SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM
MŰSZAKI TUDOMÁNYI KAR

ALKALMAZOTT MECHANIKA
TANSZÉK

MECHANIKA - MOZGÁSTAN	Elméleti kérdések és válaszok egyetemi alapképzésben (BSc képzésben) résztvevő mérnökhallgatók számára

(1) Definiálja a kinematika fogalmát!

A kinematika a mozgás leírásával foglalkozik, de a mozgást kiváltó okokat (az erőhatásokat) nem vizsgálja.

(2) Definiálja a kinetika fogalmát!

A kinetika a mozgás okait, a mozgást létrehozó erőhatásokat vizsgálja, célja az okok ismeretében a mozgás meghatározása.

(3) Definiálja az anyagi pont fogalmát!

1. definíció: Anyagi tulajdonságokkal rendelkező geometriai pont.
2. definíció: Olyan test modell, amelynek helyzete (mozgása) egyetlen pontjának helyzetével (mozgásával) egyértelműen megadható.

(4) Definiálja a merev test fogalmát!

Olyan test modell, amelyben bármely két pont távolsága állandó - a pontok távolsága erőhatásra sem változik meg.

(5) Mi a szabadságfok?

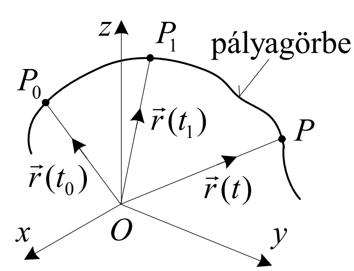
A test térbeli, vagy síkbeli helyzetét egyértelműen meghatározó, egymástól lineárisan független skaláris koordináták (skaláris paraméterek) száma.

(6) Adja meg a mozgásfüggvény (mozgástörvény) és anyagi pont pályájának (pályagörbéjének) definícióját!

A mozgásfüggvény az az $\vec{r} = \vec{r}(t)$ helyvektor-idő (vektor-skalár) függvény, amely az anyagi pont pillanatnyi helyzetét meghatározza.

1. def.: A pályagörbe az a térgörbe, amelyen a pont a mozgás során végighalad.

2. def.: Az $\vec{r} = \vec{r}(t)$ mozgásfüggvény által meghatározott térgörbe



(7) Definiálja egy térgörbe természetes koordináta-rendszerének irány egységvektorait!

$\vec{e}$ - az érintő irányú egységvektor: $\vec{e} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$, $|\vec{e}| = 1$.

$\vec{n}$ - a főnormális egységvektor: $\dfrac{d\vec{e}}{ds} = \kappa\vec{n} = \dfrac{1}{\rho}\vec{n}$, $|\vec{n}| = 1$.

$\vec{b}$ - a binormális egységvektor: $\vec{b} = \vec{e} \times \vec{n}$, $|\vec{b}| = 1$.

(8) Adja meg anyagi pont sebességfüggvényének, illetve pillanatnyi sebességvektorának értelmezését és írja le a pillanatnyi sebességvektor tulajdonságait!

A sebességfüggvény a mozgásfüggvény idő szerinti első deriváltja: $\vec{v}(t) = \dfrac{d\,\vec{r}(t)}{dt}$.

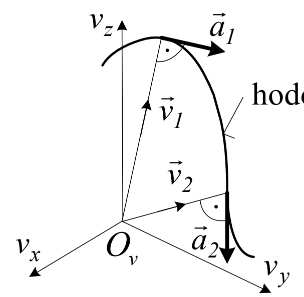
A pillanatnyi sebességvektor a sebességfüggvény egy adott időpillanatban felvett értéke: $\vec{v} = \vec{v}(t_1)$.

Tulajdonságai:
- a pillanatnyi sebesség vektor mennyiség,
- a pillanatnyi sebességvektor iránya megegyezik a pályagörbe érintőjének irányával.

(9) Mi a hodográf? Írja le a hodográf legfontosabb jellemzőjét!

1. def.: A hodográf az a görbe, amelyet anyagi pont $\vec{v} = \vec{v}(t)$ sebességvektorainak végpontja a v_x, v_y, v_z koordináta-rendszerben leír.
2. def.: A sebességvektorok végpontjai által meghatározott görbe, ha a sebességvektorokat egy közös kezdőpontból mérjük fel.

Legfontosabb jellemző: a hodográf görbe érintői a gyorsulásvektorok.

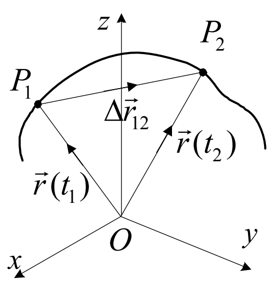


(10) Értelmezze anyagi pont pálya menti sebességét (pályasebességét) és írja le tulajdonságait!

A pálya menti sebesség a pályagörbe mentén mért ívkoordináta idő szerinti első deriváltja: $v(t) = \dfrac{d\,s(t)}{dt}$.

Tulajdonságai:
- a pályasebesség a sebességvektor érintő irányú koordinátája,
- a pályasebesség (előjeles) skalár mennyiség,
- a pályasebesség előjelét az s ívkoordináta irányítása dönti el.

(11) Adja meg anyagi pont közepes sebességének értelmezését!



A $< t_1\, t_2 >$ időintervallumra vonatkozó közepes sebesség:

$$\vec{v}_k = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}_{12}}{\Delta t_{12}} .$$

(12) Adja meg anyagi pont gyorsulásfüggvényét, illetve pillanatnyi gyorsulásvektorának értelmezését és írja le a pillanatnyi gyorsulásvektor tulajdonságait!

