

Kontinuummechanika
(óravázlat)

Készítette: Dr. Pere Balázs

Széchenyi István Egyetem
Alkalmazott Mechanika Tanszék

2011. augusztus 20.

Copyright ©2011 Dr. Pere Balázs. Minden jog fenntartva.

Ez a dokumentum szabadon másolható és terjeszthető. Módosítása és kereskedelmi forgalomba kerülése csak a szerző írásbeli engedélyével lehetséges. (e-mail: perebal@sze.hu)

Tartalomjegyzék

Jelölések	5
1. Kinematika	7
1.1. Anyagi pont és test helyzetének megadása	7
1.2. Elemi vonalszakasz, felület és térfogat alakváltozása	12
1.2.1. Elemi vonalszakasz megváltozása	12
1.2.2. Elemi felület megváltozása	16
1.2.3. Elemi térfogat megváltozása	18
1.3. A deformáció gradiens poláris felbontása	20
1.3.1. A deformáció gradiens VR poláris felbontása	22
1.3.2. A deformáció gradiens RU poláris felbontása	26
1.3.3. A nyújtó tenzorok sajátértékei és sajátvektorai közötti összefüggések	29
1.4. Alakváltozási tenzorok	30
1.4.1. Jobboldali Cauchy-Green alakváltozási tenzor	31
1.4.2. Green-Lagrange alakváltozási tenzor	32
1.4.3. További kezdeti konfigurációban értelmezett alakváltozási tenzorok	33
1.4.4. Baloldali Cauchy-Green alakváltozási tenzor	35
1.4.5. Euler-Almansi alakváltozási tenzor	36
1.4.6. További pillanatnyi konfigurációban értelmezett alakváltozási tenzorok	38
1.5. Alakváltozási tenzorok deviátoros felbontása	39
1.6. Merev test szerű elmozdulás és objektivitás	43
1.7. Időben változó alakváltozási mennyiségek	43
1.7.1. Sebességmező	43
1.7.2. Matriális idő szerinti deriválás	43
1.7.3. Sebesség gradiens tenzor	43
1.7.4. Alakváltozási sebesség	43
1.7.5. Forgástenzor	43
1.8. Alakváltozási tenzorok idő szerinti objektív deriváltjai	43
2. Dinamika	43
2.1. Tömegmegmaradás	43
2.1.1. Tömeg	43
2.1.2. Tömeg-mérlegegyenlet	43
2.1.3. Integrálok idő szerinti deriváltja	43
2.2. Impulzus-tétel	43
2.2.1. Impulzus	43
2.2.2. Impulzus-tétel integrál alakja	43
2.2.3. Belső erők	43
2.2.4. Cauchy-féle feszültség tenzor	43
2.2.5. Impulzus-tétel differenciális alakja	43
2.3. Perdület-tétel	43
2.3.1. Perdület	43
2.3.2. Perdület-tétel integrál alakja	43
2.3.3. Perdület-tétel differenciális alakja	43
2.4. Energia-tétel, avagy a hőtan első főtétele	43
2.4.1. Energia	43
2.4.2. Energia-tétel integrál alakja	43
2.4.3. Celluláris (lokális) egyensúly, avagy az energia-tétel differenciális alakja	43
2.4.4. Belső energia	43
2.5. Entrópia-tétel, avagy a hőtan második főtétele	43
2.5.1. Reverzibilis, irreverzibilis folyamatok	43
2.5.2. Entrópia	43
2.5.3. Entrópia-tétel integrál alakja	43
2.5.4. Entrópia-tétel differenciális alakja	43
2.5.5. Clausius-Planck-egyenlőtlenség	43

2.6.	Feszültség tenzorok	43
2.6.1.	Kirchhoff-féle feszültség	43
2.6.2.	I. Piola-Kirchhoff-féle feszültség	43
2.6.3.	Impulzus-tétel a kezdeti konfigurációban	43
2.6.4.	II. Piola-Kirchhoff-féle feszültség	43
2.6.5.	Biot-féle feszültség	43
2.7.	Helmholtz-féle szabadenergia	43
2.7.1.	Clausius-Duhem-egyenlőtlenség	43
2.7.2.	Belső paraméterek	43
2.7.3.	A hővezetés egyenlete	43
2.7.4.	A szabadenergia függvény általános szerkezete	43
3.	Anyagszerkezeti viselkedés	43
3.1.	Általános elvek????	43
3.2.	Egyszerű anyagmodellek	44
3.2.1.	Tisztán rugalmas elem	44
3.2.2.	Tisztán viszkózus elem	44
3.2.3.	Tisztán képlékeny elem????	44
3.3.	Összetett anyagmodellek	44
3.3.1.	Kelvin-Voigt modell	44
3.3.2.	Maxwell-modell	44
3.3.3.	Vegyes modell	44
3.4.	Anyagtörvények	44
3.4.1.	Objektivitás	44
	Tárgymutató	46
	Függelék	48
A.	Tenzoralgebra	48
A.1.	Vektorok	48
A.2.	Tenzorok	48
A.2.1.	Tenzorok szorzatainak determinánsa	48
A.3.	Harmadrendű tenzorok	48
A.4.	Negyedrendű tenzorok	48

Jelölések

$\underline{\underline{a}}$	Euler-Almansi alakváltozási tenzor
$\underline{\underline{B}}$	Piola-féle alakváltozási tenzor
$\underline{\underline{b}}$	baloldali Cauchy-Green alakváltozási tenzor
$\tilde{\underline{\underline{b}}}$	a $\underline{\underline{b}}$ tenzor torzításos vagy deviátoros része
$\underline{\underline{C}}$	jobboldali Cauchy-Green alakváltozási tenzor
$\underline{\underline{c}}$	Cauchy-féle alakváltozási tenzor
$\tilde{\underline{\underline{C}}}$	a $\underline{\underline{C}}$ tenzor torzításos vagy deviátoros része
$\vec{\chi}$	vektor-vektor függvény, a \vec{r} és \vec{R} között teremt kapcsolatot
δ_i^j	Kronecker-szimbólum
$d\vec{A}$	elemi felület a kezdeti konfigurációban
$d\vec{a}$	elemi felület a pillanatnyi konfigurációban
dV	elemi térfogat a kezdeti konfigurációban
dv	elemi térfogat a pillanatnyi konfigurációban
$\underline{\underline{E}}$	Green-Lagrange alakváltozási tenzor
$\underline{\underline{e}}$	Euler-Almansi alakváltozási tenzor
$\underline{\underline{E}}^{(n)}$	általános Lagrange-féle alakváltozási tenzor
$\underline{\underline{e}}^{(n)}$	általános Euler-féle alakváltozási tenzor
$\varepsilon_{ijk}, \varepsilon^{ijk}$	Levi-Civita-szimbólum
\vec{E}	egységvektor a kezdeti konfigurációban
\vec{e}	egységvektor a pillanatnyi konfigurációban
\vec{E}_I	tenzor i -edik sajátvektora a kezdeti konfigurációban
\vec{e}_i	tenzor i -edik sajátvektora a pillanatnyi konfigurációban
$\phi(\dots)$	előretolás művelet
$\phi^{-1}(\dots)$	visszahúzás művelet
$\underline{\underline{F}}$	deformáció gradiens
Γ_{IJ}^K	Christoffel-szimbólum a kezdeti konfigurációban
Γ_{ij}^k	Christoffel-szimbólum a pillanatnyi konfigurációban
\vec{G}^i	kovariáns bázisvektor a kezdeti konfigurációban
\vec{g}^i	kovariáns bázisvektor a pillanatnyi konfigurációban
\vec{G}_i	kontravariáns bázisvektor a kezdeti konfigurációban
\vec{g}_i	kontravariáns bázisvektor a pillanatnyi konfigurációban
$\underline{\underline{H}}$	kezdeti konfigurációban értelmezett Hencky-féle alakváltozási tenzor
$\underline{\underline{h}}$	pillanatnyi konfigurációban értelmezett Hencky-féle alakváltozási tenzor

\underline{I}	egységtenzor
J	Jacobi-determináns, az \underline{F} deformáció gradiens determinánsa
\underline{J}_b	a \underline{b} tenzor tisztán térfogatváltozást leíró része
\underline{J}_C	a \underline{C} tenzor tisztán térfogatváltozást leíró része
\underline{J}_U	az \underline{U} tenzor tisztán térfogatváltozást leíró része
\underline{J}_v	az \underline{v} tenzor tisztán térfogatváltozást leíró része
λ_s	vonalelem arány vagy fajlagos nyúlás
λ_i, λ_I	nyújtó tenzor i -edik sajátértéke
$\underline{\underline{\Lambda}}$	A \underline{v} nyújtó tenzor a sajátvektorok bázisában
$\tilde{\underline{\underline{\Lambda}}}$	Az \underline{U} nyújtó tenzor a sajátvektorok bázisában
∇	Hamilton-féle (nabla) differenciál operátor a pillanatnyi konfigurációban
∇_0	Hamilton-féle (nabla) differenciál operátor a kezdeti konfigurációban
\vec{N}	felület normálvektora a kezdeti konfigurációban
\vec{n}	felület normálvektora a pillanatnyi konfigurációban
\vec{N}_I	tenzor i -edik egyre normált sajátvektora a kezdeti konfigurációban
\vec{n}_i	tenzor i -edik egyre normált sajátvektora a pillanatnyi konfigurációban
$\underline{Q}, \tilde{\underline{Q}}$	ortogonális transzformáció tenzora
\underline{R}	ortogonális transzformáció, az elemi térfogat merev test szerű elfordulását írja le
\vec{R}	anyagi pont helyzete a kezdeti konfigurációban
$\vec{r}, \vec{r}(t)$	anyagi pont helyzete a pillanatnyi konfigurációban
\underline{U}	poláris felbontás után a deformáció gradiens tisztán alakváltozást leíró része a kezdeti konfigurációban
$\tilde{\underline{U}}$	az \underline{U} tenzor torzításos vagy deviátoros része
\underline{v}	poláris felbontás után a deformáció gradiens tisztán alakváltozást leíró része a pillanatnyi konfigurációban
$\tilde{\underline{v}}$	a \underline{v} tenzor torzításos vagy deviátoros része

1. Kinematika

1.1. Anyagi pont és test helyzetének megadása

A kinematika a testek mozgásának leírásával foglalkozik, nem keresi a mozgás okát. A továbbiakban kontinuumok, azaz folytonos tömegeloszlású testek leírásával foglalkozunk. Feltételezzük, hogy a kontinuum anyagi pontok sokaságából áll, az anyagi pontok szorosan (hézagmentesen) egymás mellett helyezkednek el. Tekintsünk egy testet, amelyet egy zárt felület határol. A testet, mint anyagi pontok halmazát jelöljük \mathcal{B} -vel. A \mathcal{B} egy tetszőleges anyagi pontját jelölje P ($P \in \mathcal{B}$). A háromdimenziós térben egy adott t időpillanatban minden anyagi ponthoz kölcsönösen egyértelmű módon hozzárendelhető egy (x^1, x^2, x^3) számhármass, amelyet az anyagi pont koordinátáinak nevezünk. A hozzárendelést vagy leképezést jelölje κ . Ezek alapján

$$(x^1, x^2, x^3) = \kappa(P, t).$$

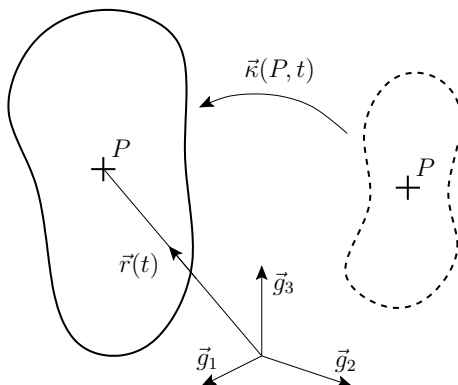
A számhármass egy hozzá kapcsolódó vonatkoztatási rendszerrel együtt adja meg az anyagi pont pontos helyét a t időpillanatban. A vonatkoztatási rendszer legyen a \vec{g}_1, \vec{g}_2 és \vec{g}_3 nem egy síkba eső vektorokból álló vektorhármass, amelyet szokás bázisvektoroknak is nevezni. Azt, hogy az x^1, x^2, x^3 koordináták és a $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ bázisvektorok egy adott időpillanathoz tartoznak, úgy is jelölhetjük, hogy $x^i = x^i(t)$ és $\vec{g}_i = \vec{g}_i(t)$, ahol $i = 1, 2, 3$. Ezek alapján egy adott t időpillanatban a P anyagi pontba mutató \vec{r} helyvektor az

$$\vec{r}(t) = x^i(t) \vec{g}_i(t) \quad (1)$$

összeggel számítható¹. Szimbolikusan írhatjuk az

$$\vec{r}(t) = \vec{\kappa}(P, t) = \vec{\kappa}_t(P) \quad (2)$$

függvénykapcsolatot is, amely bár konkrét számításra alkalmatlan, jelzi hogy egy anyagi pont és egy számhármass (és a hozzá kapcsolódó bázis) kapcsolatáról van szó.



1. ábra. A testet alkotó anyagi pontok egy adott t időpillanatban történő hozzárendelése a tér egy három koordinátával megadott pontjához.

A (2) függvény inverze a $P = \vec{\kappa}_t^{-1}(\vec{r}(t))$ alakban írható.

Ha a \mathcal{B} test mozgását (elmozdulását) szeretnénk leírni, legalább két különböző időpillanatban ismernünk kell a pontos helyzetét, azaz a testet alkotó P anyagi pontok helyzetét. Az egyik időpontot rögzítjük le, és jelöljük ezt a rögzített időpontot t_0 -val. A t_0 időpillanatban az anyagi pont helyvektorát jelölje

$$\vec{R} = \vec{r}(t_0) = x^i(t_0) \vec{g}_i(t_0) = X^I \vec{G}_I.$$

Ezt szimbolikusan jelölhetjük az

$$\vec{R} = \vec{r}(t_0) = \vec{\kappa}(P, t_0) = \vec{\kappa}_0(P)$$

összefüggéssel is, ami maga után vonja, hogy $P = \vec{\kappa}_0^{-1}(\vec{R})$. A továbbiakban a t_0 időpillanathoz tartozó mennyiségeket általában nagy betűkkel fogjuk jelölni (beleértve az indexeket is), a tetszőleges t időpillanathoz tartozó

¹Az Einstein-féle összegzési konvenciónak megfelelően az azonos indexekre összegezni kell, például $x^i(t) \vec{g}_i(t) = \sum_{i=1}^3 x^i(t) \vec{g}_i(t)$.

mennyiségeket pedig kis betűkkel. A tetszőleges t időpillanatban a test helyzetét *pillanatnyi konfigurációnak* nevezzük, itt az egyes mennyiségek általában függvényei az időnek is. A t_0 időpillanatban a test helyzetét *kezdeti konfigurációnak* nevezzük. A kezdeti konfigurációban a rögzített t_0 idő miatt az egyes mennyiségek nem függenek az időtől.

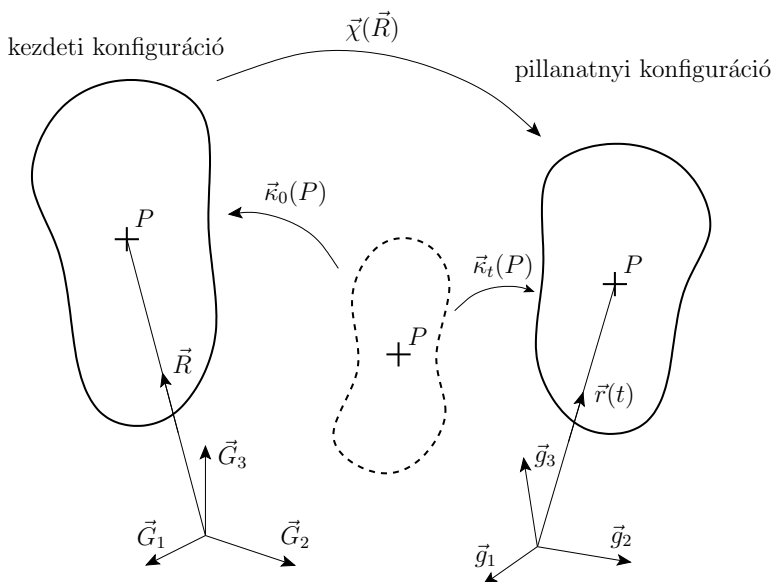
Az \vec{r} és az \vec{R} közötti kapcsolat leírható az

$$\vec{r}(t) = \vec{\kappa}_t \left(\vec{\kappa}_0^{-1} \left(\vec{R} \right) \right) = \vec{\chi} \left(\vec{R}, t \right) = \vec{\chi}_t \left(\vec{R} \right) \quad (3)$$

függvénnyel is, az inverz kapcsolatot pedig az

$$\vec{R} = \vec{\kappa}_0 \left(\vec{\kappa}_t^{-1} \left(\vec{r}(t) \right) \right) = \vec{\chi}_t^{-1} \left(\vec{r}(t) \right) \quad (4)$$

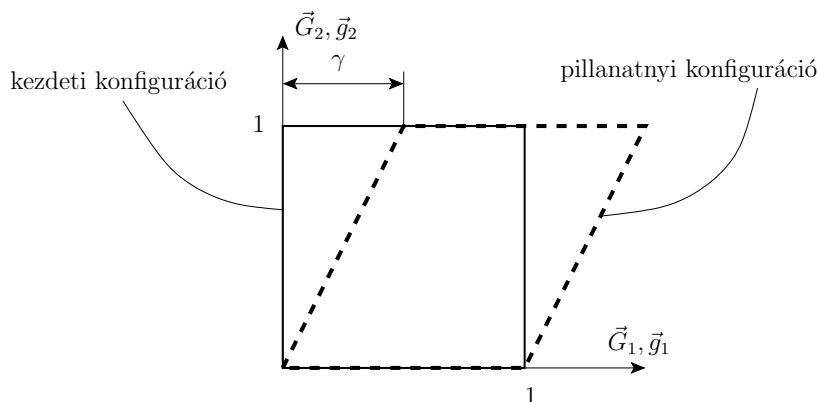
összefüggés adja meg. A későbbiekben nem fogjuk külön hangsúlyozni, hogy a $\vec{\chi}_t = \vec{\chi}_t \left(\vec{R} \right) = \vec{\chi} \left(\vec{R}, t \right)$ függvény még függ az időtől is, és jelölésére csak a $\vec{\chi} = \vec{\chi} \left(\vec{R} \right)$ -t fogjuk használni.



