xi_{SA}^2 + \eta_{SA}^2),$$
$$J_{xy} = J_{\xi\eta} + m x_{AS} y_{AS} = J_{\xi\eta} + m \xi_{SA} \eta_{SA},$$
$$J_{yz} = J_{\eta\zeta} + m y_{AS} z_{AS} = J_{\eta\zeta} + m \eta_{SA} \zeta_{SA},$$
$$J_{xz} = J_{\xi\zeta} + m x_{AS} z_{AS} = J_{\xi\zeta} + m \xi_{SA} \zeta_{SA}.$$

(114) *Adja meg az impulzus vektorrendszer eredő vektorkettősének értelmezését merev test esetén!*



Merev test esetén:

Az eredő impulzus vektor:

$$\vec{I} = \int_{(m)} \vec{v} dm.$$

Az eredő impulzus-nyomaték (perdület) vektor:

$$\vec{\Pi}_A = \int_{(m)} \vec{r} \times \vec{v} dm.$$

(115) *Hogyan számítható ki az impulzus vektorrendszer S súlyponti eredő vektorkettőse merev test esetén!*

Az eredő impulzus vektor kiszámítása: $\vec{I} = m\vec{v}_S$.

Az eredő impulzus-nyomaték (perdület) vektor kiszámítása: $\vec{\Pi}_S = \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{\omega}$.

m - a test tömege, $\vec{v}_S$ - a test S súlypontjának sebességvektora,
$\vec{\omega}$ - a test szögsebességvektora,
$\underline{\underline{J}}_S$ - a test S ponti tehetetlenségi tenzora.

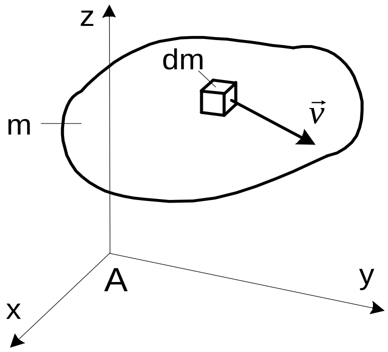
(116) *Hogyan számítható ki az impulzus vektorrendszernek a test tetszőleges A pontjára számított eredő vektorkettőse!*

Az eredő impulzus vektor kiszámítása: $\vec{I} = m\vec{v}_S$.

Az eredő impulzus-nyomaték (perdület) vektor kiszámítása: $\vec{\Pi}_A = \underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{\omega} + \vec{r}_{AS} \times m\vec{v}_A$.

m - a test tömege, $\vec{v}_S$ - a test S pontjának sebességvektora,
$\vec{v}_A$ - a test A pontjának sebességvektora,
$\vec{\omega}$ - a test szögsebességvektora,
$\underline{\underline{J}}_A$ - a test A ponti tehetetlenségi tenzora.

(117) *Adja meg a kinetikai (mozgási) energia értelmezését merev test esetén!*



Merev test esetén:
$E = \int\limits_{(m)} v^2 dm > 0.$

A mozgási energia pozitív skalár mennyiség.

(118) *Hogyan számítható ki merev test kinetikai (mozgási) energiája a szögsebesség és az impulzus vektorrendszer eredő vektorkettősének felhasználásával?*

A tetszőleges A ponti vektorkettőssel:

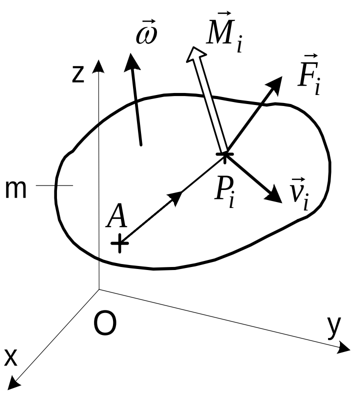
$E = \frac{1}{2}(\vec{v}_A \cdot \vec{I} + \vec{\omega} \cdot \vec{\Pi}_A)$,

Az S súlyponti vektorkettőssel:

$E = \frac{1}{2}(\vec{v}_S \cdot \vec{I} + \vec{\omega} \cdot \vec{\Pi}_S)$, vagy

$E = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} J_s \omega^2$, ahol $J_s = \frac{1}{\omega^2}(\vec{\omega} \cdot \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{\omega})$ a test $\vec{\omega}$-val párhuzamos S ponti tengelyére számított tehetetlenségi nyomaték.

(119) *Hogyan számítható ki merev testre ható erők teljesítménye?*



Merev testre ható erők teljesítménye:

$P = P_K = \sum\limits_i (\vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \vec{M}_i \cdot \vec{\omega})$, vagy

$P = P_K = \vec{F} \cdot \vec{v}_A + \vec{M}_A \cdot \vec{\omega}$,

$\vec{F}$ - a külső erőrendszer eredő ereje,
$\vec{v}_A$ - a test A pontjának sebessége,
$\vec{M}_A$ - a külső erőrendszernek az A pontra számított nyomatéka,
$\vec{\omega}$ - a test szögsebessége.

(120) *Hogyan számítható ki tömegpontra, illetve merev testre ható erőrendszer munkája?*

A tömegpontra ható erőrendszer munkája:

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} P dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

$\vec{F}$ - az erőrendszer eredője, $\vec{v}$ - a tömegpont sebessége.

A merev testre ható erőrendszer munkája:

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} P dt = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F} \cdot \vec{v}_A + \vec{M}_A \cdot \vec{\omega}) dt,$$

$\vec{F}$ - a külső erőrendszer eredő erője, $\vec{v}_A$ - a test A pontjának sebessége,
$\vec{M}_A$ - a külső erőrendszer A pontra számított nyomatéka,
$\vec{\omega}$ - a test szögsebessége.

(121) *Ismertesse a dinamika alaptörvényét, valamint az ebből következő impulzus- és perdülettétel differenciális alakját merev test (vagy tömegpont-rendszer) S súlypotjára, illetve tetszőleges A pontjára felírva!*

Inercia-rendszerben bármely merev test, (vagy tömegpont-rendszer) kinetikai vektorrendszere egyenértékű a merev testre (vagy tömegpont-rendszerre) ható külső erőrendszerrel: $(V_K) \stackrel{M}{=} (V_F)$.

	Impulzus tétel:	Perdülettétel:
S pont:	$\vec{K} = m\vec{a}_S = \vec{F}$,	$\vec{D}_S = \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times \vec{\Pi}_S = \vec{M}_S$,
A pont:	$\vec{K} = m\vec{a}_S = \vec{F}$,	$\vec{D}_A = \underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times \underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{\omega} + m\vec{r}_{AS} \times \vec{a}_A = \vec{M}_A$.

(122) *Ismertesse a mechanikai energia-tételt és a mechanikai munka-tételt!*

Energia-tétel: A rendszer kinetikai energiájának idő szerinti deriváltja (idő szerinti megváltozása) egyenlő a rendszerre ható külső és belső erők teljesítményével.

$\dot{E} = P_K + P_B = P$

Munka-tétel: A rendszer kinetikai energiájának $<t_1, t_2>$ idő intervallum alatti megváltozása egyenlő a rendszerre ható külső és belső erőknek a $<t_1, t_2>$ idő intervallum alatt végzett munkájával.

$E_2 - E_1 = W_{K_{12}} + W_{B_{12}} = W_{12}$