A gyorsulásfüggvény a sebességfüggvény idő szerinti első deriváltja, illetve mozgásfüggvény idő szerinti második deriváltja: $\vec{a}(t) = \dfrac{d\,\vec{v}(t)}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$.

A pillanatnyi gyorsulásvektor a gyorsulásfüggvény egy adott időpillanatban felvett értéke: $\vec{a} = \vec{a}(t_1)$.

Tulajdonságai:
- a pillanatnyi gyorsulás vektor mennyiség,
- a pillanatnyi gyorsulásvektor a pályagörbe simulósíkjába esik és a pályagörbe $\vec{e}$ érintője és $\vec{n}$ főnormálisa irányába eső összetevőkből áll: $\vec{a} = a_e\vec{e} + a_n\vec{n}$.

(13) Az $\vec{e},\vec{n},\vec{b}$ természetes koordináta-rendszerben adja meg anyagi pont gyorsulásvektora koordinátáinak elnevezését, kiszámítási módját és fizikai tartalmát!

Elnevezés	Kiszámítási mód	Fizikai tartalom
Pálya menti gyorsulás (pályagyorsulás):	$a_e = \dfrac{d\,v(t)}{dt} = \dfrac{d^2 s(t)}{dt^2}$.	A sebességvektor nagyságának változását jellemzi.
Normális gyorsulás:	$a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$.	A sebességvektor irányának változását jellemzi.

(14) Milyen függvényeket nevezünk foronómiai függvényeknek és milyen kapcsolatban állnak egymással?

Foromómiai függvényeknek az $s = s(t)$, $v = v(t)$, $a_e = a_e(t)$ pályamenti mozgásjellemzők időtől való függését megadó skalár-függvényeket nevezzük.

Összefüggés a foromómiai függvények között:

Ismert: $s=s(t)$

Meghatározandó: $v(t) = \dfrac{d\,s(t)}{dt}$,

$$a_e(t) = \frac{d\,v(t)}{dt} = \frac{d^2 s(t)}{dt^2}.$$

Ismert: $a_e=a_e(t)$, s_0, v_0

Meghatározandó: $v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a_e(t)dt$,

$$s(t) = s_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt.$$

(15) Adja meg anyagi pont egyenes vonalú mozgásának és a síkmozgásának definícióját!

Egyenes vonalú mozgás: a tömegpont pályájának nincs görbülete ($\kappa = 0$), azaz a görbületi sugár a pálya minden pontjában tart végtelenhez ($\rho \to \infty$).

Síkmozgás: ha az anyagi pont a mozgása során a $\vec{v}_0$ kezdősebesség és az $\vec{a}_0$ kezdőgyorsulás vektorok síkjából nem lép ki.

(16) Definiálja merev test sebességállapotát! Merev test sebességállapota milyen mennyiségekkel adható meg egyértelműen?

Merev test sebességállapota a testet alkotó pontok egy adott időpillanatbeli sebességvektorainak halmaza (összessége).

Megadás:
- a test $\vec{\omega}$ szögsebességével,
- a test egy adott A pontjának $\vec{v}_A$ sebességével.

(17) Definiálja merev test gyorsulásállapotát! Merev test gyorsulásállapota milyen mennyiségekkel adható meg egyértelműen?

Merev test gyorsulásállapota a testet alkotó pontok egy adott időpillanatbeli gyorsulásainak halmaza (összessége).

Megadás:
- a test $\vec{\varepsilon}$ szöggyorsulásával,
- a test $\vec{\omega}$ szögsebességével,
- a test egy adott A pontjának $\vec{a}_A$ gyorsulásával.

(18) Definiálja merev test haladó és forgó mozgását!

Haladó mozgás: A test minden pontjának azonos az elmozdulása, a test önmagával párhuzamosan mozdul el.

Forgó mozgás: A test pontjai a test két nyugalomban levő pontja által meghatározott tengely , a forgástengely körül koncentrikus köríveken mozdulnak el.

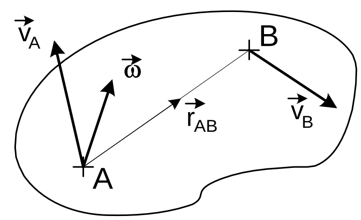
(19) Definiálja merev test elemi és véges mozgását!

Elemi mozgás: A test végtelenül rövid idő alatt végbemenő (egy adott időpillanatban bekövetkező) mozgása.

Véges mozgás: A test hosszabb időtartam alatt végbemenő mozgása.

(20) Adja meg egy adott időpillanatban a merev test két pontjának sebességvektora közötti összefüggést!

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} \ ,$$



$\vec{\omega}$ - a test szögsebessége,
$\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ - az *A* és *B* pontok sebessége,
$\vec{r}_{AB}$ - az *A*-ból *B*-be mutató helyvektor.

(21) Hogyan osztályozhatók merev test elemi mozgásai?

(1.)	$\vec{\omega} = \vec{0}$	(a)	$\vec{v}_A = \vec{0}$	- elemi nyugalom,
		(b)	$\vec{v}_A \neq \vec{0}$	- elemi haladó mozgás,
(2.)	$\vec{\omega} \neq \vec{0}$	(a)	$\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A = 0$	- elemi forgómozgás,
		(b)	$\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A \neq 0$	- elemi csavarmozgás.