2. ábra. A kezdeti és a pillanatnyi konfiguráció kapcsolatát leíró $\vec{\chi}$ függvény.

Feladatok

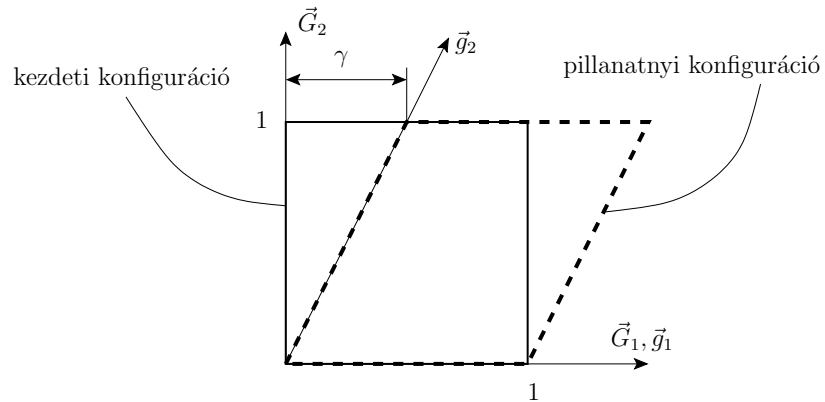
1. feladat (egyszerű nyírás). Adott egy egység oldalú kocka, mint kezdeti konfigurációt. A kocka alakváltozását a pillanatnyi konfigurációban a 3. ábra szemlélteti. A \vec{g}_3 irányba a kocka egyik pontja sem mozdul el. Határozza meg a kocka pontjainak elmozdulását leíró $\vec{\chi}$ függvényt az ábrán megadott bázisok segítségével!



3. ábra. Egyszerű nyírás.



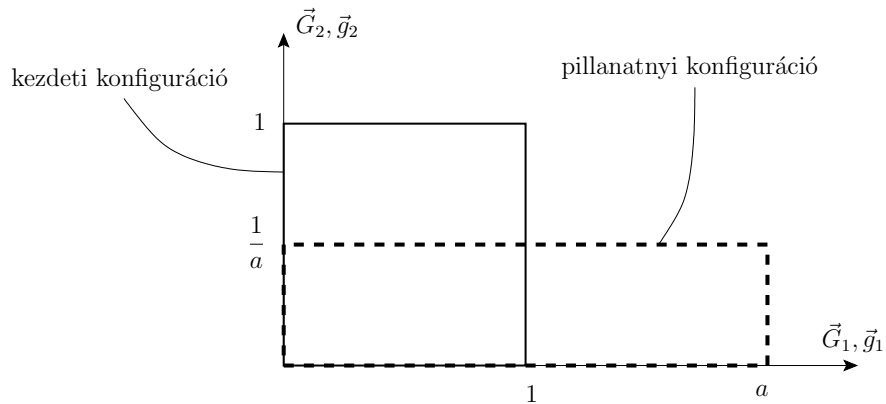
2. feladat. Oldja meg az 1. feladatot a 4. ábrán látható bázisokkal.



4. ábra. Egyszerű nyírás.



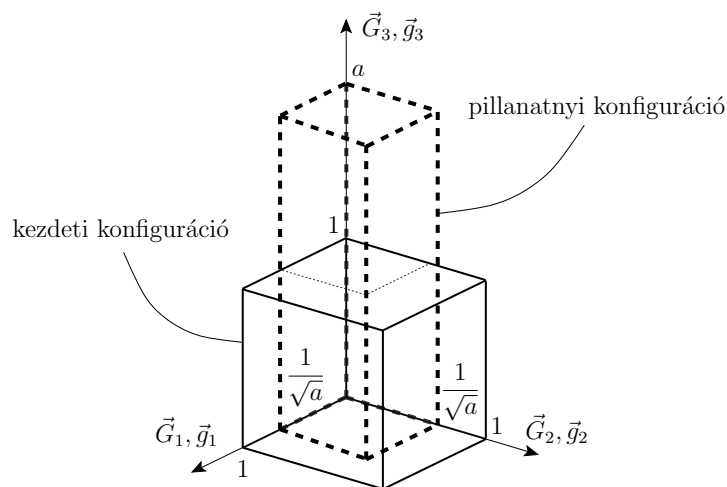
3. feladat (tisztá nyírás). Adott egy egység oldalú kocka, mint kezdeti konfigurációt. A kocka alakváltozását a pillanatnyi konfigurációban az 5. ábra szemlélteti. A \vec{g}_3 irányba a kocka egyik pontja sem mozdul el. Határozza meg a kocka pontjainak elmozdulását leíró $\vec{\chi}$ függvényt az ábrán megadott bázisok segítségével!



5. ábra. Tiszta nyírás.



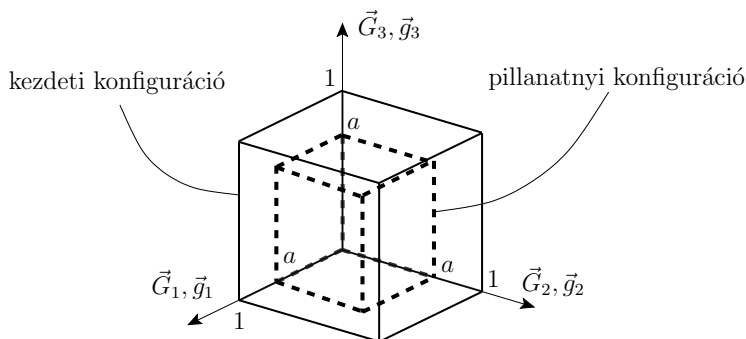
4. feladat. Adott egy egység oldalú kocka, mint kezdeti konfigurációt. A kocka alakváltozását a pillanatnyi konfigurációban a 6. ábra szemlélteti. Határozza meg a kocka pontjainak elmozdulását leíró $\vec{\chi}$ függvényt az ábrán megadott bázisok segítségével!



6. ábra. A tiszta nyírás térbeli változata.



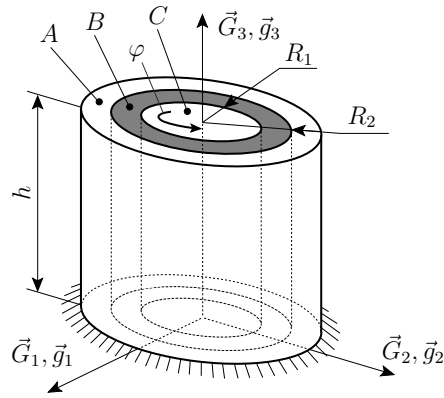
5. feladat. Adott egy egység oldalú kocka, mint kezdeti konfigurációt. A kocka alakváltozását a pillanatnyi konfigurációban a 7. ábra szemlélteti. Határozza meg a kocka pontjainak elmozdulását leíró $\vec{\chi}$ függvényt az ábrán megadott bázisok segítségével!



7. ábra. Tiszta nyírás.



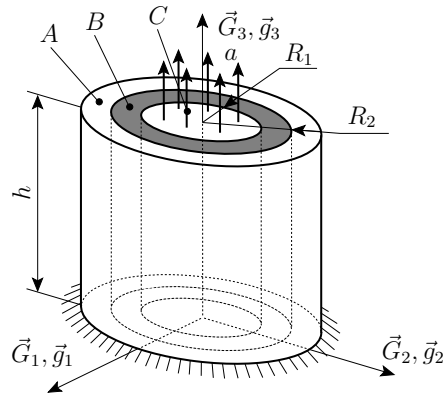
6. feladat. Adott a 8. ábra látható három testből felépített szerkezet. Mindhárom test forgásszimmetrikus, és szimmetriatengelyeik egybeesnek. A külső (A) és belső (C) testek merevnek tekinthetők, a B test pedig alakváltozásra képes test. A külső (A) testet mereven megfogluk, a belső (C) testet pedig a szimmetriatengely körül φ szöggel elforgattuk. Feltételezzük, hogy az A test a B testhez képes, valamint a B test a C testhez képes nem csúszik meg, valamint hogy a szimmetriatengelyre merőleges síkok az alakváltozás után is síkok maradnak. Feltételezzük továbbá, hogy a B test pontjai koncentrikus körökön mozognak el, az elmozdulás nagysága pedig lineáris függvénye a szimmetriatengelytől mért távolságnak. Határozza meg a B test pontjainak elmozdulását leíró $\vec{\chi}$ függvényt *alkalmasan választott* bázisok segítségével!



8. ábra. Csavarás.



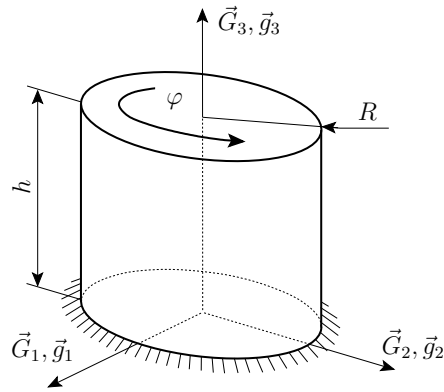
7. feladat. Adott a 9. ábra látható három testből felépített szerkezet. Mindhárom test forgásszimmetrikus, és szimmetriatengelyeik egybeesnek. A külső (A) és belső (C) testek merevnek tekinthetők, a B test pedig alakváltozásra képes test. A külső (A) testet mereven megfogluk, a belső (C) test pedig a szimmetriatengely irányába elmozdítottuk. Az elmozdulás értéke a . Feltételezzük, hogy az A test a B testhez képes, valamint a B test a C testhez képes nem csúszik meg. Feltételezzük továbbá, hogy a B test pontjai mind a szimmetriatengely irányába mozdulnak el, az elmozdulás nagysága pedig lineáris függvénye a szimmetriatengelytől mért távolságnak. Határozza meg a B test pontjainak elmozdulását leíró χ függvényt *alkalmasan választott* bázisok segítségével!



9. ábra. Forgásszimmetrikus nyírás.



8. feladat. Adott a 10. ábrán látható henger alakú alakváltozásra képes test. A test alsó felületét mereven megfogluk, a felső homloklapfelületét pedig φ szöggel elforgattuk. Feltételezzük, hogy a henger keresztmetszetei az alakváltozás során síkok maradnak, alakjuk és nagyságuk sem változik meg, és a keresztmetszetek távolsága is változatlan marad. Feltételezzük továbbá, hogy a henger keresztmetszeteinek szögelfordulása a szimmetriatengely irányába mért távolság lineáris függvénye. Határozza meg a henger pontjainak elmozdulását leíró χ függvényt *alkalmasan választott* bázisok segítségével!



10. ábra. Csavarás.



9. feladat. Határozza meg $\vec{R} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{r})$ inverz leképezést az 1-8. feladatok esetére!

1.2. Elemi vonalszakasz, felület és térfogat alakváltozása

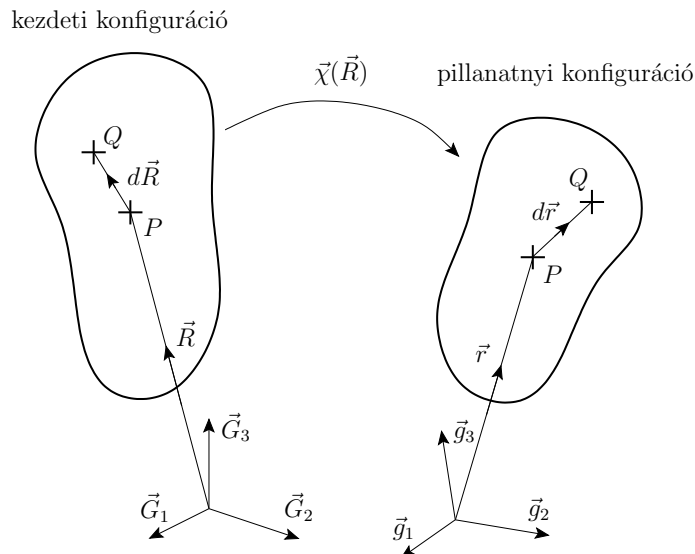
Az előző fejezetben bemutatott $\vec{\chi}$ függvény minden szükséges információt tartalmaz arra vonatkozóan, hogy a vizsgált test helyzetét, mozgását, alakváltozásait le tudjuk írni. A $\vec{\chi}$ függvény tulajdonképpen jóval több információt tartalmaz, mint amennyire szükségünk van az alakváltozások leírásához. A kérdés az, hogy mik azok a mennyiségek, amelyek csak az alakváltozással kapcsolatosak, és hogyan lehet ezeket kinyerni a $\vec{\chi}$ függvényből? Amire nincsen szükségünk, az a

1. merev test szerű elmozdulás (transzláció vagy térbeli eltolás) és a
2. merev test szerű elfordulás (rotáció vagy térbeli elforgatás).

Hogy valami támpontot kapjunk, vizsgáljuk meg azoknak az elemi geometriai alakzatoknak a test mozgása során bekövetkezett megváltozását, amely alakzatokra a későbbiekben szükségünk lehet például egy a testre vonatkozó integrál felírásánál. Ilyen alakzat a testben egy elemi vonalszakasz, egy elemi felület vagy egy elemi térfogat. A következő alfejezetekben ezeket vesszük végig.

1.2.1. Elemi vonalszakasz megváltozása

Tekintsük a \mathcal{B} test P anyagi pontját, és annak *elemi környezetében* lévő Q anyagi pontját (lásd 11. ábra). A kezdeti



11. ábra. Elemi vonalszakasz megváltozása.

konfigurációban legyen a P pontba mutató helyvektor

$$\vec{R}_P = \vec{R}, \quad (5)$$

a Q pontba mutató helyvektor pedig az

$$\vec{R}_Q = \vec{R} + d\vec{R}, \quad (6)$$

ahol $d\vec{R} = dX^J \vec{G}_J$. A 11. ábra alapján nyilvánvaló, hogy

$$d\vec{R} = \vec{R}_Q - \vec{R}_P. \quad (7)$$

Most nézzük meg ugyanezen anyagi pontok helyét a pillanatnyi konfigurációban. Feltételezve hogy ismerjük a $\vec{\chi}$ leképezést, az

$$\vec{r}_P = \vec{\chi}(\vec{R}_P) = \vec{\chi}(\vec{R}) \quad (8)$$

és

$$\vec{r}_Q = \vec{\chi}(\vec{R}_Q) = \vec{\chi}(\vec{R} + d\vec{R}) \quad (9)$$

összefüggéseket kapjuk. Szintén a 11. ábráról olvashatjuk le a

$$d\vec{r} = \vec{r}_Q - \vec{r}_P \quad (10)$$

összefüggést, ahol $d\vec{r} = dx^i \vec{g}_i$. Helyettesítsük be a (10) egyenletbe a (8) és (9) vektorokat.

$$d\vec{r} = \vec{\chi}(\vec{R} + d\vec{R}) - \vec{\chi}(\vec{R}) \quad (11)$$

Vagyis fel tudunk írni egy függvénykapcsolatot a $d\vec{r}$, $d\vec{R}$ és \vec{R} között. Ezt jelölhetnénk akár a $d\vec{r} = d\vec{r}(\vec{R}, d\vec{R})$ függvényel is. Mivel $d\vec{R}$ az \vec{R} elemi környezetében lévő vektor, érdemes sorba fejteni a (11) függvényt.