(22) Definiálja merev test P sebesség- és Q gyorsuláspólusát!

A sebességpólus a testnek az a *P* pontja, amelynek zérus a sebessége.

A gyorsuláspólus a testnek az a *Q* pontja, amelynek zérus a gyorsulása.

(23) Adja meg merev test síkmozgása esetén a sebességábra definícióját és írja le a sebességábrára vonatkozó tételt

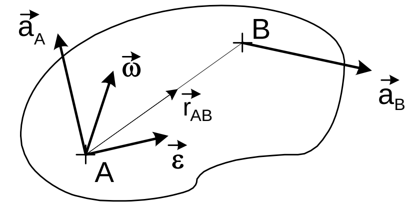
Síkmozgás sebességábráját úgy kapjuk meg, ha egy adott időpillanatban közös kezdőpontból felrajzoljuk a test jellemző pontjainak sebességvektorait.

Tétel: A sebességábra hasonló a helyzetábrához, de a helyzetábrához képest a szögsebesség irányában 90°-kal el van forgatva.

(24) Adja meg egy adott időpillanatban a merev test két pontjának gyorsulásvektora vektora közötti összefüggést általánosan (térbeli mozgás) és síkmozgás esetén!

Térbeli mozgás:

$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB})$,



Síkmozgás: (ha a mozgás síkja az *xy* sík)

$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \varepsilon \vec{k} \times \vec{r}_{AB} - \omega^2 \vec{r}_{AB}$,

$\vec{\varepsilon}$ - a test szöggyorsulása, $\vec{\omega}$ - a test szögsebessége,

$\vec{a}_A$, $\vec{a}_B$ - az *A* és *B* pont gyorsulása,

$\vec{r}_{AB}$ - az *A*-ból *B*-be mutató helyvektor.

(25) Adja meg merev test síkmozgása esetén a gyorsulásábra definícióját és írja le a gyorsulásábrára vonatkozó tételt

Síkmozgás gyorsulásábráját úgy kapjuk meg, ha egy adott időpillanatban közös kezdőpontból felrajzoljuk a test jellemző pontjainak gyorsulásvektorait.

Tétel: A gyorsulásábra hasonló a helyzetábrához, de a helyzetábrához képest a szöggyorsulás irányában $(180^{\circ} - \varphi)$ szöggel el van forgatva. A φ szög a merev test szöggyorsulása és szögsebessége ismeretében meghatározható: $tg\varphi = \varepsilon/\omega^2$.

(26) Adja meg merev test tiszta gördülő mozgásának definícióját és a definíció következményét!

Tiszta gördülés esetén a merev test talajjal érintkező pontjának a pillanatnyi sebessége nulla.

Következmény: Az érintkezési pont a merev test pillanatnyi sebességpólusa.

(27) Mikor beszélünk relatív mozgásról?

Relatív mozgásról abban az esetben beszélünk, ha egy test (vagy anyagi pont) mozgásjellemzőit két egymáshoz képest mozgó koordináta-rendszerben akarjuk meghatározni.

(28) Mit nevezünk abszolút sebességnek és gyorsulásnak, illetve relatív sebességnek és gyorsulásnak?

Abszolút sebességnek és gyorsulásnak nevezzük egy térben mozgó anyagi pont sebességét és gyorsulását az álló koordináta-rendszerhez képest.

Relatív sebességnek és gyorsulásnak nevezzük egy térben mozgó anyagi pont sebességét és gyorsulását a mozgó koordináta-rendszerhez képest.

(29) Milyen összefüggés áll fenn anyagi pont abszolút és relatív sebessége között? Adja meg az összefüggésben szereplő mennyiségek jelentését és kiszámítási módját!

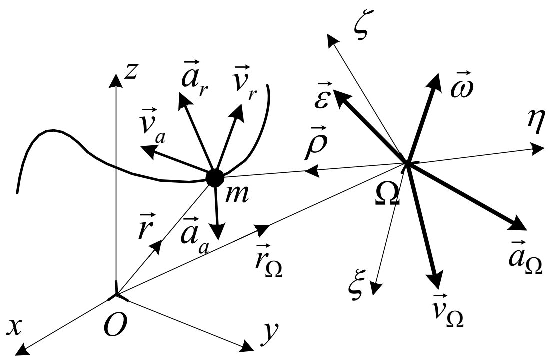
$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_{sz}$

$\vec{v}_a$ - a tömegpont sebessége az álló koordináta-rendszerben,

$\vec{v}_r$ - a tömegpont sebessége a mozgó koordináta-rendszerben,

$\vec{v}_{sz} = \vec{v}_\Omega + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$.

A $\vec{v}_{sz}$ szállítósebesség a mozgó koordináta-rendszer azon pontjának a sebessége az álló koordináta-rendszerben, amelyben az anyagi pont a vizsgált időpillanatban tartózkodik.



(30) Milyen összefüggés áll fenn anyagi pont abszolút és relatív gyorsulása között? Adja meg az összefüggésben szereplő mennyiségek jelentését és kiszámítási módját!

$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_{sz} + \vec{a}_c$,

$\vec{a}_a$ - a tömegpont gyorsulása az álló koordináta-rendszerben,

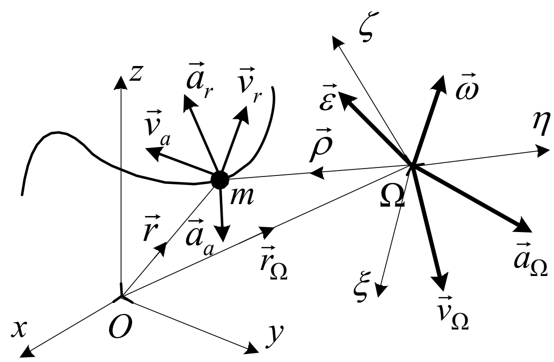
$\vec{a}_r$ - a tömegpont gyorsulása a mozgó koordináta-rendszerben,

$\vec{a}_{sz} = \vec{a}_\Omega + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$.

Az $\vec{a}_{sz}$ szállítógyorsulás a mozgó koordináta-rendszer azon pontjának a gyorsulása az álló koordinátarendszerben, amelyben az anyagi pont tartózkodik.

$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$.

A *Coriolis* gyorsulás akkor lép fel, ha $\vec{\omega} \neq \vec{0}$, $\vec{v}_r \neq \vec{0}$ és $\vec{\omega}$ nem $\parallel \vec{v}_r$.



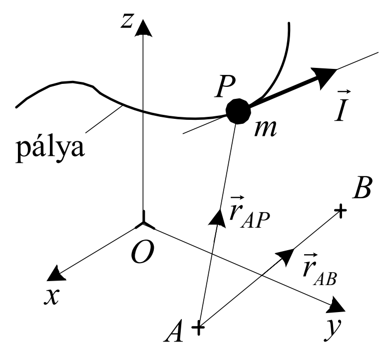
(31) Definiálja anyagi pont impulzusát (lendületét) és perdületét (impulzusnyomatékát)!

Anyagi pont impulzusa egyenlő az anyagi pont tömegének és sebességének szorzatával:

$$\vec{I} = m\vec{v} .$$

Anyagi pont álló *A* pontra számított perdülete egyenlő az anyagi pont impulzusának *A* pontra számított nyomatékával:

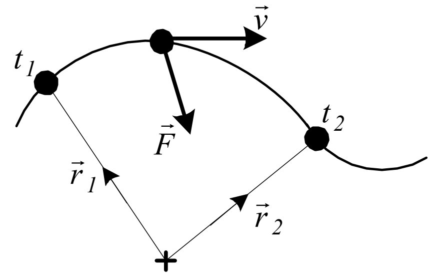
$$\vec{\pi}_A = \vec{r}_{AP} \times \vec{I} .$$



(32) Definiálja anyagi pont kinetikai energiáját és az anyagi pontra ható erő teljesítményét és munkáját!

Anyagi pont kinetikai energiája egyenlő az anyagi pontra tömegének és sebessége négyzete szorzatának felével:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 .$$



Anyagi pontra ható erő teljesítménye egyenlő az erő és az anyagi pont sebességének skaláris szorzatával:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} .$$

Anyagi pontra ható erő $<t_1\ t_2>$ időtartam alatt végzett munkája egyenlő az erő teljesítményének a t_1 és t_2 határok között vett idő szerinti integráljával:

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} P\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \underbrace{\vec{v}\, dt}_{d\vec{r}} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \ .$$

(33) Ismertesse Newton I. törvényét!

Minden test megmarad nyugvó, vagy egyenes vonalú egyenletesen mozgó állapotában, amíg valamely rá ható erő állapotának megváltoztatására nem kényszeríti.

(34) Ismertesse Newton II. törvényét általánosan és a műszaki gyakorlatban szokásos alakban!

Általánosan: Anyagi pont impulzusának idő szerinti megváltozása egyenlő az anyagi pontra ható erők eredőjével: $\dot{\vec{I}} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}$.

Műszaki gyakorlatban szokásos alak (m = áll.): $m\vec{a} = \vec{F}$.

(35) Ismertesse Newton III. törvényét!

Két test egymásra gyakorolt hatásának nagysága mindig egyenlő és a hatások iránya mindig ellentétes: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

(36) Ismertesse a D'Alembert elvet!

A mozgástani (kinetikai) feladatok tehetetlenségi (inercia) erő bevezetésével statikai feladatokra vezethetők vissza:

$$\vec{0} = -m\vec{a} + \vec{F} = \vec{T} + \vec{F} \ ,$$

$\vec{T}$ - tehetetlenségi erő, $\vec{F}$ - a külső erők eredője.

(37) Írja fel anyagi pontra a pedülettétel differenciális és integrál alakját!

Differenciális alak: $\dot{\vec{\pi}}_A = \vec{M}_A$.

Anyagi pont álló pontra számított perdületének idő szerinti első deriváltja egyenlő az anyagi pontra ható erőnek ugyanarra a pontra számított nyomatékával.

Integrál alak: $\vec{\pi}_A(t_2) - \vec{\pi}_A(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_A dt$.

Álló pontra számított perdület $<t_1\ t_2>$ időtartam alatti megváltozása egyenlő az anyagi pontra ható erő ugyanarra az álló pontra számított nyomatékának $t_1 - t_2$ határok közötti idő szerinti integráljával.

(38) Írja fel anyagi pontra az energiatételt és a munkatételt!

Energiatétel: $\dot{E} = P$.

Anyagi pont kinetikai energiájának idő szerinti deriváltja egyenlő az anyagi pontra ható erők teljesítményével.

Munkatétel: $E_2 - E_1 = W_{12}$.

Anyagi pont kinetikai energiájának $<t_1\ t_2>$ időtartam alatti megváltozása egyenlő az anyagi pontra ható erők $<t_1\ t_2>$ időtartam alatt végzett munkájával.