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \vec{\chi}(\vec{R}) + \frac{\partial \vec{\chi}(\vec{R})}{\partial X^J} dX^J + \dots + \\ &+ \sum_{\substack{k_1, k_2, k_3 \\ (\sum_1^3 k_i = n)}} \frac{1}{k_1! k_2! k_3!} \frac{\partial^n \vec{\chi}(\vec{R})}{(\partial X^1)^{k_1} (\partial X^2)^{k_2} (\partial X^3)^{k_3}} (dX^1)^{k_1} (dX^2)^{k_2} (dX^3)^{k_3} + \dots - \vec{\chi}(\vec{R}) \end{aligned} \quad (12)$$

1. Feltevés (helyi hatások elve). *A P pont környezetének alakváltozását, így a $d\vec{r}$ vektort nem befolyásolják a P ponttól távolabb lévő anyagi pontoknál bekövetkező alakváltozások.*

Következmény. *Elegendő a (12) sorfejtésből csak a lineáris tagokat figyelembe venni, a magasabb fokú tagok hatása elhanyagolható.*

Ezek alapján írható, hogy

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \vec{\chi}(\vec{R}) + \frac{\partial \vec{\chi}(\vec{R})}{\partial X^J} dX^J - \vec{\chi}(\vec{R}) = \frac{\partial \vec{\chi}(\vec{R})}{\partial X^J} dX^J = \\ &= \frac{\partial \vec{\chi}(\vec{R})}{\partial X^J} \delta_K^J dX^K = \underbrace{\frac{\partial \vec{\chi}(\vec{R})}{\partial X^J}}_{\underline{\underline{F}}(\vec{R})} \cdot \underbrace{\vec{G}_K dX^K}_{d\vec{R}} \end{aligned}$$

vagy röviden

$$d\vec{r} = \underline{\underline{F}}(\vec{R}) \cdot d\vec{R} \quad (13)$$

2. Definíció. Az

$$\underline{\underline{F}}(\vec{R}) = \frac{\partial \bar{\chi}(\vec{R})}{\partial X^J} \circ \vec{G}^J = \bar{\chi}(\vec{R}) \circ \underbrace{\frac{\partial}{\partial X^J} \vec{G}^J}_{\nabla_0} = \bar{\chi}(\vec{R}) \circ \nabla_0$$

tenzort *deformáció gradiensnek* nevezzük.

A 2. definícióban a ∇_0 differenciál operátor alsó nulla indexe arra utal, hogy a deriválást a kezdeti konfigurációban kell elvégezni. Szokásosak még a következő jelölések is a deformáció gradiensre:

$$\underline{\underline{F}}(\vec{R}) = \frac{\partial \vec{r}(\vec{R})}{\partial X^J} \circ \vec{G}^J = \frac{\partial \vec{r}}{\partial X^J} \circ \vec{G}^J = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{R}},$$

ahol felhasználtuk a (3) jelölést. Az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradiens egy másodrendű tenzor, vagyis egy homogén-lineáris vektor-vektor függvény.

Megjegyzés: Görbevonalú koordináta-rendszerben az

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}}(\vec{R}) &= \frac{\partial \bar{\chi}(\vec{R})}{\partial X^J} \circ \vec{G}^J = \frac{\partial}{\partial X^J} (x^i \bar{g}_i) \circ \vec{G}^J = \frac{\partial x^i}{\partial X^J} \bar{g}_i \circ \vec{G}^J + x^i \frac{\partial \bar{g}_i}{\partial X^J} \circ \vec{G}^J = \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial X^J} \bar{g}_i \circ \vec{G}^J + x^i \frac{\partial x^k}{\partial X^J} \frac{\partial \bar{g}_i}{\partial x^k} \circ \vec{G}^J = \frac{\partial x^i}{\partial X^J} \bar{g}_i \circ \vec{G}^J + x^k \frac{\partial x^i}{\partial X^J} \frac{\partial \bar{g}_k}{\partial x^i} \circ \vec{G}^J = \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial X^J} \bar{g}_i \circ \vec{G}^J + x^k \Gamma_{ki}^l \frac{\partial x^i}{\partial X^J} \bar{g}_l \circ \vec{G}^J = \frac{\partial x^i}{\partial X^J} \bar{g}_i \circ \vec{G}^J + x^k \Gamma_{kl}^i \frac{\partial x^l}{\partial X^J} \bar{g}_i \circ \vec{G}^J = \\ &= \frac{\partial x^l}{\partial X^J} \delta_l^i \bar{g}_i \circ \vec{G}^J + x^k \Gamma_{kl}^i \frac{\partial x^l}{\partial X^J} \bar{g}_i \circ \vec{G}^J = \frac{\partial x^l}{\partial X^J} (\delta_l^i + x^k \Gamma_{kl}^i) \bar{g}_i \circ \vec{G}^J \end{aligned}$$

összefüggés érvényes, ahol Γ_{kl}^i az úgynevezett Christoffel-féle szimbólum². Egyenesvonalú koordináta-rendszerben a Γ_{kl}^i Christoffel-szimbólumok értéke nulla, ezért itt használhatjuk az

$$\underline{\underline{F}} = \frac{\partial x^i}{\partial X^J} \bar{g}_i \circ \vec{G}^J$$

egyszerűbb alakot.

Most számoljuk ki a fordított összefüggést. A (7) egyenlet jobb oldalát fejezzük ki a pillanatnyi konfigurációban lévő \vec{r}_P és \vec{r}_Q vektorokkal, felhasználva a (4) inverz $\bar{\chi}^{-1}$ függvényt.

$$d\vec{R} = \bar{\chi}^{-1}(\vec{r}_Q) - \bar{\chi}^{-1}(\vec{r}_P) \quad (14)$$

A 11. ábra jelöléseivel a P és Q helyvektorokra a pillanatnyi konfigurációban az

$$\vec{r}_P = \vec{r}$$

és

$$\vec{r}_Q = \vec{r} + d\vec{r}$$

vektorok adódnak. Ezeket behelyettesítve a (14) egyenletbe egy újabb, a (11) összefüggéshez hasonló, de a $d\vec{R}$ -re kifejezett egyenletet kapunk.

$$d\vec{R} = \bar{\chi}^{-1}(\vec{r} + d\vec{r}) - \bar{\chi}^{-1}(\vec{r}) \quad (15)$$

Az előzőekhez hasonlóan végezzük el a (15) sorba fejtését.

$$\begin{aligned} d\vec{R} &= \bar{\chi}^{-1}(\vec{r}) + \frac{\partial \bar{\chi}^{-1}(\vec{r})}{\partial x^j} dx^j + \dots + \\ &+ \sum_{\substack{k_1, k_2, k_3 \\ (\sum_1^3 k_i = n)}} \frac{1}{k_1! k_2! k_3!} \frac{\partial^n \bar{\chi}^{-1}(\vec{r})}{(\partial x^1)^{k_1} (\partial x^2)^{k_2} (\partial x^3)^{k_3}} (dx^1)^{k_1} (dx^2)^{k_2} (dx^3)^{k_3} + \dots - \bar{\chi}^{-1}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (16)$$

A feltételezve hogy érvényes a helyi hatások elve, a (16) összefüggésből elhagyhatóak a lineárisnál magasabb fokú tagok.

$$d\vec{R} = \bar{\chi}^{-1}(\vec{r}) + \frac{\partial \bar{\chi}^{-1}(\vec{r})}{\partial x^j} dx^j - \bar{\chi}^{-1}(\vec{r}) = \frac{\partial \bar{\chi}^{-1}(\vec{r})}{\partial x^j} dx^j =$$

²A Γ_{kl}^i Christoffel-szimbólumokat például a $\frac{\partial \bar{g}_k}{\partial x^i} = \Gamma_{ki}^l \bar{g}_l$, vagy ami ezzel ekvivalens, a $\Gamma_{ki}^l = \frac{\partial \bar{g}_k}{\partial x^i} \cdot \bar{g}^l$ összefüggéssel is számíthatjuk.

$$= \frac{\partial \bar{\chi}^{-1}(\vec{r})}{\partial x^j} \delta_k^j dx^k = \underbrace{\frac{\partial \bar{\chi}^{-1}(\vec{r})}{\partial x^j}}_{\underline{\tilde{F}}(\vec{r})} \circ \underbrace{\bar{g}^j \cdot \bar{g}_k dx^k}_{d\vec{r}},$$

vagy röviden

$$d\vec{R} = \underline{\tilde{F}}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}. \quad (17)$$

Az $\underline{\tilde{F}}$ szintén egy másodrendű tenzor, és hasonló szerepet játszik, mint a (13) egyenletben a deformáció gradiens. A kapcsolat az \underline{F} és $\underline{\tilde{F}}$ között könnyen tisztázható. Szorozzuk meg a (13) mindkét oldalát balról az $\underline{\tilde{F}}$ tenzorral.

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{F}} \cdot / \quad d\vec{r} &= \underline{F} \cdot d\vec{R} \\ &\Downarrow \\ \underline{\tilde{F}} \cdot d\vec{r} &= \underline{\tilde{F}} \cdot \underline{F} \cdot d\vec{R} \end{aligned}$$

Ezt összevetve a (17) összefüggéssel belátható, hogy $\underline{\tilde{F}} \cdot \underline{F} = \underline{I}$, ahol \underline{I} az egységtenzor. Ezek után a (17) összefüggést írhatjuk az

$$d\vec{R} = \underline{F}^{-1}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (18)$$

alakban is. Az $\underline{F}^{-1} = \underline{F}^{-1}(\vec{r})$ tenzort a deformáció gradiens tenzor inverzének nevezzük. Szokásosak még a következő jelölések a deformáció gradiens inverzére:

$$\underline{F}^{-1}(\vec{r}) = \frac{\partial \bar{\chi}^{-1}(\vec{r})}{\partial x^j} \circ \bar{g}^j = \bar{\chi}^{-1}(\vec{r}) \circ \nabla = \frac{\partial \vec{R}(\vec{r})}{\partial x^j} \circ \bar{g}^j = \frac{\partial \vec{R}}{\partial x^j} \circ \bar{g}^j = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{r}},$$

ahol felhasználtuk a (4) jelölést. Itt a ∇ differenciál operátor a pillanatnyi konfigurációban történő deriválást jelenti.

Megjegyzés: Görbevonalú koordinátarendszerben az

$$\begin{aligned} \underline{F}^{-1}(\vec{r}) &= \frac{\partial \bar{\chi}^{-1}(\vec{r})}{\partial x^j} \circ \bar{g}^j = \frac{\partial}{\partial x^j} (X^I \bar{G}_I) \circ \bar{g}^j = \frac{\partial X^I}{\partial x^j} \bar{G}_I \circ \bar{g}^j + X^I \frac{\partial \bar{G}_I}{\partial x^j} \circ \bar{g}^j = \\ &= \frac{\partial X^I}{\partial x^j} \bar{G}_I \circ \bar{g}^j + X^I \frac{\partial X^K}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{G}_I}{\partial X^K} \circ \bar{g}^j = \frac{\partial X^I}{\partial x^j} \bar{G}_I \circ \bar{g}^j + X^K \frac{\partial X^I}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{G}_K}{\partial X^I} \circ \bar{g}^j = \\ &= \frac{\partial X^I}{\partial x^j} \bar{G}_I \circ \bar{g}^j + X^K \Gamma_{KI}^L \frac{\partial X^I}{\partial x^j} \bar{G}_L \circ \bar{g}^j = \frac{\partial X^I}{\partial x^j} \bar{G}_I \circ \bar{g}^j + X^K \Gamma_{KL}^I \frac{\partial X^L}{\partial x^j} \bar{G}_I \circ \bar{g}^j = \\ &= \frac{\partial X^L}{\partial x^j} \delta_L^I \bar{G}_I \circ \bar{g}^j + X^K \Gamma_{KL}^I \frac{\partial X^L}{\partial x^j} \bar{G}_I \circ \bar{g}^j = \frac{\partial X^L}{\partial x^j} (\delta_L^I + X^K \Gamma_{KL}^I) \bar{G}_I \circ \bar{g}^j \end{aligned}$$

összefüggés érvényes, ahol a Γ_{KL}^I Christoffel-féle szimbólumokat a kezdeti konfigurációban kell kiszámítani³. Egyenesvonalú koordinátarendszerben a Γ_{KL}^I Christoffel szimbólumok értéke nulla, ezért itt használhatjuk az

$$\underline{F}^{-1} = \frac{\partial X^I}{\partial x^j} \bar{G}_I \circ \bar{g}^j$$

egyszerűbb alakot.

Az \underline{F} deformáció gradiensnek akkor és csakis akkor létezik az \underline{F}^{-1} inverze, ha a determinánsa nem nulla, vagyis $\det(\underline{F}) \neq 0$.

Az \underline{F} deformáció gradiens egy úgynevezett kétpont tenzor. A kétpont tenzorokra az jellemző, hogy két koordinátarendszer között teremtenek kapcsolatot, bázisuk a két koordinátarendszer bázisainak diadikus szorzataként állítható elő. Összefoglalva mondhatjuk, hogy a $d\vec{R}$ vagy $d\vec{r}$ elemi vonalszakasz megváltozását az \underline{F} deformáció gradiens segítségével egyértelműen le tudjuk írni (lásd a (13) és (18) egyenletek).

* * *

Ezen a ponton még kevésbe látszik, de a deformáció gradiens az alakváltozások, sőt később a feszültségállapot és az anyagtörvények felírásánál és számításánál is kulcsszerepet fog játszani. A deformációgradiens az az alapváltozó lesz a kontinuummechanikai feladatnál, amelynek meghatározásával a feladatot megoldottnak tekinthetjük, ugyanis segítségével minden más mennyiséget származtatni tudunk. Az \underline{F} a deriválások miatt kevesebb információt tartalmaz, mint a $\bar{\chi}$ függvény.

³A Γ_{KL}^I Christoffel szimbólumokat például a $\frac{\partial \bar{G}_K}{\partial X^I} = \Gamma_{KI}^L \bar{G}_L$, vagy ami ezzel ekvivalens, a $\Gamma_{KI}^L = \frac{\partial \bar{G}_K}{\partial X^I} \cdot \bar{G}^L$ összefüggéssel is számíthatjuk.

Feladatok

10. feladat. Számítsa ki az 1-8. feladatok megoldása során kapott $\bar{\chi}$ függvényekből kiindulva az egyes alakváltozásokhoz tartozó \underline{F} deformáció gradienseket! Írja fel az egyes deformáció gradiens tenzorok mátrixát a megfelelő bázisok segítségével.

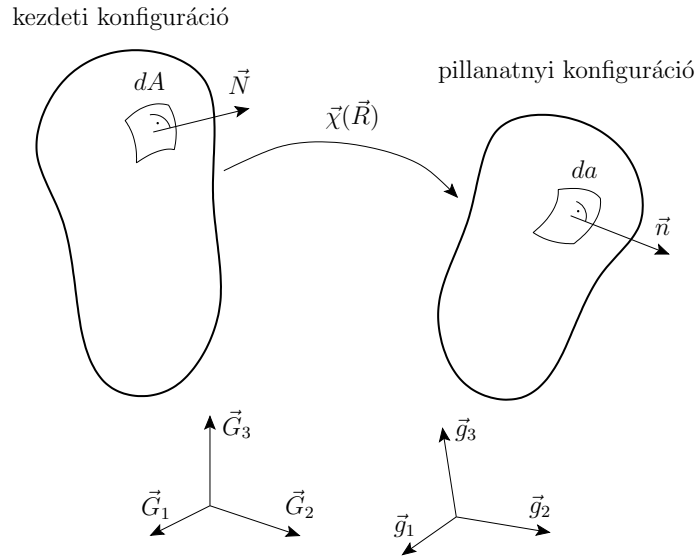
11. feladat. Számítsa ki a 9. feladat megoldása során kapott $\bar{\chi}^{-1}$ függvényekből kiindulva az egyes alakváltozásokhoz tartozó deformáció gradiensek \underline{F}^{-1} inverzét! Írja fel az egyes inverz deformáció gradiens tenzorok mátrixát a megfelelő bázisok segítségével.

12. feladat. Ellenőrizze, hogy a 10. feladatban kapott deformáció gradiensek valóban az inverzei-e a 11. feladatban kapott eredményeknek.

13. feladat. Adott a $d\vec{R} = dX^2 \vec{G}_2$ elemi vonalszakasz a kezdeti konfigurációban. Számítsa ki a pillanatnyi konfigurációba leképezett $d\vec{r}$ vektort az 1. feladatban és a 2. feladatban kapott deformáció gradiensek felhasználásával is. Hasonlítsa össze az eredményeket.