(39) Adja meg a konzervatív erőrendszer definícióját! Mitől függ a konzervatív erőtérben végzett munka?

Konzervatív erőrendszerről (erőtérről) beszélünk abban az esetben, ha létezik egy olyan $U = U(\vec{r})$ potenciál (skalár függvény), amelyből az erő negatív gradiens képzéssel származtatható: $\vec{F} = -\dfrac{dU}{d\,\vec{r}} = -grad\,U$.

A konzervatív erőtérben végzett munka csak a kezdő és végső helyzettől függ; értéke egyenlő az $U = U(\vec{r})$ potenciál kezdő és végpontban felvett értékének különbségével: $W_{12} = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2)$.

(40) Ismertesse a mechanikai energia megmaradásának tételét!

Konzervatív erőtérben a mozgás során a kinetikai és helyzeti (potenciális) energiák összege állandó: $E+U =$ állandó.

(41) Definiálja a szabad- és kényszermozgást!

Szabad mozgásról abban az esetben beszélünk, ha az általunk vizsgált test mozgását más testek nem akadályozzák.

Kényszermozgásról abban az esetben beszélünk, ha az általunk vizsgált test mozgását más testek előírt geometriai feltételeknek megfelelően korlátozzák.

(42) Milyen kényszererő lép fel sima, illetve érdes kényszer esetén?

Sima kényszer esetén a kényszererő merőleges az érintkező felületekre.

Érdes kényszer esetén a kényszererő normális és tangenciális koordinátája között a *Coulomb*–féle súrlódási törvény teremt kapcsolatot.

(43) Mikor lép fel mozgásbeli súrlódás? Írja le a Coulomb-féle súrlódási törvényt mozgásbeli súrlódás esetén!

Mozgásbeli súrlódásról beszélünk, ha a testek érintkezési pontjában van egymáshoz képest érintő irányú (tangenciális) elmozdulás.

Coulomb-féle súrlódási törvény: A kényszererő tangenciális koordinátájának nagysága a normális koordináta μ-szöröse, iránya pedig ellentétes a sebesség irányával. (μ - a mozgásbeli súrlódási tényező.)

Az érintő irányú erő összetevő: $\vec{F}_S = -\mu F_N \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$.

Az érintő irányú erő koordináta: $F_S = -\mu F_N$.

(44) Adja meg az inercia-rendszer és a nem inercia-rendszer definícióját!

Az inercia-rendszer olyan koordináta-rendszer, amelyben a mozgás más testek kölcsönhatásával, azaz kizárólag külső erők figyelembevételével megmagyarázható.

A nem inercia-rendszer olyan koordináta-rendszer, amelyben a mozgás leírásához a külső erők mellett még járulékos erőket is figyelembe kell venni.

(45) Írja fel a kinetika alaptörvényét anyagi pontra nem inercia-rendszerben és adja meg a törvényben szereplő mennyiségek jelentését !

$\vec{F}_a + \vec{F}_{sz} + \vec{F}_c = \vec{F}_r$.

Az álló koordináta-rendszerben működő erő:

$\vec{F}_a = m\vec{a}_a$.

A mozgó koordináta-rendszerben működő erő:

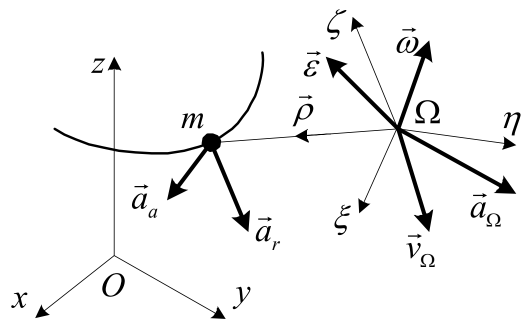
$\vec{F}_r = m\vec{a}_r$.

A szállító erő:

$\vec{F}_{sz} = -m\vec{a}_{sz} = -m\left[\vec{a}_\Omega + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{\rho}\right)\right]$.

A Coriolis erő:

$\vec{F}_c = -m\vec{a}_c = -2m\left(\vec{\omega} \times \vec{v}_r\right)$.



(46) Írja le a kontinuum, a homogén tömegeloszlású test és a diszkrét tömegeloszlású test és definícióját!

Kontinuum: olyan test, amelynek anyaga a test térfogatát folytonosan tölti ki.

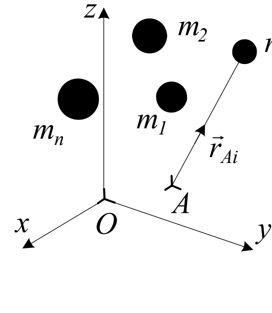
Homogén tömegeloszlású test: olyan test (kontinuum), amelynek tömegsűrűsége állandó, nem függ a helytől.

Diszkrét tömegeloszlású test: olyan test, amely elhanyagolható tömegű merev vázszerkezet meghatározott pontjaihoz rögzített anyagi pontokból áll.

(47) Adja meg diszkrét tömegeloszlású test és kontinuum pontra számított statikai nyomatékának definícióját, valamint a két különböző pontra számított statikai nyomaték közötti összefüggést!