1.2.2. Elemi felület megváltozása

Az elemi vonalszakasz után most vizsgáljuk egy elemi dA felület alakváltozás során bekövetkezett megváltozását. Legyen kezdetben (a kezdeti konfigurációban) a dA elemi felület normálvektora \vec{N} . Ugyanezen felületelemet a pillanatnyi konfigurációban (alakváltozás után) jelölje da , normálvektora pedig legyen az \vec{n} (lásd a 12. ábrát).



12. ábra. Elemi felület megváltozása.

Mindkét normálvektorra legyen igaz, hogy

$$|\vec{N}| = |\vec{n}| = 1$$

A dA és da elemi felületek skalár mennyiségek, de az \vec{N} és \vec{n} normálvektorok segítségével bevezethetünk vektor felületelemeket is a következő módon:

$$d\vec{A} = \vec{N} dA$$

és

$$d\vec{a} = \vec{n} da.$$

Nyilvánvaló, hogy $d\vec{A} = |d\vec{A}|$ illetve $d\vec{a} = |d\vec{a}|$. A feladat a $d\vec{A}$ és a $d\vec{a}$ elemi felületvektorok közötti kapcsolat megkeresése azon feltétel mellett, hogy az alakváltozást leíró \underline{F} deformáció gradiens invertálható, vagyis $\det(\underline{F}) \neq 0$.

Kiindulásként írjuk fel az elemi felületeket két-két vektor (elemi vonalszakasz) vektoriális szorzataként (lásd a 13. ábrát). Ha az elemi felületek elegendően kicsik, akkor az ily módon történő felírással csak kis hibát követünk el. Ha az elemi felületek mérete tart a nullához, akkor az elkövetett hiba értéke is nullához konvergál.



13. ábra. Elemi felületek előállításuk két vektor vektoriális szorzataként.

A 13. ábra alapján írhatjuk, hogy

$$d\vec{A} = d\vec{R}_1 \times d\vec{R}_2 \quad (19)$$

és

$$d\vec{a} = d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2. \quad (20)$$

Az elemi vonalszakaszok transzformációját az 1.2.1. fejezet (13) összefüggése alapján számíthatjuk. Helyettesítsük be a (13) összefüggést a (20) egyenletbe.

$$d\vec{a} = \left(\underline{\underline{F}} \cdot d\vec{R}_1 \right) \times \left(\underline{\underline{F}} \cdot d\vec{R}_2 \right).$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradienssel jobbról.

$$d\vec{a} \cdot \underline{\underline{F}} = \left(\left(\underline{\underline{F}} \cdot d\vec{R}_1 \right) \times \left(\underline{\underline{F}} \cdot d\vec{R}_2 \right) \right) \cdot \underline{\underline{F}}$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt jobbról egy olyan tetszőleges $d\vec{L}$ vektorral, amely nem esik egy síkba a $d\vec{R}_1$ és $d\vec{R}_2$ vektorokkal.

$$d\vec{a} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot d\vec{L} = \left(\left(\underline{\underline{F}} \cdot d\vec{R}_1 \right) \times \left(\underline{\underline{F}} \cdot d\vec{R}_2 \right) \right) \cdot \underline{\underline{F}} \cdot d\vec{L}$$

Felhasználva az $\left((\underline{\underline{A}} \cdot \vec{a}) \times (\underline{\underline{A}} \cdot \vec{b}) \right) \cdot (\underline{\underline{A}} \cdot \vec{c}) = \det(\underline{\underline{A}}) (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ azonosságot az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradiens kiemelhető a jobb oldalból.

$$d\vec{a} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot d\vec{L} = \det(\underline{\underline{F}}) \left(d\vec{R}_1 \times d\vec{R}_2 \right) \cdot d\vec{L}$$

A jobb oldalon zárójelben álló tag nem más, mint a kezdeti konfigurációban értelmezett, (19) összefüggéssel számított elemi felület.

$$d\vec{a} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot d\vec{L} = \det(\underline{\underline{F}}) d\vec{A} \cdot d\vec{L}$$

Mivel a $d\vec{L}$ vektort tetszőlegesnek vettük fel, az egyenlőség csak akkor igaz, ha a $d\vec{L}$ vektort balról szorzó vektor mindkét oldalon megegyezik.

$$d\vec{a} \cdot \underline{\underline{F}} = \det(\underline{\underline{F}}) d\vec{A}$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt jobbról a deformáció gradiens $\underline{\underline{F}}^{-1}$ inverzével.

$$d\vec{a} = \det(\underline{\underline{F}}) d\vec{A} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}$$

Vegyük mindkét oldal transzponáltját azért, hogy a $d\vec{A}$ vektor a jobb oldali kifejezés végére kerüljön.

$$d\vec{a} = \det(\underline{\underline{F}}) \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot d\vec{A}$$

A bal oldal transzponálása csak annyit eredményez, hogy a $d\vec{a}$ vektor sorvektorból oszlopvektor lesz, de mivel ennek itt különösebb hatása nincsen, nem különböztetjük meg őket egymástól. A deformáció gradiens determinánsának jelölésére vezessünk be egy új jelölést. Mivel a deformáció gradiens tulajdonképpen egy leképezés Jacobi mátrixaként is felfogható a megfelelő bázisok felhasználásával, ezért az $\underline{\underline{F}}$ determinánsát Jacobi determinánsnak is nevezhetjük, és a

$$J = \det(\underline{\underline{F}}) \quad (21)$$

jelölést fogjuk rá használni a továbbiakban. Így megkaptuk a

$$d\vec{a} = J \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot d\vec{A} \quad (22)$$

vagy

$$d\vec{a} = J \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \vec{N} dA \quad (23)$$

végeredményt, amely *Nanson-formula*ként is ismert. Az inverz összefüggés a fentiekhez hasonló módon is megkapható, de talán egyszerűbb a (22) eredményből kiindulni. Szorozzuk meg a (22) egyenletet balról a deformáció gradiens $\underline{\underline{F}}^T$ transzponáltjával, majd osszuk el az egyenletet a J Jacobi determinánssal.

$$d\vec{A} = J^{-1} \underline{\underline{F}}^T \cdot d\vec{a} \quad (24)$$

vagy

$$d\vec{A} = J^{-1} \underline{\underline{F}}^T \cdot \vec{n} da \quad (25)$$

A kezdeti konfigurációban adott $d\vec{A}$, és a pillanatnyi konfigurációban neki megfelelő $d\vec{a}$ elemi felületek közötti kapcsolatot a (22) vagy (23) összefüggések, az inverz kapcsolatot pedig a (24) vagy (25) összefüggések adják meg.

* * *

A lineáris algebrából ismert egy mátrix inverzének kiszámítására szolgáló

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{\text{adj}(\underline{\underline{A}})^T}{\det(\underline{\underline{A}})} \quad (26)$$

összefüggés, ahol az $\text{adj}(\underline{\underline{A}})$ a mátrix adjungáltját jelenti. Mivel a tenzorok egy adott bázisban (koordinátarendszerben vagy koordináta-rendszerekben) vett reprezentációja egy négyzetes mátrix, ezért a (26) egyenlet érvényes tenzorokra is. Vegyük a (26) transzponáltját, és helyettesítsük be a (21) képlettel együtt a (22) Nanson-formulába.

$$d\vec{a} = \det(\underline{\underline{F}}) \frac{\text{adj}(\underline{\underline{F}})}{\det(\underline{\underline{F}})} \cdot d\vec{A},$$

majd az egyszerűsítések után a

$$d\vec{a} = \text{adj}(\underline{\underline{F}}) \cdot d\vec{A} \quad (27)$$

adódik. Vagyis a deformáció gradiens tenzor adjungáltja teremt kapcsolatot a kezdeti és pillanatnyi konfigurációban lévő felületelemek között.

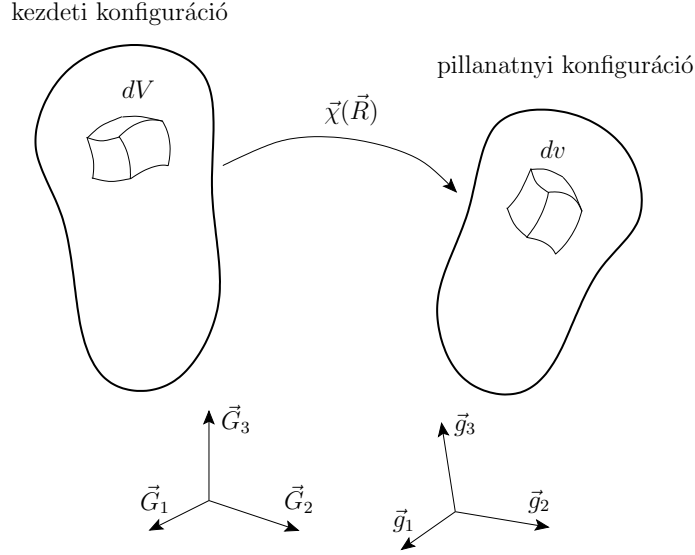
Feladatok

14. feladat. Számítsa ki az 1., 3., 4. és 5. feladatokban szereplő egységoldalú kocka oldallapjainak területét az alakváltozás után a Nanson-formula segítségével. Ellenőrizze a számítást elemi matematikai módszerekkel.

15. feladat. Vezesse le a (24) összefüggést a 13. ábra jelöléseinek felhasználásával.

1.2.3. Elemi térfogat megváltozása

Egy test egy tetszőleges elemi térfogatát jelölje dV a kezdeti konfigurációban, és dv a pillanatnyi konfigurációban (lásd a 14. ábra).



14. ábra. Elemi térfogat alakváltozás során bekövetkező megváltozása.

A két elemi térfogat közötti kapcsolat megadásához írjuk fel részletesebben az elemi térfogatoikat. Feltételezve, hogy mind a dV , mind a dv elegendően kicsinyek, mindkét elemi térfogat kellő pontossággal állítható elő az egy csúcsból kiinduló, az oldallapok metszetgörbéit érintő vektorok úgynevezett vegyes szorzataiként (lásd a 15. ábra).



15. ábra. Elemi térfogat előállítás a kezdeti és pillanatnyi konfigurációban.

Legyen $d\vec{R}_1$, $d\vec{R}_2$ és $d\vec{R}_3$ a kezdeti konfigurációban lévő dV elemi térfogat egy csúcsából kiinduló, az oldallapok metszetgörbéit érintő három vektor (feltételezzük, hogy a dV térfogat nem elfajuló, azaz $dV \neq 0$). Hasonló módon legyen $d\vec{r}_1$, $d\vec{r}_2$ és $d\vec{r}_3$ a pillanatnyi konfigurációban lévő dv elemi térfogat egy csúcsából kiinduló, az oldallapok metszetgörbéit érintő három vektor. Feltételezzük, hogy az alakváltozást leíró deformáció gradiens invertálható, azaz $\det(\underline{F}) \neq 0$. A fentiek alapján a dV és dv térfogatelemek a

$$dV = \left(d\vec{R}_1 \times d\vec{R}_2 \right) \cdot d\vec{R}_3 \quad (28)$$

és

$$dv = (d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2) \cdot d\vec{r}_3 \quad (29)$$

szorzatokkal számíthatóak. A (13) összefüggés felhasználásával a (29) egyenlet jobb oldala átalakítható.

$$dv = \left(\left(\underline{F} \cdot d\vec{R}_1 \right) \times \left(\underline{F} \cdot d\vec{R}_2 \right) \right) \cdot \left(\underline{F} \cdot d\vec{R}_3 \right)$$

Az $\left((\underline{A} \cdot \vec{a}) \times (\underline{A} \cdot \vec{b}) \right) \cdot (\underline{A} \cdot \vec{c}) = \det(\underline{A}) (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ azonosság felhasználásával az \underline{F} deformáció gradiens kiemelhető a jobb oldalból.

$$dv = \det(\underline{F}) \left(d\vec{R}_1 \times d\vec{R}_2 \right) \cdot d\vec{R}_3$$

A (28) összefüggést behelyettesítve a jobb oldalon lévő vegyes szorzat helyébe, és alkalmazva a (21) jelölést a

$$dv = J dV \quad (30)$$

összefüggést kapjuk. Az inverz kapcsolatot a (30) egyenlet mindkét oldalának a J Jacobi-determinánssal történő osztásával kapható meg.

$$dV = J^{-1}dv \quad (31)$$

Összefoglalva kijelenthetjük, hogy a (30) és (31) összefüggések teremtenek kapcsolatot a kezdeti konfigurációban adott dV elemi térfogat és a pillanatnyi konfigurációban adott dv elemi térfogat között.

Feladatok

16. feladat. Számítsa ki az 1., 3., 4. és 5. feladatokban szereplő egységoldalú kocka térfogatát az alakváltozás után a $dv = J dV$ képlet segítségével. Ellenőrizze a számítást elemi matematikai módszerekkel.

17. feladat. Vezesse le a (31) összefüggést a 15. ábra jelöléseinek felhasználásával.

1.3. A deformáció gradiens poláris felbontása

Mint ahogy már az 1.2 fejezetben utaltunk rá, a $\bar{\chi}(\vec{R})$ függvény több információt tartalmaz a vizsgált test mozgásáról, mint amennyire az alakváltozások leírásához szükség van. Az \underline{F} deformáció gradiens a $\bar{\chi}(\vec{R})$ függvény deriválásával áll elő, vagyis a $\bar{\chi}(\vec{R})$ függvényben lévő konstansok, amelyek a test pontjainak helyét határozzák meg, eltűnnek. Ezekre az alakváltozások leírásához szerencsére nincs is szükség, ugyanis ezek a test merev test szerű translációs mozgásával lennének kapcsolatosak. Van azonban még egy másik merev test szerű mozgással kapcsolatos információ is a deformáció gradiensben, amelyet célszerű leválasztani róla. Ez a merev test szerű elfordulás, vagy rotáció. A rotáció deformáció gradiensről történő leválasztásához a következő matematikából ismert tételből indulunk ki.

3. Tétel (poláris felbontás tétele). *Legyen \underline{F} egy valós, nem elfajuló ($\det(\underline{F}) > 0$) tenzor. Az \underline{F} mindig felbontható egy \underline{R} ortogonális transzformáció⁴ (vagy tenzor), és egy \underline{U} vagy \underline{v} szimmetrikus, pozitív definit tenzor szorzatára a következő módon:*

$$\underline{F} = \underline{R} \cdot \underline{U}, \quad (32)$$

vagy

$$\underline{F} = \underline{v} \cdot \underline{R}. \quad (33)$$

Vagyis a deformáció egy \underline{R} forgatás és egy \underline{U} vagy \underline{v} nyújtás (stretch) egymásutánjából áll össze.

4. Definíció. A (32) egyenletben szereplő \underline{U} szimmetrikus, pozitív definit tenzort *jobboldali* vagy *anyag nyújtó tenzornak* nevezzük (material stretch tensor).

A „jobboldali” jelző arra utal, hogy a (32) felbontásban az \underline{R} forgató tenzort jobbról szorozzuk az \underline{U} tenzonnal. Az „anyag” jelző arra utal, hogy az \underline{U} tenzor a kezdeti konfigurációban értelmezett (lásd lejjebb).

5. Definíció. A (33) egyenletben szereplő \underline{v} szimmetrikus, pozitív definit tenzort *baloldali* vagy *térbeli nyújtó tenzornak* nevezzük.

A „baloldali” jelző arra utal, hogy a (33) felbontásban az \underline{R} forgató tenzort balról szorozzuk a \underline{v} tenzonnal. Az „térbeli” jelző arra utal, hogy az \underline{v} tenzor a pillanatnyi konfigurációban értelmezett (lásd lejjebb).

A poláris felbontás szemléltetésére szorozzuk meg a (32) tenzoregyenlet mindkét oldalát a $d\vec{R}$ vektorral jobbról. A (13) alapján az egyenlet mindkét oldala a $d\vec{r}$ vektort adja eredményül, de a jobb oldalon az \underline{U} tenzonnal történő szorzás után kapunk egy részeredményt.

$$\underbrace{\underline{F} \cdot d\vec{R}}_{d\vec{r}} = \underline{R} \cdot \underbrace{\underline{U} \cdot d\vec{R}}_{d\vec{r}} \quad (34)$$

A $d\vec{R}$ vektor egy un. köztes konfigurációban értelmezett vektor. Az \underline{F} deformáció gradiens kétpont tenzor, azaz két koordináta-rendszer között teremt kapcsolatot. Legyen az \underline{R} elforgatás szintén kétpont tenzor. Ekkor viszont az

⁴Akkor nevezzük az \underline{R} transzformációt ortogonálisnak, ha igaz az $\underline{R}^T = \underline{R}^{-1}$ egyenlőség. Ebből következik, hogy $\underline{R}^T \cdot \underline{R} = \underline{R} \cdot \underline{R}^T = \underline{I}$, ahol \underline{I} az egységtenzor. Könnyen belátható még a $\det(\underline{R}) = 1$ egyenlőség is.

\underline{U} már egyértelműen a kezdeti konfigurációhoz kötött tenzort fog jelenteni. Írjuk fel a (34) egyenletet a megfelelő bázisok feltüntetésével is:

$$\underbrace{\left(F_{.J}^i \vec{g}_i \circ \vec{G}^J\right)}_{dr^i \vec{g}_i} \cdot \left(dR^K \vec{G}_K\right) = \underbrace{\left(R_{.J}^i \vec{g}_i \circ \vec{G}^J\right)}_{dr^i \vec{g}_i} \cdot \underbrace{\left(U_{.L}^K \vec{G}_K \circ \vec{G}^L\right)}_{d\vec{R}^K \vec{G}_K} \cdot \left(dR^M \vec{G}_M\right),$$

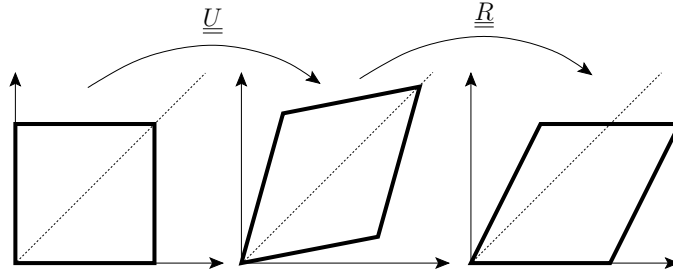
ahol F_J^i az 1.2.1. fejezet $\underline{F} = \frac{\partial x^i}{\partial X^J} (\delta_l^i + x^k \Gamma_{kl}^i) \vec{g}_i \circ \vec{G}^J$ képletének tömörebb $\underline{F} = F_{.J}^i \vec{g}_i \circ \vec{G}^J$ jelöléséből származik. A \vec{g}^n ($n = 1, 2, 3$) vektorokkal jobbról történő szorzás után az

$$F_{.K}^n dR^K = R_{.J}^n U_{.M}^J dR^M$$

egyenletet kapjuk, amelyet a dR^M illetve dR^K koordináták elhagyása és index átnevezések után az

$$F_{.K}^n = R_{.J}^n U_{.K}^J$$

mátrixegyenletként is tudunk írni⁵. Az $\underline{F} = \underline{R} \cdot \underline{U}$ felbontást egy elemi kocka deformációján a 16. ábra szemlélteti.



16. ábra. Elemi kocka alakváltozásának $\underline{F} = \underline{R} \cdot \underline{U}$ felbontása.

Az ábrán jól látható, hogy az $\underline{F} = \underline{R} \cdot \underline{U}$ felbontás során először nyújtjuk az elemi kockát, majd utána merev test szerűen elforgatjuk.

Most vizsgáljuk meg a (33) poláris felbontást. Szorozzuk meg a (33) mindkét oldalát a $d\vec{R}$ vektorral jobbról. A (13) alapján az egyenlet mindkét oldala a $d\vec{r}$ vektort adja eredményül, de a jobb oldalon az \underline{R} tenzorral történő szorzás után kapunk egy részeredményt.

$$\underbrace{\underline{F} \cdot d\vec{R}}_{d\vec{r}} = \underline{v} \cdot \underbrace{\underline{R} \cdot d\vec{R}}_{d\vec{r}} \quad (35)$$

A $d\vec{r}$ vektor egy un. köztes konfigurációban értelmezett vektor. Itt a korábbiakkal összevetve a \underline{v} egyértelműen a pillanatnyi konfigurációhoz kötött tenzort fog jelenteni. (Ezért jelöltük már eleve kis betűvel.) Írjuk fel a (35) egyenletet a megfelelő bázisok feltüntetésével is:

$$\underbrace{\left(F_{.J}^i \vec{g}_i \circ \vec{G}^J\right)}_{dr^i \vec{g}_i} \cdot \left(dR^K \vec{G}_K\right) = \underbrace{\left(v_{.j}^i \vec{g}_i \circ \vec{g}^j\right)}_{dr^i \vec{g}_i} \cdot \underbrace{\left(R_{.L}^k \vec{g}_k \circ \vec{G}^L\right)}_{d\vec{r}^k \vec{g}_k} \cdot \left(dR^M \vec{G}_M\right),$$

ahol F_J^i az (1.2.1). fejezet $\underline{F} = \frac{\partial x^i}{\partial X^J} (\delta_l^i + x^k \Gamma_{kl}^i) \vec{g}_i \circ \vec{G}^J$ képletének tömörebb $\underline{F} = F_{.J}^i \vec{g}_i \circ \vec{G}^J$ jelöléséből származik. A \vec{g}^n ($n = 1, 2, 3$) vektorokkal jobbról történő szorzás után az

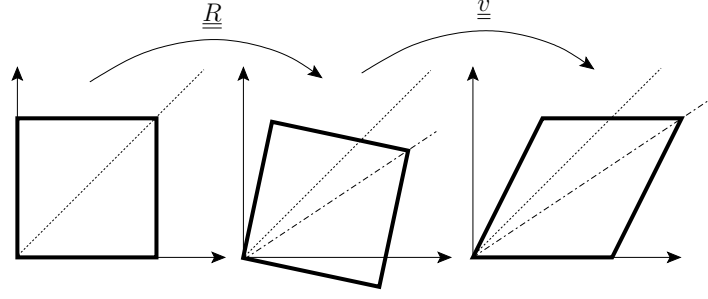
$$F_{.K}^n dR^K = v_{.j}^n R_{.M}^j dR^M$$

egyenletet kapjuk, amelyet a dR^M illetve dR^K koordináták elhagyása és index átnevezések után az

$$F_{.K}^n = v_{.j}^n R_{.K}^j$$

⁵Ha nem írjuk ki a tenzor bázisát, az alsó illetve felső indexnél érdemes jelölni, hogy melyik az első és melyik a második index. Ezt a második index elé írt ponttal tesszük meg. Ennek a mátrixok transzponálásának jelölésénél van szerepe, pl. $(F_{.J}^i)^T = F_J^i$.

mátrixegyenletként is tudunk írni. Az $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{R}}$ felbontást egy elemi kocka deformációján a 17. ábra szemlélteti.



17. ábra. Elemi kocka alakváltozásának $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{R}}$ felbontása.

Az ábrán látható, hogy az $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{R}}$ felbontás során először merev test szerűen elforgatjuk az elemi kockát, majd utána nyújtjuk.

1.3.1. A deformáció gradiens VR poláris felbontása

A következőkben bemutatjuk a poláris felbontás menetét, és az $\underline{\underline{R}}$ forgató tenzor valamint az $\underline{\underline{U}}$ és $\underline{\underline{v}}$ jobb- és baloldali nyújtó tenzorok kiszámításának módszerét. Induljunk ki abból, hogy csak az $\underline{\underline{F}}$ tenzort ismerjük. Szorozzuk meg az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradienst jobbról a saját maga transzponáltjával, és alkalmazzuk még az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradiens (33) poláris felbontását

$$\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T = \underline{\underline{v}} \cdot \underbrace{\underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{R}}^T}_{\underline{\underline{I}}} \cdot \underline{\underline{v}}^T = \underline{\underline{v}}^2, \quad (36)$$

ahol felhasználtuk hogy a $\underline{\underline{v}}$ szimmetrikus. A $\underline{\underline{v}}^2$ az $\underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{v}}^T = \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{v}}$ szorzást jelöli. A $\underline{\underline{v}}^2$ birtokában meg kellene határoznunk a $\underline{\underline{v}}$ tenzort, vagyis az $\underline{\underline{v}}^2$ tenzoron egy gyökvonást kellene elvégeznünk. Egy tenzorból gyököt vonni nem tartozik az egyszerű műveletek közé, azonban ha diagonalizáljuk a tenzort, azaz áttranszformáljuk egy olyan alakba, hogy csak a tenzor mátrixának főátlójában maradjon nullától különböző elem, a gyökvonás a főátlóban álló elemeken elvégzett gyökvonással lesz egyenértékű. A tenzor mátrixának diagonalizálását a sajátérték feladat megoldásán keresztül oldhatjuk meg. Keressük meg az(oka)t a λ_i^2 skalár számo(ka)t és a hozzá(juk) tartozó \vec{e}_i vektor(oka)t, amely(ek)re igaz a következő egyenlet:

$$\underline{\underline{v}}^2 \cdot \vec{e}_i = \lambda_i^2 \vec{e}_i. \quad (37)$$

Az elkövetkező számítások során továbbra is alkalmazzuk az Einstein-féle összegzési konvenciót, de a λ_i sajátértékek indexére nem végzünk el összegzést, és az index értéke mindig meg fog egyezni a mellette álló mennyiség i indexével. Ezt úgy fogjuk jelölni, hogy a λ_i sajátérték indexe álló betűvel lesz jelölve, a másik mennyiség indexe pedig dőlt betűvel (lásd a (37) egyenlet). Rendezzük át a (37) egyenletet felhasználva az $\vec{e}_i = \underline{\underline{I}} \cdot \vec{e}_i$ összefüggést.

$$(\underline{\underline{v}}^2 - \lambda_i^2 \underline{\underline{I}}) \cdot \vec{e}_i = \vec{0} \quad (38)$$

Ez tulajdonképpen egy homogén, lineáris, algebrai egyenletrendszer, amelynek csak akkor van triviálistól különböző megoldása, ha a zárójelben álló együttható mátrix determinánsa nulla, azaz

$$\det(\underline{\underline{v}}^2 - \lambda_i^2 \underline{\underline{I}}) = 0. \quad (39)$$

A determináns kiszámításához szükség van a $\underline{\underline{v}}^2$ tenzor koordinátáira. Írjuk fel ezeket a $\vec{g}_i \circ \vec{g}^j$ bázisban.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{v}}^2 &= \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{v}}^T = (v^i_{\cdot j} \vec{g}_i \circ \vec{g}^j) \cdot (v^k_{\cdot l} \vec{g}^l \circ \vec{g}_k) = v^i_{\cdot j} v^k_{\cdot l} \vec{g}_i \circ \underbrace{\vec{g}^j \cdot \vec{g}^l}_{g^{jl}} \circ \vec{g}_k = \\ &= v^i_{\cdot j} v^k_{\cdot l} g^{jl} \vec{g}_i \circ \vec{g}_k = v^i_{\cdot j} v^{jk} \vec{g}_i \circ \vec{g}_k = v^i_{\cdot j} v^{jk} \vec{g}_i \circ \vec{g}^l g_{lk} = v^i_{\cdot j} v^j_{\cdot l} \vec{g}_i \circ \vec{g}^l = (v^2)_{\cdot l}^i \vec{g}_i \circ \vec{g}^l \end{aligned} \quad (40)$$

Mivel az $\underline{\underline{F}}$, és ezen keresztül a $\underline{\underline{v}}$ is adott, csak a λ_i^2 értékének megfelelő megválasztásával érhető el a (39) egyenlőség teljesülése. A (39) egyenletben szereplő determináns kifejtése után az ún. karakterisztikus egyenletet kapjuk.

$$\lambda_i^6 - (v^2)_I \lambda_i^4 + (v^2)_{II} \lambda_i^2 - (v^2)_{III} = 0, \quad (41)$$

ahol $(v^2)_I$, $(v^2)_{II}$ és $(v^2)_{III}$ a \underline{v} tenzor első, második és harmadik skalár invariánsait jelentik. Az egyes skalár invariánsokra a következő kifejezések adódnak:

$$(v^2)_I = \text{tr}(\underline{v}),$$

ahol a $\text{tr}(\underline{v})$ (trace - nyom) a \underline{v} tenzor mátrixának főátlójában álló elemek összegét jelenti. Az invariáns kifejezés itt azt jelenti, hogy a bázis megválasztásától függetlenül mindig ugyan azt az összeget fogjuk kapni. A második skalár invariánst a

$$(v^2)_{II} = \frac{1}{2} \left((\text{tr}(\underline{v}))^2 - \text{tr}(\underline{v} \cdot \underline{v}) \right)$$

összefüggéssel számíthatjuk ki. A harmadik skalárinvariánsra a \underline{v}^2 determinánsát kapjuk⁶.

$$(v^2)_{III} = \det(\underline{v}^2).$$

A (41) karakterisztikus egyenlet a λ_i^2 -re nézve egy harmadfokú algebrai egyenlet, amelynek mindig van három (nem feltétlenül különböző) megoldása. Mivel a \underline{v} tenzor szimmetrikus és pozitív definit, a megoldások mindig valósak lesznek és értékük mindig nullánál nagyobbra adódik. A (41) karakterisztikus egyenlet λ_i^2 ($i = 1, 2, 3$) megoldásai a \underline{v}^2 tenzor sajátértékei lesznek. Minden egyes λ_i^2 sajátértékhez létezik egy \vec{e}_i sajátvektor, amelyet a (38) homogén, lineáris, algebrai egyenletrendszerbe történő visszahelyettesítéssel kapunk meg. Mivel az egyenletrendszer homogén, a megoldásai, amik az \vec{e}_i vektor koordinátáit jelentik, csak egy konstans erejéig határozottak. Többszörös multiplicitású gyökök esetén több konstans is megjelenik, ahol a konstans(ok) értéke szabadon megválasztható. Végezzük el a sajátvektorok egyre normálását. A normált sajátvektorokat jelölje \vec{n}_i .

$$\vec{n}_i = \frac{\vec{e}_i}{|\vec{e}_i|} \quad (42)$$

Könnyen belátható, hogy igaz lesz az

$$\underline{v}^2 \cdot \vec{n}_i = \lambda_i^2 \vec{n}_i \quad (43)$$

egyenlet is. Igazolható, hogy a sajátvektorok (az \vec{e}_i és az \vec{n}_i is) merőlegesek egymásra. Szorozzuk meg a (43) egyenletet balról az \vec{n}_j ($i \neq j$) sajátvektorral, majd ezután szorozzuk meg a j -edik sajátértékre felírt sajátérték egyenletet balról az \vec{n}_i ($i \neq j$) sajátvektorral.

$$\vec{n}_j \cdot \underline{v}^2 \cdot \vec{n}_i = \lambda_i^2 \vec{n}_j \cdot \vec{n}_i, \quad (44)$$

és

$$\vec{n}_i \cdot \underline{v}^2 \cdot \vec{n}_j = \lambda_j^2 \vec{n}_i \cdot \vec{n}_j. \quad (45)$$

Vonjuk ki egymásból a (44) és (45) egyenleteket.

$$\vec{n}_j \cdot \underline{v}^2 \cdot \vec{n}_i - \vec{n}_i \cdot \underline{v}^2 \cdot \vec{n}_j = (\lambda_i^2 - \lambda_j^2) \vec{n}_j \cdot \vec{n}_i$$

Mivel a \underline{v}^2 tenzor szimmetrikus, az egyenlet bal oldala mindig null értéket vesz fel. Az $i \neq j$ feltétel miatt az elfajuló esetektől eltekintve igaz az $\lambda_i^2 \neq \lambda_j^2$ feltétel is, vagyis a jobb oldal csak akkor lesz nulla, ha $\vec{n}_i \cdot \vec{n}_j = 0$, azaz a sajátvektorok merőlegesek egymásra. Ezt általánosan, a (42) egyenletet is figyelembe véve az

$$\vec{n}_i \cdot \vec{n}_j = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j, \\ 0 & \text{ha } i \neq j. \end{cases} \quad (46)$$

egyenlőséggel is kifejezhetjük. Az \vec{n}_i sajátvektorok reciprok vektorait az

$$\vec{n}^1 = \vec{n}_2 \times \vec{n}_3, \quad \vec{n}^2 = \vec{n}_3 \times \vec{n}_1 \quad \text{és} \quad \vec{n}^3 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

képletekkel számíthatjuk. Tömören írható a

$$\vec{n}^k = \varepsilon^{ijk} \vec{n}_i \times \vec{n}_j \quad (47)$$

⁶Általánosan mondhatjuk, hogy egy \underline{A} tenzor skalár invariánsai az $A_I = \text{tr}(\underline{A})$, $A_{II} = \frac{1}{2} \left((\text{tr}(\underline{A}))^2 - \text{tr}(\underline{A} \cdot \underline{A}) \right)$ és $A_{III} = \det(\underline{A})$ összefüggésekkel számíthatók. De ez csak egy lehetséges választás, mivel a skalár invariánsok skalár-skalár függvényei is skalár invariánsok lesznek.