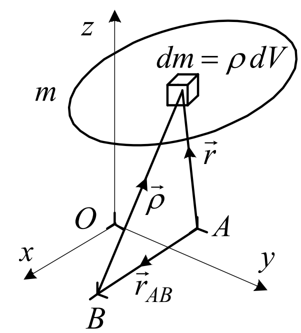
Diszkrét tömegeloszlású test A pontra számított statikai nyomatéka:

$\vec{S}_A = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{Ai} m_i$.



Kontinuum A pontra számított statikai nyomatéka:
$$\vec{S}_A = \int_{(m)} \vec{r}\, dm = \int_{(V)} \vec{r} \rho\, dV \,.$$

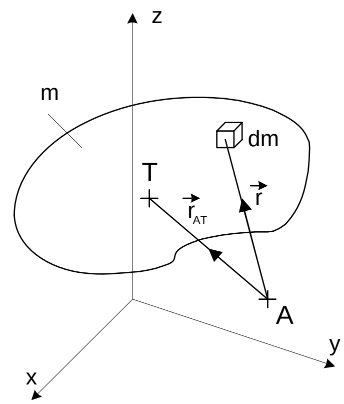
Az átszámító összefüggés:
$$\vec{S}_B = \vec{S}_A - m\,\vec{r}_{AB} \,.$$



(48) Adja meg merev test tömegközéppontjának definícióját és a tömegközéppont helyvektorának kiszámítására szolgáló összefüggést!

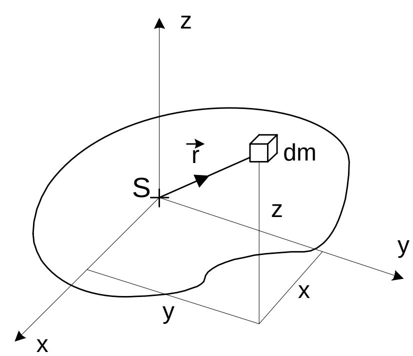
A tömegközéppont a testnek az a T pontja, amelyre számított statikai (lineáris) nyomaték zérus: $\vec{S}_T = \vec{0}$.

A tömegközéppont helyvektora:
$$\vec{r}_{AT} = \frac{\vec{S}_A}{m} = \frac{\int_{(V)} \vec{r} \rho\, dV}{m} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_{Ai}}{m} \,.$$



(49) Adja meg merev test S ponti x, y, z tengelyére és a tengelyek által meghatározott síkpárokra számított tehetetlenségi nyomatékok értelmezését!

Tengelyre számított:	Síkpárra számított:
$J_x = \int_{(m)} \left(y^2 + z^2\right) dm$,	$J_{xy} = \int_{(m)} xy\, dm$,
$J_y = \int_{(m)} \left(x^2 + z^2\right) dm$,	$J_{xz} = \int_{(m)} xz\, dm$,
$J_z = \int_{(m)} \left(x^2 + y^2\right) dm$,	$J_{yz} = \int_{(m)} yz\, dm$.



(50) Írja fel folytonos tömegeloszlású test súlyponti tehetetlenségi tenzorát és adja meg a tehetetlenségi tenzor legfontosabb tulajdonságát!

A súlyponti tehetetlenségi tenzor: $\left[\underline{\underline{J}}_S\right] = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix}$.

Tulajdonság: szimmetrikus tenzor.

(51) Hogyan számíthatók ki a $\underline{\underline{J}}_S$ súlyponti tehetetlenségi tenzor és az $\vec{n}$ és $\vec{m}$ irány egységvektorok ismeretében a J_n és J_{nm} tehetetlenségi nyomaték?

$$J_n = \vec{n} \cdot \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{n}\,, \qquad J_{nm} = J_{mn} = -\vec{n} \cdot \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{m} = -\vec{m} \cdot \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{n}\,.$$

(52) Értelmezze test tehetetlenségi főirányait és fő tehetetlenségi nyomatékait!

Ha teljesülnek az alábbi feltételek:

$$\underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{e}_1 = J_1\vec{e}_1\,, \quad \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{e}_2 = J_2\vec{e}_2\,, \quad \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{e}_3 = J_3\vec{e}_3\,,$$

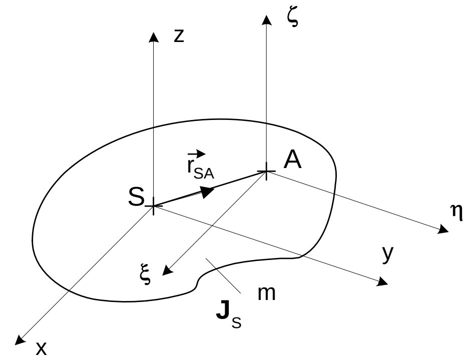
akkor az $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ irány (tengely) tehetetlenségi főirány (főtengely) és

a $J_1,\ J_2,\ J_3$ skalár számok, fő tehetetlenségi nyomatékok.

(53) Írja fel a Steiner-tételt és készítsen magyarázó ábrát!

Steiner tétel:

$$J_\xi = J_x + m\left(y_{SA}^2 + z_{SA}^2\right), \quad J_{\xi\eta} = J_{xy} + m x_{SA} y_{SA}\,,$$
$$J_\eta = J_y + m\left(x_{SA}^2 + z_{SA}^2\right), \quad J_{\xi\zeta} = J_{xz} + m x_{SA} z_{SA}\,,$$
$$J_\zeta = J_z + m\left(y_{SA}^2 + x_{SA}^2\right), \quad J_{\eta\zeta} = J_{yz} + m z_{SA} y_{SA}\,.$$



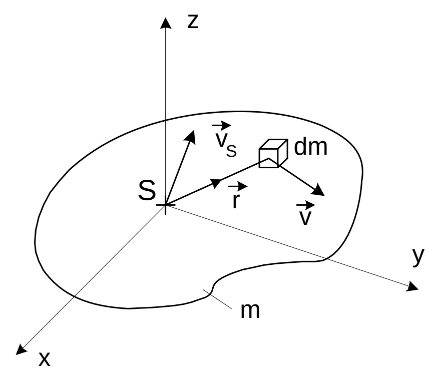
(54) Írja le homogén tömegeloszlású test esetén a tehetetlenségi főirányok és szimmetria-tulajdonságok közötti kapcsolatot!

- Ha a testnek egy szimmetriasíkja van, akkor a szimmetriasíkra merőleges *S* ponti tengely tehetetlenségi főtengely.
- Ha a testnek két szimmetriasíkja van, akkor e síkok metszésvonala tehetetlenségi főtengely.
- Három egymásra merőleges szimmetriasík metszésvonalai tehetetlenségi főtengelyek.
- Tengelyszimmetria esetén a szimmetriatengely és a rá merőleges síkban levő valamennyi tengely tehetetlenségi főtengely.

(55) Adja meg merev test impulzusának értelmezését és a kiszámítására szolgáló összefüggést!

Értelmezés: $\vec{I} = \int\limits_{(m)} \vec{v}\, dm$.

Kiszámítás: $\vec{I} = m\vec{v}_S$.

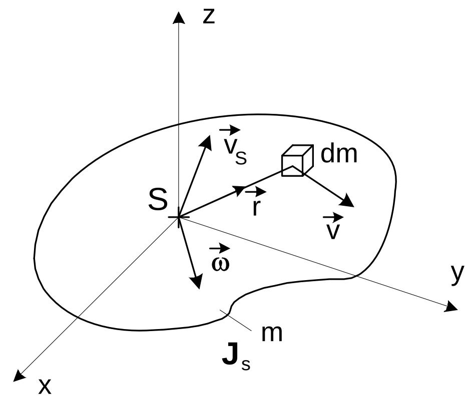


(56) Adja meg merev test S pontra számított perdületének (impulzusnyomatékának) értelmezését és a kiszámítására szolgáló összefüggést!

Értelmezés: $\vec{\pi}_S = \int\limits_{(m)} \vec{r} \times \vec{v}\, dm$.

Kiszámítás:

$\vec{\pi}_S = \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{\omega}$, ahol $\underline{\underline{J}}_S = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix}$.

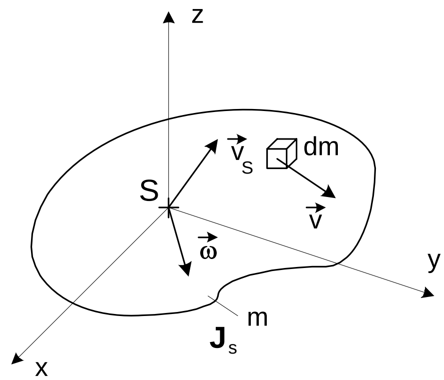


(57) Adja meg merev test kinetikai energiájának értelmezését és a kiszámítására szolgáló összefüggést!

Értelmezés: $E = \frac{1}{2} \int\limits_{(m)} v^2 dm$.

Kiszámítás:

$E = \frac{1}{2}\left(\vec{v}_S \cdot \vec{I} + \vec{\omega} \cdot \vec{\pi}_S\right) = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{\omega}$.



(58) Hogyan számítható ki merev testre ható erőrendszer teljesítménye az ER redukált vektorkettősével, illetve az ER-t alkotó erőkkel és nyomatékokkal?

- Az ER redukált vektorkettősével: $P = \vec{F} \cdot \vec{v}_S + \vec{M}_S \cdot \vec{\omega}$.

$\vec{F}$, $\vec{M}_S$ - a testre ható erőrendszer S pontba redukált vektorkettőse,

$\vec{\omega}$, $\vec{v}_S$ - a test szögsebessége és S pontjának sebessége.

- Az ER-t alkotó erőkkel és nyomatékokkal: $P = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \sum_{j=1}^{m} \vec{M}_j \cdot \vec{\omega}_j$.

n – az ER-hez tartozó koncentrált erők száma,

m - az ER-hez tartozó koncentrált nyomatékok száma,

$\vec{v}_i$ - az $\vec{F}_i$ koncentrált erő támadáspontjának sebessége,

$\vec{\omega}_j$ - annak a merev testnek a szögsebessége, amelyre az $\vec{M}_j$ koncentrált nyomaték hat.

(59) Írja fel merev test esetén az impulzustétel és a S ponti perdülettétel differenciális alakját és adja meg az összefüggésekben szereplő mennyiségek jelentését!

Az impulzus tétel differenciális alakja: $\dot{\vec{I}} = \vec{F}$, vagy $m\vec{a}_S = \vec{F}$, ahol

$\dot{\vec{I}}$ - a test impulzusának idő szerinti deriváltja,

$\vec{F}$ - a testre ható külső erők eredője,

m - a test tömege, $\vec{a}_S$ - a test S pontjának gyorsulása.