összefüggés, ahol

$$\varepsilon^{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{az } i, j \text{ és } k \text{ páros permutációi esetén, ha } i \neq j \neq k \neq i, \\ -1 & \text{az } i, j \text{ és } k \text{ páratlan permutációi esetén, ha } i \neq j \neq k \neq i, \\ 0 & \text{ha } i = j \text{ vagy } j = k \text{ vagy } k = i. \end{cases}$$

az un. Levi-Civita-szimbólum. Szorozzuk meg a (47) egyenletet jobbról az \vec{n}_p sajátvektorral skalárisan.

$$\vec{n}^k \cdot \vec{n}_p = \varepsilon^{ijk} (\vec{n}_i \times \vec{n}_j) \cdot \vec{n}_p \quad (48)$$

A normált sajátvektorok ortogonális tulajdonsága miatt

$$\varepsilon_{ijp} = (\vec{n}_i \times \vec{n}_j) \cdot \vec{n}_p,$$

ahol

$$\varepsilon_{ijp} = \begin{cases} 1 & \text{az } i, j \text{ és } p \text{ páros permutációi esetén, ha } i \neq j \neq p \neq i, \\ -1 & \text{az } i, j \text{ és } p \text{ páratlan permutációi esetén, ha } i \neq j \neq p \neq i, \\ 0 & \text{ha } i = j \text{ vagy } j = p \text{ vagy } p = i. \end{cases}$$

Ekkor a reciprok vektorra érvényes

$$\vec{n}^k \cdot \vec{n}_p = \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{ijp} = \delta_p^k \quad (49)$$

összefüggést kapjuk, amely tulajdonképpen a reciprok vektor definíciója. Összevetve ezt a (46) egyenlettel következik, hogy az \vec{n}_i sajátvektor azonosan egyenlő a saját maga reciprok vektorával, azaz az \vec{n}^i vektorral.

A \underline{v}^2 diagonalizálásához szorozzuk meg a (43) egyenletet balról az \vec{n}^j sajátvektorral skalárisan

$$\vec{n}^j \cdot \underline{v}^2 \cdot \vec{n}_i = \lambda_i^2 \vec{n}^j \cdot \vec{n}_i = \lambda_i^2 \delta_i^j, \quad (50)$$

majd szorozzuk meg az egyenletet balról \vec{g}_j -vel és jobbról \vec{g}^i -vel diadikusan.

$$\vec{g}_j \circ \vec{n}^j \cdot \underline{v}^2 \cdot \vec{n}_i \circ \vec{g}^i = \lambda_i^2 \delta_i^j \vec{g}_j \circ \vec{g}^i \quad (51)$$

Könnyen belátható, hogy a bal oldalt balról szorzó $\vec{g}_j \circ \vec{n}^j$ tenzor inverze a bal oldalt jobbról szorzó $\vec{n}_i \circ \vec{g}^i$ tenzornak. Szorozzuk össze az említett két tenzort.

$$(\vec{g}_j \circ \vec{n}^j) \cdot (\vec{n}_i \circ \vec{g}^i) = \vec{g}_j \circ \underbrace{\vec{n}^j \cdot \vec{n}_i}_{\delta_i^j} \circ \vec{g}^i = \delta_i^j \vec{g}_j \circ \vec{g}^i = \vec{g}_i \circ \vec{g}^i = \underline{I},$$

vagyis mivel a szorzatuk az egységtenzor, tényleg egymás inverzei. Vezessük be a

$$\underline{Q} = \vec{n}_i \circ \vec{g}^i \quad (52)$$

és

$$\underline{Q}^{-1} = \vec{g}_j \circ \vec{n}^j, \quad (53)$$

valamint az

$$\underline{\Lambda}^2 = \underline{\Lambda} \cdot \underline{\Lambda} = \lambda_i^2 \delta_i^j \vec{g}_j \circ \vec{g}^i$$

jelöléseket. Ez utóbbi tenzor mátrixa a $\vec{g}_j \circ \vec{g}^i$ bázisban diagonális lesz, azaz csak a főátlóban lesznek nullától különböző elemek, amik nevezetesen a \underline{v}^2 tenzor sajátértékei

$$[\underline{\Lambda}^2] = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}.$$

Amennyiben a \vec{g}^i egy ortonormált bázis, akkor \underline{Q} tenzor $\vec{g}_j \circ \vec{g}^i$ bázisban felírt mátrixának egyes oszlopaiban a \vec{n}_i sajátvektorok helyezkednek el. Ekkor a \underline{Q} inverzére a $\underline{Q}^{-1} = \underline{Q}^T$ összefüggést kapjuk, vagyis ortonormált bázis esetén a \underline{Q} egy ortogonális transzformációt (elforgatást) jelent. Az (51) egyenletet a fenti jelölésekkel a tömörebb

$$\underline{Q}^{-1} \cdot \underline{v}^2 \cdot \underline{Q} = \underline{\Lambda}^2, \quad (54)$$

ortonormált $\underline{\vec{g}}^i$ bázis esetén

$$\underline{\underline{Q}}^T \cdot \underline{\underline{v}}^2 \cdot \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{\Lambda}}^2$$

alakban is írhatjuk. Ezzel tulajdonképpen a $\underline{\underline{v}}^2$ tenzort, és vele együtt az $\underline{\vec{n}}_i$ sajátvektorait transzformáljuk át úgy, hogy a tenzor diagonális legyen a $\underline{\vec{g}}_j \circ \underline{\vec{g}}^i$ bázisban. Hogy ezt jobban lássuk, az indexátnevezések után helyettesítsük be a $\underline{\underline{v}}^2$ tenzor (40) alakját az (51) képletbe.

$$\begin{aligned} \underline{\vec{g}}_j \circ \underline{\vec{n}}^j \cdot (v_{.l}^k v_{.m}^l \underline{\vec{g}}_k \circ \underline{\vec{g}}^m) \cdot \underline{\vec{n}}_i \circ \underline{\vec{g}}^i &= \lambda_i^2 \delta_i^j \underline{\vec{g}}_j \circ \underline{\vec{g}}^i \\ \Downarrow \\ \underbrace{(\underline{\vec{n}}^j \cdot \underline{\vec{g}}_k)}_{(Q^{-1})^j_{.k}} v_{.l}^k v_{.m}^l \underbrace{(\underline{\vec{g}}^m \cdot \underline{\vec{n}}_i)}_{Q_i^m} \underline{\vec{g}}_j \circ \underline{\vec{g}}^i &= \lambda_i^2 \delta_i^j \underline{\vec{g}}_j \circ \underline{\vec{g}}^i \\ \Downarrow \\ ((Q^{-1})^j_{.k} v_{.l}^k v_{.m}^l Q_i^m) \underline{\vec{g}}_j \circ \underline{\vec{g}}^i &= \lambda_i^2 \delta_i^j \underline{\vec{g}}_j \circ \underline{\vec{g}}^i, \end{aligned}$$

ahol

$$Q_i^m = \underline{\vec{g}}^m \cdot (\underline{\vec{n}}_j \circ \underline{\vec{g}}^j) \cdot \underline{\vec{g}}_i = (\underline{\vec{g}}^m \cdot \underline{\vec{n}}_j) \circ \underbrace{(\underline{\vec{g}}^j \cdot \underline{\vec{g}}_i)}_{\delta_i^j} = \underline{\vec{g}}^m \cdot \underline{\vec{n}}_i,$$

és

$$(Q^{-1})^j_{.k} = \underline{\vec{g}}^j \cdot (\underline{\vec{g}}_i \circ \underline{\vec{n}}^i) \cdot \underline{\vec{g}}_k = \underbrace{(\underline{\vec{g}}^j \cdot \underline{\vec{g}}_i)}_{\delta_i^j} \circ (\underline{\vec{n}}^i \cdot \underline{\vec{g}}_k) = \underline{\vec{n}}^j \cdot \underline{\vec{g}}_k.$$

Az $\underline{\vec{n}}_i$ és $\underline{\vec{n}}^j$ sajátvektorok és reciprok sajátvektorok ismeretében az (52) és (53) összefüggésekkel a $\underline{\underline{Q}}$ és $\underline{\underline{Q}}^{-1}$ kiszámítható, majd a $\underline{\underline{\Lambda}}^2$ meghatározható. A $\underline{\underline{\Lambda}}^2$ -ből a $\underline{\underline{\Lambda}}$ gyökvonás útján állítható elő

$$\underline{\underline{\Lambda}} = \sqrt{\underline{\underline{\Lambda}}^2}.$$

A gyökvonást a $\underline{\vec{g}}_j \circ \underline{\vec{g}}^i$ bázisban úgy tudjuk elvégezni, hogy a főátlóban álló elemekből külön-külön gyököt vonunk

$$[\underline{\underline{\Lambda}}] = \left[\sqrt{\underline{\underline{\Lambda}}^2} \right] = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

A $\underline{\underline{\Lambda}}^2$ és a $\underline{\underline{\Lambda}}$ tenzorok ugyan abban a koordinátarendszerben diagonálisak, ezért a sajátvektor rendszerük is megegyezik. Ha a $\underline{\underline{\Lambda}}$ tenzort előállítottuk, akkor az inverz transzformációval, azaz a $\underline{\underline{\Lambda}}$ tenzort balról $\underline{\underline{Q}}$ -val és jobbról $\underline{\underline{Q}}^{-1}$ tenzorral szorozva a $\underline{\underline{v}}$ baloldali nyújtó tenzor előállítható

$$\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\Lambda}} \cdot \underline{\underline{Q}}^{-1} = \underline{\underline{v}}.$$

Ebből következik, hogy $\underline{\underline{v}}$ és $\underline{\underline{v}}^2$ sajátvektorai is megegyeznek.

A $\underline{\underline{v}}^2$ diagonalizálásának lehetséges egy másik megközelítése is. Az (50) egyenletet szorozzuk balról az $\underline{\vec{n}}_j$ és jobbról az $\underline{\vec{n}}^i$ vektorokkal diadikusan.

$$\underbrace{\underline{\vec{n}}_j \circ \underline{\vec{n}}^j}_{\underline{\underline{I}}} \cdot \underline{\underline{v}}^2 \cdot \underbrace{\underline{\vec{n}}_i \circ \underline{\vec{n}}^i}_{\underline{\underline{I}}} = \lambda_i^2 \delta_i^j \underline{\vec{n}}_j \circ \underline{\vec{n}}^i \quad (55)$$

Mivel az $\underline{\vec{n}}_i \circ \underline{\vec{n}}^i$ szorzat az egységtenzorral egyenlő, tulajdonképpen nem csináltunk semmit a $\underline{\underline{v}}^2$ tenzorral, a sajátvektorai változatlanok maradtak, de kicseréltük a bázisát $\underline{\vec{g}}_j \circ \underline{\vec{g}}^i$ -ről $\underline{\vec{n}}_j \circ \underline{\vec{n}}^i$ -re. A $\underline{\underline{v}}^2$ tenzor viszont a sajátvektorainak a bázisában diagonális, és ahogy a jobb oldalból látszik a főátlóban a sajátértékek vannak. Helyettesítsük be a (40) összefüggést az (55) képletbe.

$$\begin{aligned} \underline{\vec{n}}_j \circ \underline{\vec{n}}^j \cdot (v_{.l}^k v_{.m}^l \underline{\vec{g}}_k \circ \underline{\vec{g}}^m) \cdot \underline{\vec{n}}_i \circ \underline{\vec{n}}^i &= \lambda_i^2 \delta_i^j \underline{\vec{n}}_j \circ \underline{\vec{n}}^i \\ \Downarrow \\ (\underline{\vec{n}}^j \cdot \underline{\vec{g}}_k) (v_{.l}^k v_{.m}^l) (\underline{\vec{g}}^m \cdot \underline{\vec{n}}_i) \underline{\vec{n}}_j \circ \underline{\vec{n}}^i &= \lambda_i^2 \delta_i^j \underline{\vec{n}}_j \circ \underline{\vec{n}}^i \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\left((Q^{-1})^j_{.k} v^k_{.l} v^l_{.m} Q^m_{.i} \right) \vec{n}_j \circ \vec{n}^i = \lambda_i^2 \delta_i^j \vec{n}_j \circ \vec{n}^i$$

Sokszor előnyös a $\underline{\underline{v}}$ tenzort a sajátvektorainak a koordinátarendszerében felírni

$$\underline{\underline{v}} = \lambda_i \vec{n}_i \circ \vec{n}^i. \quad (56)$$

Az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradiens poláris felbontásából csak az $\underline{\underline{R}}$ forgató tenzor előállítása van hátra. Szorozzuk be a (33) egyenletet balról a $\underline{\underline{v}}$ tenzor inverzével.

$$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{v}}^{-1} \cdot \underline{\underline{F}}$$

Ezzel a $\underline{\underline{v}}$ baloldali nyújtó és $\underline{\underline{R}}$ forgató tenzorok is előálltak, vagyis elvégeztük az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradiens $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{R}}$ poláris felbontását.

1.3.2. A deformáció gradiens RU poláris felbontása

A következőkben a deformáció gradiens $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}}$ poláris felbontását végezzük el. Mivel a poláris felbontás gondolatmenete nagyon hasonló mint a $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{R}}$ felbontás esete, a felbontást csak vázlatosan, a különbségeket kiemelve végezzük el. Szorozzuk meg az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradienst balról a saját maga transzponáltjával.

$$\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{U}}^T \cdot \underbrace{\underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{R}}}_I \cdot \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}}^2, \quad (57)$$

ahol felhasználtuk, hogy az $\underline{\underline{U}}$ tenzor szimmetrikus. Az $\underline{\underline{U}}^2$ az $\underline{\underline{U}}^T \cdot \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{U}}$ szorzást jelöli. A $\underline{\underline{U}}^2$ birtokában meg kellene határozni a $\underline{\underline{v}}$ tenzort, vagyis az $\underline{\underline{v}}^2$ tenzoron egy gyökkvonást kellene elvégeznünk. Ehhez végezzük el az $\underline{\underline{U}}^2$ diagonizálását. Első lépésként oldjuk meg az

$$\underline{\underline{U}}^2 \cdot \vec{E}_I = \lambda_I^2 \vec{E}_I$$

sajátérték feladatot, azaz keressük meg azokat a λ_I sajátértékeket, amelyek mellett az \vec{E}_I vektorok koordinátái meghatározhatóak az

$$(\underline{\underline{U}}^2 - \lambda_I^2 \underline{\underline{I}}) \cdot \vec{E}_I = \vec{0}$$

homogén, lineáris, algebrai egyenletrendszerből. Ez az egyenletrendszer csak akkor oldható meg, ha

$$\det(\underline{\underline{U}}^2 - \lambda_I^2 \underline{\underline{I}}) = 0.$$

A determináns részletes kifejtéséhez szükség van az $\underline{\underline{U}}^2$ koordinátáira a $\vec{G}_I \circ \vec{G}^J$ bázisban.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{U}}^2 &= \underline{\underline{U}}^T \cdot \underline{\underline{U}} = \left(U_J^I \vec{G}^J \circ \vec{G}_I \right) \cdot \left(U_L^K \vec{G}_K \circ \vec{G}^L \right) = U_J^I U_L^K \vec{G}^J \circ \underbrace{\vec{G}_I \cdot \vec{G}_K}_{G_{IK}} \circ \vec{G}^L = \\ &= U_J^I U_L^K G_{IK} \vec{G}^J \circ \vec{G}^L = U_{JK} U_L^K \vec{G}^J \circ \vec{G}^L = U_{JK} U_L^K \vec{G}_I \circ \vec{G}^L G^{IJ} = U_{.K}^I U_{.L}^K \vec{G}_I \circ \vec{G}^L = (U^2)_{.L}^I \vec{G}_I \circ \vec{G}^L \end{aligned} \quad (58)$$

A determináns kifejtése után a

$$\lambda_I^6 - (U^2)_I \lambda_I^4 + (U^2)_{II} \lambda_I^2 - (U^2)_{III} = 0$$

karakterisztikus egyenletet kapjuk, amely egy harmadfokú algebrai egyenletet jelent a λ_I^2 sajátértékekre. A karakterisztikus egyenletben az egyes skalárinvariánsokra az

$$(U^2)_I = \text{tr}(\underline{\underline{U}}^2),$$

$$(U^2)_{II} = \frac{1}{2} \left((\text{tr}(\underline{\underline{U}}^2))^2 - \text{tr}(\underline{\underline{U}}^2 \cdot \underline{\underline{U}}^2) \right)$$

és

$$(U^2)_{III} = \det(\underline{\underline{U}}^2)$$

mennyiségek adódnak. Az egyenletrendszer megoldásaként a λ_I^2 sajátértékeket és az \vec{E}_I sajátvektorokat kapjuk. Az egyre normált sajátvektorokat jelölje \vec{N}_I .

$$\vec{N}_I = \frac{\vec{E}_I}{|\vec{E}_I|} \quad (59)$$

Könnyen belátható, hogy igaz lesz az

$$\underline{U}^2 \cdot \vec{N}_I = \lambda_I^2 \vec{N}_I \quad (60)$$

egyenlet is. A korábbiakhoz hasonlóan igazolható, hogy a sajátvektorok (az \vec{E}_I és az \vec{N}_I is) merőlegesek egymásra. Ezt általánosan, az (59) egyenletet is figyelembe véve az

$$\vec{N}_I \cdot \vec{N}_J = \begin{cases} 1 & \text{ha } I = J, \\ 0 & \text{ha } I \neq J. \end{cases} \quad (61)$$

egyenlőséggel is kifejezhetjük. Az \vec{N}_I sajátvektorok reciproklvektorait az

$$\vec{N}^1 = \vec{N}_2 \times \vec{N}_3, \quad \vec{N}^2 = \vec{N}_3 \times \vec{N}_1 \quad \text{és} \quad \vec{N}^3 = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$$

képletekkel számíthatjuk. Tömören írható a

$$\vec{N}^K = \varepsilon^{IJK} \vec{N}_I \times \vec{N}_J \quad (62)$$

összefüggés is. Szorozzuk meg ezt az egyenletet jobbról az \vec{N}_P sajátvektorral skalárisan.

$$\vec{N}^K \cdot \vec{N}_P = \varepsilon^{IJK} (\vec{N}_I \times \vec{N}_J) \cdot \vec{N}_P \quad (63)$$

A normált sajátvektorok ortogonális tulajdonsága miatt

$$\varepsilon_{IJP} = (\vec{N}_I \times \vec{N}_J) \cdot \vec{N}_P.$$

Ekkor a reciproklvektorra érvényes

$$\vec{N}^K \cdot \vec{N}_P = \varepsilon^{IJK} \varepsilon_{IJP} = \delta_P^K \quad (64)$$

összefüggést kapjuk, amely tulajdonképpen a reciproklvektor definíciója. Összevetve ezt a (61) egyenlettel következik, hogy az \vec{N}_I sajátvektor azonosan egyenlő a saját maga reciproklvektorával, azaz az \vec{N}^I vektorral.