A perdülettétel differenciális alakja az S pontra: $\dot{\vec{\pi}}_S = \vec{M}_S$, vagy $\underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times \vec{\pi}_S = \vec{M}_S$, ahol

$\dot{\vec{\pi}}_S$ - a test S pontra számított perdületének idő szerinti deriváltja,

$\vec{M}_S$ - a testre ható külső erők S pontra számított nyomatéka,

$\underline{\underline{J}}_S$ - a test S ponti tehetetlenségi tenzora,

$\vec{\varepsilon}$ - a test szöggyorsulása, $\vec{\omega}$ - a test szögsebessége.

(60) Írja fel merev test esetén az impulzustétel és a S ponti perdülettétel integrál alakját és adja meg az összefüggésekben szereplő mennyiségek jelentését!

Impulzus tétel integrál alakja: $\Delta\vec{I} = \vec{I}(t_2) - \vec{I}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt$, ahol

$\vec{I}(t_1)$ - a test impulzusa a t_1 időpillanatban,

$\vec{F}(t)$ - a testre ható külső erők eredője.

Perdülettétel integrál alakja az S pontra: $\Delta\vec{\pi}_S = \vec{\pi}_S(t_2) - \vec{\pi}_S(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_S(t)\,dt$, ahol

$\vec{\pi}_S(t_1)$ - a test S pontra számított perdület a t_1 időpillanatban,

$\vec{M}_S(t)$ - a testre ható külső erők S pontra számított nyomatéka.

(61) Írja fel merev test tetszőleges A pontjára felírt perdülettétel differenciális alakját és adja meg az összefüggésekben szereplő mennyiségek jelentését!

$$\underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times \left(\underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{\omega}\right) + \vec{r}_{AS} \times m\vec{a}_A = \vec{M}_A \text{, ahol}$$

$\underline{\underline{J}}_A$ - a test A ponti tehetetlenségi tenzora,

$\vec{\varepsilon}$ - a test szöggyorsulása, $\vec{\omega}$ - a test szögsebessége,

m - a test tömege, $\vec{a}_A$ - a test A pontjának gyorsulása,

$\vec{M}_A$ - a testre ható külső erők A pontra számított nyomatéka.

(62) Ismertesse merev test esetén az energia- és munkatételt!

Energiatétel: Merev test mozgási energiájának idő szerinti deriváltja (idő szerinti megváltozása) egyenlő a testre ható külső erőrendszer teljesítményével:

$$\dot{E} = P.$$

Munkatétel: A test véges mozgása során a merev test kinetikai energiájának megváltozása egyenlő a testre ható külső erőrendszer ugyanazon mozgás során végzett munkájával:

$$E_2 - E_1 = W_{12}.$$

(63) Mikor nevezünk egy rögzített tengely körül forgó testet statikusan és dinamikusan kiegyensúlyozottnak ?

Statikusan kiegyensúlyozottnak nevezünk egy rögzített tengely körül forgó merev testet, ha test S pontja a forgástengelyre esik.

Dinamikusan kiegyensúlyozottnak nevezünk egy rögzített tengely körül forgó merev testet, ha a forgástengely a test tehetetlenségi főtengelye.

(64) Milyen feltételezések mellett vizsgáltuk testek ütközését ?

- az ütköző testek valamilyen mértékben rugalmasak,
- az ütközés igen rövid idő alatt történik,
- a rövid ideig tartó érintkezés alatt a testek helyzetében nem következik be változás,
- az ütközés következtében fellépő erők mellett a többi erő elhanyagolhatóan kicsi,
- az érintkező felületek simák (nincs súrlódás).

(65) Milyen esetben beszélünk centrikus és excentrikus ütközésről, valamint centrikus egyenes és centrikus ferde ütközésről ?

Centrikus ütközés: az ütközési normális átmegy mindkét test súlypontján.

Centrikus egyenes ütközés: a testek S ponti sebességei ütközési normális irányúak.

Centrikus ferde ütközés: a testek S ponti sebességei nem ütközési normális irányúak.

Excentrikus ütközés: az ütközési normális nem megy át mindkét test súlypontján

(66) Adja meg centrikus ütközés esetén az ütközési tényező definícióját!

Az eltávolodási szakaszban bekövetkező impulzus-változás és a közeledési szakaszban bekövetkező impulzus-változás hányadosa:

$$k = \frac{m_1\left(V_{S1n} - v_{Sn}\right)}{m_1\left(v_{Sn} - v_{S1n}\right)} = \frac{m_2\left(V_{S2n} - v_{Sn}\right)}{m_2\left(v_{Sn} - v_{S2n}\right)}.$$

(67) Adja meg az egyszerű szerkezet és az összetett szerkezet definícióját!

Egyszerű szerkezet: a vizsgált rendszer (szerkezet) egy merev testet tartalmaz.

Összetett szerkezet: a vizsgált rendszer (szerkezet) több merev testet tartalmaz.

(68) Adja meg a q(t) általános koordináta definícióját és legfontosabb tulajdonságait!

Általános koordináta: azok a $q(t)$ skaláris paraméterek (koordináták), amelyek a rendszer helyzetét, vagy mozgását egyértelműen meghatározzák.

Tulajdonságok:
- az általános koordináta elmozdulás, vagy szögelfordulás is lehet.
- az általános koordináta az időnek legalább kétszer differenciálható függvénye (létezik $\ddot{q}$).

(69) Adja meg az ideális kötél tulajdonságait!

- súlytalan és nyújthatatlan,
- tökéletesen hajlékony (a hajlítással szemben nincs ellenállása – nem lép fel benne hajlító nyomaték),
- csak húzóerőt képes felvenni (nem léphet fel benne nyomóerő).