Az \underline{U}^2 diagonalizálásához szorozzuk meg a (60) egyenletet balról az \vec{N}^J sajátvektorral skalárisan

$$\vec{N}^J \cdot \underline{U}^2 \cdot \vec{N}_I = \lambda_I^2 \vec{N}^J \cdot \vec{N}_I = \lambda_I^2 \delta_I^J, \quad (65)$$

majd szorozzuk meg az egyenletet balról \vec{G}_J -vel és jobbról \vec{G}^I -vel diadikusan.

$$\vec{G}_J \circ \vec{N}^J \cdot \underline{U}^2 \cdot \vec{N}_I \circ \vec{G}^I = \lambda_I^2 \delta_I^J \vec{G}_J \circ \vec{G}^I \quad (66)$$

Könnyen belátható, hogy a bal oldalt balról szorzó $\vec{G}_J \circ \vec{N}^J$ tenzor inverze a bal oldalt jobbról szorzó $\vec{N}_I \circ \vec{G}^I$ tenzornak. Szorozzuk össze az említett két tenzort.

$$\left(\vec{G}_J \circ \vec{N}^J \right) \cdot \left(\vec{N}_I \circ \vec{G}^I \right) = \vec{G}_J \circ \underbrace{\vec{N}^J \cdot \vec{N}_I}_{\delta_I^J} \circ \vec{G}^I = \delta_I^J \vec{G}_J \circ \vec{G}^I = \vec{G}_I \circ \vec{G}^I = \underline{I},$$

vagyis mivel a szorzatuk az egységtenzor, tényleg egymás inverzei. Vezessük be a

$$\underline{\tilde{Q}} = \vec{N}_I \circ \vec{G}^I \quad (67)$$

és

$$\underline{\tilde{Q}}^{-1} = \vec{G}_J \circ \vec{N}^J, \quad (68)$$

valamint az

$$\underline{\tilde{\Lambda}}^2 = \underline{\tilde{\Lambda}} \cdot \underline{\tilde{\Lambda}} = \lambda_I^2 \delta_I^J \vec{G}_J \circ \vec{G}^I$$

jelöléseket. Ez utóbbi tenzor mátrixa a $\vec{G}_J \circ \vec{G}^I$ bázisban diagonális lesz, azaz csak a főátlóban lesznek nullától különböző elemek, amik nevezetesen az $\underline{\underline{U}}^2$ tenzor sajátértékei

$$\left[\underline{\underline{\tilde{\Lambda}}}^2 \right] = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}.$$

Amennyiben a \vec{G}^I egy ortonormált bázis, akkor $\underline{\underline{\tilde{Q}}}$ tenzor $\vec{G}_J \circ \vec{G}^I$ bázisban felírt mátrixának egyes oszlopaiban a \vec{N}_I sajátvektorok helyezkednek el. Ekkor a $\underline{\underline{\tilde{Q}}}$ inverzére a $\underline{\underline{\tilde{Q}}}^{-1} = \underline{\underline{\tilde{Q}}}^T$ összefüggést kapjuk, vagyis ortonormált bázis esetén a $\underline{\underline{\tilde{Q}}}$ egy ortogonális transzformációt (elforgatást) jelent. A (66) egyenletet a fenti jelölésekkel a tömörebb

$$\underline{\underline{\tilde{Q}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{U}}^2 \cdot \underline{\underline{\tilde{Q}}} = \underline{\underline{\tilde{\Lambda}}}^2, \quad (69)$$

ortonormált \vec{G}^I bázis esetén

$$\underline{\underline{\tilde{Q}}}^T \cdot \underline{\underline{U}}^2 \cdot \underline{\underline{\tilde{Q}}} = \underline{\underline{\tilde{\Lambda}}}^2$$

alakban is írhatjuk. Ezzel tulajdonképpen az $\underline{\underline{U}}^2$ tenzort, és vele együtt az \vec{N}_I sajátvektorait transzformáljuk át úgy, hogy a tenzor diagonális legyen a $\vec{G}_J \circ \vec{G}^I$ bázisban. Hogy ezt jobban lássuk, az indexátnevezések után helyettesítsük be az $\underline{\underline{U}}^2$ tenzor (58) alakját a (66) képletbe.

$$\begin{aligned} \vec{G}_J \circ \vec{N}^J \cdot \left(U_{.L}^K U_{.M}^L \vec{G}_K \circ \vec{G}^M \right) \cdot \vec{N}_I \circ \vec{G}^I &= \lambda_I^2 \delta_I^J \vec{G}_J \circ \vec{G}^I \\ &\downarrow \\ \underbrace{\left(\vec{N}^J \cdot \vec{G}_K \right)}_{(\tilde{Q}^{-1})_{.K}^J} U_{.L}^K U_{.M}^L \underbrace{\left(\vec{G}^M \cdot \vec{N}_I \right)}_{\tilde{Q}_{.I}^M} \vec{G}_J \circ \vec{G}^I &= \lambda_I^2 \delta_I^J \vec{G}_J \circ \vec{G}^I \\ &\downarrow \\ \left((\tilde{Q}^{-1})_{.K}^J U_{.L}^K U_{.M}^L \tilde{Q}_{.I}^M \right) \vec{G}_J \circ \vec{G}^I &= \lambda_I^2 \delta_I^J \vec{G}_J \circ \vec{G}^I, \end{aligned}$$

ahol

$$\tilde{Q}_{.I}^M = \vec{G}^M \cdot \left(\vec{N}_J \circ \vec{G}^J \right) \cdot \vec{G}_I = \left(\vec{G}^M \cdot \vec{N}_J \right) \circ \underbrace{\left(\vec{G}^J \cdot \vec{G}_I \right)}_{\delta_I^J} = \vec{G}^M \cdot \vec{N}_I,$$

és

$$\left(\tilde{Q}^{-1} \right)_{.K}^J = \vec{G}^J \cdot \left(\vec{G}_I \circ \vec{N}^I \right) \cdot \vec{G}_K = \underbrace{\left(\vec{G}^J \cdot \vec{G}_I \right)}_{\delta_I^J} \circ \left(\vec{N}^I \cdot \vec{G}_K \right) = \vec{N}^J \cdot \vec{G}_K.$$

Az \vec{N}_I és \vec{N}^J sajátvektorok és reciprok sajátvektorok ismeretében a (67) és (68) összefüggésekkel a $\underline{\underline{\tilde{Q}}}$ és $\underline{\underline{\tilde{Q}}}^{-1}$ kiszámítható, majd a $\underline{\underline{\tilde{\Lambda}}}^2$ meghatározható. A $\underline{\underline{\tilde{\Lambda}}}^2$ -ből a $\underline{\underline{\tilde{\Lambda}}}$ gyökvonás útján állítható elő

$$\underline{\underline{\tilde{\Lambda}}} = \sqrt{\underline{\underline{\tilde{\Lambda}}}^2}.$$

A gyökvonást a $\vec{G}_J \circ \vec{G}^I$ bázisban úgy tudjuk elvégezni, hogy a főátlóban álló elemekből külön-külön gyököt vonunk

$$\left[\underline{\underline{\tilde{\Lambda}}} \right] = \left[\sqrt{\underline{\underline{\tilde{\Lambda}}}^2} \right] = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

A $\underline{\underline{\tilde{\Lambda}}}^2$ és a $\underline{\underline{\tilde{\Lambda}}}$ tenzorok ugyan abban a koordinátarendszerben diagonálisak, ezért a sajátvektor rendszerük is megegyezik. Ha a $\underline{\underline{\tilde{\Lambda}}}$ tenzort előállítottuk, akkor az inverz transzformációval, azaz a $\underline{\underline{\tilde{\Lambda}}}$ tenzort balról $\underline{\underline{\tilde{Q}}}$ -val és jobbról $\underline{\underline{\tilde{Q}}}^{-1}$ tenzorral szorozva az $\underline{\underline{U}}$ jobboldali nyújtó tenzor előállítható

$$\underline{\underline{\tilde{Q}}} \cdot \underline{\underline{\tilde{\Lambda}}} \cdot \underline{\underline{\tilde{Q}}}^{-1} = \underline{\underline{U}}.$$

Ebból következik, hogy \underline{U} és \underline{U}^2 sajátvektorai is megegyeznek.

Az \underline{U}^2 diagonalizálásának lehetséges egy másik megközelítése is. A (65) egyenletet szorozzuk balról az \vec{N}_J és jobbról az \vec{N}^I vektorokkal diadikusan.

$$\underbrace{\vec{N}_J \circ \vec{N}^J}_{\underline{U}} \cdot \underline{U}^2 \cdot \underbrace{\vec{N}_I \circ \vec{N}^I}_{\underline{U}} = \lambda_I^2 \delta_I^J \vec{N}_J \circ \vec{N}^I \quad (70)$$

Mivel az $\vec{N}_I \circ \vec{N}^I$ szorzat az egységtenzorra egyenlő, tulajdonképpen nem csináltunk semmit az \underline{U}^2 tenzorral, a sajátvektorai változatlanok maradtak, de kicseréltük a bázisát $\vec{G}_J \circ \vec{G}^I$ -ről $\vec{N}_J \circ \vec{N}^I$ -re. Az \underline{U}^2 tenzor viszont a sajátvektorainak a bázisában diagonális, és ahogy a jobb oldalból látszik a főátlóban a sajátértékek vannak. Helyettesítsük be az (58) összefüggést a (70) képletbe.

$$\begin{aligned} \vec{N}_J \circ \vec{N}^J \cdot \left(U_{.L}^K U_{.M}^L \vec{G}_K \circ \vec{G}^M \right) \cdot \vec{N}_I \circ \vec{N}^I &= \lambda_I^2 \delta_I^J \vec{N}_J \circ \vec{N}^I \\ \downarrow \\ \left(\vec{N}^J \cdot \vec{G}_K \right) \left(U_{.L}^K U_{.M}^L \right) \left(\vec{G}^M \cdot \vec{N}_I \right) \vec{N}_J \circ \vec{N}^I &= \lambda_I^2 \delta_I^J \vec{N}_J \circ \vec{N}^I \\ \downarrow \\ \left(\left(\vec{Q}^{-1} \right)^J_{.K} U_{.L}^K U_{.M}^L \vec{Q}_I^M \right) \vec{N}_J \circ \vec{N}^I &= \lambda_I^2 \delta_I^J \vec{N}_J \circ \vec{N}^I \end{aligned}$$

Sokszor előnyös a \underline{U} tenzort a sajátvektorainak a koordinátarendszerében felírni

$$\underline{U} = \lambda_I \vec{N}_I \circ \vec{N}^I. \quad (71)$$

Az \underline{F} deformáció gradiens poláris felbontásából csak az \underline{R} forgató tenzor előállítására van hátra. Szorozzuk be a (32) egyenletet jobbról az \underline{U} tenzor inverzével.

$$\underline{R} = \underline{F} \cdot \underline{U}^{-1}$$

Ezzel az \underline{U} jobboldali nyújtó és \underline{R} forgató tenzorok is előálltak, vagyis elvégeztük az \underline{F} deformáció gradiens $\underline{F} = \underline{R} \cdot \underline{U}$ poláris felbontását.

1.3.3. A nyújtó tenzorok sajátértékei és sajátvektorai közötti összefüggések

Most vizsgáljuk meg azt, hogy milyen kapcsolatban állnak egymással a \underline{v} tenzor λ_i sajátértékei illetve \vec{n}_i sajátvektorai és a \underline{U} tenzor λ_I sajátértékei illetve \vec{N}_I sajátvektorai. Szorozzuk meg az \underline{F} deformáció gradiensét egyszer balról, egyszer pedig jobbról a saját maga transzponáltjával, és alkalmazzuk mindkét esetben a (32) és (33) poláris felbontásokat.

$$\underline{F}^T \cdot \underline{F} = \underline{U}^2 = \underline{R}^T \cdot \underline{v}^T \cdot \underline{v} \cdot \underline{R} = \underline{R}^T \cdot \underline{v}^2 \cdot \underline{R} \quad (72)$$

$$\underline{F} \cdot \underline{F}^T = \underline{v}^2 = \underline{R} \cdot \underline{U} \cdot \underline{U}^T \cdot \underline{R}^T = \underline{R} \cdot \underline{U}^2 \cdot \underline{R}^T \quad (73)$$

Látható, hogy az \underline{U}^2 tenzorból egy ortogonális transzformációval (elforgatással) kapható meg a \underline{v}^2 tenzor. Ez azt jelenti, hogy a két tenzor sajátértékei megegyeznek egymással, vagyis $\lambda_i = \lambda_I$ (ha $i = I = 1, 2$ vagy 3). Helyettesítsük be a (72) és (73) egyenletekbe a (71) és (56) összefüggések négyzetét.

$$\begin{aligned} \underline{U}^2 &= \lambda_I^2 \vec{N}_I \circ \vec{N}^I = \underline{R}^T \cdot \underline{v}^2 \cdot \underline{R} = \lambda_i^2 \underbrace{\underline{R}^T \cdot \vec{n}_i}_{\vec{N}_I} \circ \underbrace{\vec{n}^i \cdot \underline{R}}_{\vec{N}^I} \\ \underline{v}^2 &= \lambda_i^2 \vec{n}_i \circ \vec{n}^i = \underline{R} \cdot \underline{U}^2 \cdot \underline{R}^T = \lambda_i^2 \underbrace{\underline{R} \cdot \vec{N}_I}_{\vec{n}_i} \circ \underbrace{\vec{N}^I \cdot \underline{R}^T}_{\vec{n}^i} \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy

$$\vec{n}_i = \underline{R} \cdot \vec{N}_I$$

és

$$\vec{n}^i = \vec{N}^I \cdot \underline{R}^T,$$

valamint ezek inverzei, az

$$\vec{N}_I = \underline{R}^T \cdot \vec{n}_i$$

és

$$\vec{N}^I = \vec{n}^i \cdot \underline{R},$$

vagyis az \underline{U} sajátvektorai a \underline{v} sajátvektoraiból (és fordítva) az \underline{R} ortogonális transzformáció útján, a fenti összefüggések segítségével kaphatók meg. Könnyen belátható, hogy

$$\underline{R} = \vec{n}_i \circ \vec{N}^I = \vec{n}^i \circ \vec{N}_I,$$

ugyanis

$$\begin{aligned} \vec{n}_i &= \underline{R} \cdot \vec{N}_I = (\vec{n}_i \circ \vec{N}^I) \cdot \vec{N}_I = \vec{n}_i \circ \underbrace{\vec{N}^I \cdot \vec{N}_I}_1, \\ \vec{n}^i &= \vec{N}^I \cdot \underline{R}^T = \vec{N}^I \cdot (\vec{N}_I \circ \vec{n}^i) = \underbrace{\vec{N}^I \cdot \vec{N}_I}_1 \circ \vec{n}^i, \\ \vec{N}_I &= \underline{R}^T \cdot \vec{n}_i = (\vec{N}_I \circ \vec{n}^i) \cdot \vec{n}_i = \vec{N}_I \circ \underbrace{\vec{n}^i \cdot \vec{n}_i}_1, \\ \vec{N}^I &= \vec{n}^i \cdot \underline{R} = \vec{n}^i \cdot (\vec{n}_i \circ \vec{N}^I) = \underbrace{\vec{n}^i \cdot \vec{n}_i}_1 \circ \vec{N}^I. \end{aligned}$$

A fentieknek megfelelően írjuk fel a deformáció gradienst az \vec{n}_i , \vec{n}^i , \vec{N}_I és \vec{N}^I sajátvektorok bázisában. Helyettesítsük be a (71) összefüggést a (32) poláris felbontásba

$$\underline{F} = \underline{R} \cdot (\lambda_I \vec{N}_I \circ \vec{N}^I) = \lambda_I \underbrace{\underline{R} \cdot \vec{N}_I}_{\vec{n}_i} \circ \vec{N}^I = \lambda_I \vec{n}_i \circ \vec{N}^I,$$

vagy az (56) összefüggést a (33) poláris felbontásba

$$\underline{F} = (\lambda_i \vec{n}_i \circ \vec{n}^i) \cdot \underline{R} = \lambda_i \vec{n}_i \circ \underbrace{\vec{n}^i \cdot \underline{R}}_{\vec{N}^I} = \lambda_i \vec{n}_i \circ \vec{N}^I.$$

Feladatok

18. feladat. Számítsa ki az 1., 2.(!), 3., 4. és 5. feladatokban megadott leképezések deformáció gradiensének első, második és harmadik skalár invariánsait.

19. feladat. Számítsa ki az 1., 2.(!), 3., 4. és 5. feladatokban megadott leképezések deformáció gradiensének sajátértékeit és sajátvektorait.

20. feladat. Végezze el az 1., 2.(!), 3., 4. és 5. feladatok leképezéséhez tartozó \underline{F} deformáció gradiensek $\underline{F} = \underline{R} \cdot \underline{U}$ és $\underline{F} = \underline{v} \cdot \underline{R}$ poláris felbontását. Írja fel az \underline{R} , \underline{U} és \underline{v} tenzorok mátrixait a megfelelő bázisokban.

21. feladat. Hasonlítsa össze az 1., 2.(!), 3., 4. és 5. feladatok leképezéséhez tartozó \underline{F} deformáció gradiensek és \underline{U} illetve \underline{v} tenzorok sajátértékeit és sajátvektorait. Mit lehet elmondani az \underline{U} és \underline{v} tenzorok sajátvektorainak és az \underline{R} tenzornak a kapcsolatáról?

22. feladat. Számítsa ki az 1., 2.(!), 3., 4. és 5. feladatokban megadott leképezésekhez tartozó \underline{U} és \underline{v} tenzorok skalár invariánsait, és hasonlítsa össze őket a 18. feladatban kapott eredményekkel.

1.4. Alakváltozási tenzorok

Az előző fejezetben bemutatott \underline{U} és \underline{v} jobb- és baloldali nyújtó tenzorokat úgy kaptuk meg, hogy az \underline{F} deformáció gradienstről leválasztottuk az \underline{R} forgató tenzort. Ezért a nyújtó tenzorok mentesek mindenféle merev test szerű mozgástól, tisztán csak a test alakváltozását írják le. Ennek ellenére az esetek többségében mégsem ezeket a tenzorokat szokás használni az alakváltozások leírására. A következő fejezetekben újabb alakváltozási tenzorokat fogunk definiálni.

1.4.1. Jobboldali Cauchy-Green alakváltozási tenzor

Számítsuk ki, hogy egy test egy tetszőleges pontjában egy kezdetben $d\vec{R}$ vonalelem *hossza* a test alakváltozása során hogyan változik meg. Legyen kezdetben a vonalelem hossza dS , iránya pedig \vec{E} , azaz

$$d\vec{R} = dS\vec{E}, \quad (74)$$

ahol $|\vec{E}| = 1$. A vonalelem dS hosszát a

$$\sqrt{d\vec{R} \cdot d\vec{R}} = \sqrt{dS^2 \vec{E} \cdot \vec{E}} = dS \quad (75)$$

összefüggéssel számolhatjuk ki. Az alakváltozás után az vonalelem (elemi vonalszakasz) hossza és iránya is megváltozik. A deformált vonalelemet a (13) képlettel határozhatjuk meg. Jelöljük a deformált vonalelem hosszát ds -sel, irányát pedig \vec{e} -vel. Ezek alapján

$$d\vec{r} = ds \vec{e}, \quad (76)$$

ahol $|\vec{e}| = 1$. A deformált $d\vec{r}$ vonalelem hosszát a

$$\sqrt{d\vec{r} \cdot d\vec{r}} = \sqrt{ds^2 \vec{e} \cdot \vec{e}} = ds \quad (77)$$

összefüggéssel kapjuk meg. Most számítsuk ki a ds hosszát a $d\vec{R}$ vonalelem méretének és irányának, valamint az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradiensnek a segítségével. Helyettesítsük be a (13) és (74) összefüggéseket a (77) egyenletbe.

$$ds = \sqrt{d\vec{R} \cdot \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} \cdot d\vec{R}} = dS \sqrt{\vec{E} \cdot \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{E}} \quad (78)$$

A könnyebb érthetőség kedvéért írjuk fel ugyan ezt a bázisok feltüntetésével is

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx^i \vec{g}_i) \cdot (dx^j \vec{g}_j)} = \sqrt{\left((F^i_{\cdot J} \vec{g}_i \circ \vec{G}^J) \cdot dX^K \vec{G}_K \right) \cdot \left((F^l_{\cdot M} \vec{g}_l \circ \vec{G}^M) \cdot dX^N \vec{G}_N \right)} = \\ &= \sqrt{(dX^J F^i_{\cdot J} \vec{g}_i) \cdot (dX^M F^l_{\cdot M} \vec{g}_l)} = \sqrt{dX^J F^i_{\cdot J} g_{il} F^l_{\cdot M} dX^M} = \\ &= \sqrt{dS E^J F^i_{\cdot J} g_{il} F^l_{\cdot M} E^M} = dS \sqrt{E^J F^i_{\cdot J} g_{il} F^l_{\cdot M} E^M}, \end{aligned}$$

ahol $d\vec{R} = dS\vec{E} = dS E^I \vec{G}_I$. Jól látszik, hogy a gyökjel alatt álló $F^i_{\cdot J}$ tenzor koordináta J második indexét az E^J , míg az i első indexét a g_{il} metrikus tenzoron keresztül az $F^l_{\cdot M}$ tenzor koordináta l indexe „szorozza”. Emiatt kell a (78) egyenlet jobb oldalán a gyök alatt a bal oldalon álló deformáció gradienset transzponálni. Vezessünk be egy új jelölést az $\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}}$ tenzorra.

6. Definíció. A deformáció gradiens tenzor saját transzponáltjával vett

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}}$$

szorzatát *jobboldali Cauchy-Green alakváltozási tenzornak* nevezzük, és $\underline{\underline{C}}$ -vel jelöljük. Deformálatlan esetben $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{I}}$.

Az elnevezésben azért szerepel a jobboldali jelző, mert jobb oldalról szorzunk az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradienssel (és balról a transzponáltjával). A $\underline{\underline{C}}$ a kezdeti konfigurációban értelmezett tenzor, ugyanis

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} = \left(F^i_{\cdot J} \vec{G}^J \circ \vec{g}_i \right) \cdot \left(F^k_{\cdot L} \vec{g}_k \circ \vec{G}^L \right) = F^i_{\cdot J} g_{ik} F^k_{\cdot L} \vec{G}^J \circ \vec{G}^L = C_{JL} \vec{G}^J \circ \vec{G}^L. \quad (79)$$

A $\underline{\underline{C}}$ jobboldali Cauchy-Green alakváltozási tenzor tulajdonképpen a deformált test (pillanatnyi konfiguráció) kezdeti konfigurációba áttranszformált metrikus tenzora, vagyis a segítségével tudjuk megmondani a kezdeti konfigurációban lévő vonalelem pillanatnyi konfigurációban mérhető hosszát. Osszuk el a (78) egyenlet mindkét oldalát a dS kezdeti hosszal.

7. Definíció. Egy elemi vonalszakasz pillanatnyi konfigurációban vett ds hosszának és kezdeti konfigurációban vett dS hosszának

$$\lambda_s = \frac{ds}{dS}$$

hányadosát *vonalelem aránynak*, vagy *fajlagos nyúlásnak* nevezzük. Ha nincs alakváltozás, akkor $\lambda_s = 1$.

A (78) felhasználásával a λ_s fajlagos nyúlás az

$$\lambda_s = \sqrt{\underline{\vec{E}} \cdot \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\vec{E}}} = \sqrt{\underline{\vec{E}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\vec{E}}} \quad (80)$$

alakban is írható. Az (57) egyenletből azt kapjuk, hogy

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}}^2. \quad (81)$$

Ez azt jelenti, hogy a $\underline{\underline{C}}$ jobboldali Cauchy-Green alakváltozási tenzor sajátértékei és sajátvektorai megegyeznek az $\underline{\underline{U}}$ jobboldali nyújtó tenzor $\underline{\underline{U}}^2$ négyzetének λ_I^2 sajátértékeivel és \vec{N}_I és \vec{N}^I sajátvektoraiival. Emiatt a sajátvektorok koordinátarendszerében (bázisában) a $\underline{\underline{C}}$ jobboldali Cauchy-Green alakváltozási tenzor a

$$\underline{\underline{C}} = \lambda_I^2 \vec{N}_I \circ \vec{N}^I \quad (82)$$

alakban írható. Mutasson a $d\vec{R}_I$ elemi vonalszakasz az I -edik sajátvektor irányába, azaz $d\vec{R}_I = dS\vec{N}_I$. Ekkor a (80) és (82) felhasználásával

$$\lambda_s = \sqrt{\lambda_I^2 \vec{N}_I \cdot \vec{N}_I \circ \vec{N}^I \cdot \vec{N}_I} = \sqrt{\lambda_I^2} = \lambda_I,$$

vagyis a λ_I az \vec{N}_I irányban bekövetkező fajlagos nyúlást jelenti. A λ_I fajlagos nyúlást főnyúlásnak, az \vec{N}_I irányt pedig alakváltozási főiránynak is nevezzük.

Feladatok

23. feladat. Számítsa ki az 1., 2.(!), 3., 4. és 5. feladatokban megadott leképezések jobboldali Cauchy-Green alakváltozási tenzorait.

24. feladat. Számítsa ki az 1., 2.(!), 3., 4. és 5. feladatokban megadott leképezések esetén a kezdeti konfigurációban az egyes koordinátatengelyek irányába mutató egységvektorok hosszát a deformáció után (a pillanatnyi konfigurációban).

1.4.2. Green-Lagrange alakváltozási tenzor

A következő két fejezetben olyan kezdeti konfigurációban értelmezett alakváltozási tenzorok kerülnek bemutatásra, amelyek kevésbé szemléletesek, kevésbé tűnnek használhatónak, azonban a későbbiekben, amikor az alakváltozási energiáról és a feszültségi tenzorokról lesz szó, nélkülözhetetlenek bizonyulnak. Az első ilyen tenzor bevezetéséhez számoljuk ki a következőt: a dS hosszúságú és \vec{E} irányú elemi vonalszakasz megváltozott ds hosszát emeljük négyzetre, és vonjuk ki belőle az eredeti elemi vonalszakasz hosszának négyzetét. Az eredményt osszuk el az eredeti vonalszakasz hossz négyzetének kétszeresével. A (78) és (81) összefüggések felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{ds^2 - dS^2}{dS^2} &= \frac{1}{2} \frac{dS^2 \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\vec{E}} - dS^2}{dS^2} = \frac{1}{2} \frac{dS^2 \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\vec{E}} - dS^2 \overbrace{\underline{\vec{E}} \cdot \underline{\underline{I}} \cdot \underline{\vec{E}}}^1}{dS^2} = \\ &= \frac{1}{2} \underline{\vec{E}} \cdot (\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}}) \cdot \underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}} \cdot \left(\frac{1}{2} (\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}}) \right) \cdot \underline{\vec{E}}. \end{aligned}$$

Az utolsó tagban zárójelben álló tenzorra vezessünk be egy új jelölést.

8. Definíció. Az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradiens vagy a $\underline{\underline{C}}$ jobboldali Cauchy-Green alakváltozási tenzor segítségével számított

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}}) \quad (83)$$

tenzort *Green-Lagrange alakváltozási tenzornak* nevezzük. Deformáció mentes állapotban $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{0}}$, ahol $\underline{\underline{0}}$ a zérus tenzor.

Az $\underline{\underline{E}}$ a kezdeti konfigurációban értelmezett mennyiség. Ennek belátásához használjuk fel a (79) összefüggést.

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left(F_J^i g_{ik} F_L^k \vec{G}^J \circ \vec{G}^L - G_{JL} \vec{G}^J \circ \vec{G}^L \right) = \frac{1}{2} \left(F_J^i g_{ik} F_L^k - G_{JL} \right) \vec{G}^J \circ \vec{G}^L =$$

$$= \frac{1}{2} (C_{JL} - G_{JL}) \vec{G}^J \circ \vec{G}^L = E_{JL} \vec{G}^J \circ \vec{G}^L,$$

ahol $\underline{\underline{I}} = \vec{G}_L \circ \vec{G}^L = g_{JL} \vec{G}^J \circ \vec{G}^L$. Annak kiderítéséhez, hogy mik az $\underline{\underline{E}}$ Green-Lagrange alakváltozási tenzor sajátértékei és sajátvektorai, írjuk fel az $\underline{\underline{E}}$ -t a $\underline{\underline{C}}$ jobboldali Cauchy-Green alakváltozási tenzor sajátvektoraiból álló bázisban (lásd a (82) képlet).

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left(\lambda_I^2 \vec{N}_I \circ \vec{N}^I - \vec{N}_I \circ \vec{N}^I \right) = \left(\frac{1}{2} (\lambda_I^2 - 1) \right) \vec{N}_I \circ \vec{N}^I,$$

ahol $\underline{\underline{I}} = \vec{N}_I \circ \vec{N}^I$. Látható, hogy az $\underline{\underline{E}}$ Green-Lagrange alakváltozási tenzor diagonális az $\vec{N}_I \circ \vec{N}^I$ bázisban, ebből következik, hogy sajátvektorai megegyeznek a $\underline{\underline{C}}$ jobboldali Cauchy-Green alakváltozási tenzor sajátvektoraival, sajátértékei pedig az $\frac{1}{2} (\lambda_I^2 - 1)$ értékek lesznek ($I = 1, 2, 3$).

1.4.3. További kezdeti konfigurációban értelmezett alakváltozási tenzorok

A további kezdeti konfigurációban értelmezett tenzorok jelentősége kisebb, de érdemes megemlíteni őket.

9. Definíció. A $\underline{\underline{C}}$ jobboldali Cauchy-Green alakváltozási tenzor

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}^{-1} \quad (84)$$

inverzét *Piola-féle alakváltozási tenzornak* nevezzük, és $\underline{\underline{B}}$ -vel jelöljük.

A $\underline{\underline{B}}$ tenzor a bázisok és koordináták feltüntetésével az

$$\underline{\underline{B}} = (C^{-1})^{IJ} \vec{G}_I \circ \vec{G}_J = B^{IJ} \vec{G}_I \circ \vec{G}_J \quad (85)$$

alakban írható. Ennek belátásához szorozzuk össze a $\underline{\underline{C}}$ és $\underline{\underline{B}}$ tenzorokat felhasználva a (79) és (85) alakokat.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{B}} &= \left(C_{IJ} \vec{G}^I \circ \vec{G}^J \right) \cdot \left(B^{KL} \vec{G}_K \circ \vec{G}_L \right) = C_{IJ} B^{KL} \vec{G}^I \circ \underbrace{\vec{G}^J \cdot \vec{G}_K}_{\delta_K^J} \circ \vec{G}_L = \\ &= C_{IJ} B^{JL} \vec{G}^I \circ \vec{G}_L = C_{IJ} (C^{-1})^{JL} \vec{G}^I \circ \vec{G}_L = \delta_I^L \vec{G}^I \circ \vec{G}_L = \vec{G}^I \circ \vec{G}_I = \underline{\underline{I}} \end{aligned}$$

Ha a $\underline{\underline{C}}$ jobboldali Cauchy-Green alakváltozási tenzor a sajátvektorok bázisában a (82) összefüggéssel írható, akkor a (84) miatt

$$\underline{\underline{B}} = \lambda_I^{-2} \vec{N}_I \circ \vec{N}^I,$$

vagyis a $\underline{\underline{B}}$ sajátértékei megegyeznek a $\underline{\underline{C}}$ sajátértékeinek inverzeivel.

10. Definíció. Az $\underline{\underline{U}}$ jobboldali nyújtó tenzor felhasználásával kapott

$$\underline{\underline{H}} = \ln \underline{\underline{U}}$$

tenzort kezdeti konfigurációban értelmezett *Hencky-féle alakváltozási tenzornak* nevezzük, és $\underline{\underline{H}}$ -val jelöljük.

Felmerülhet a kérdés, hogy hogyan kell kiszámítani egy tenzor logaritmusát. Ha a tenzort a sajátvektorai bázisába transzformáljuk, akkor a logaritmus függvényt a főátlóban lévő elemekre kell alkalmazni.

$$\underline{\underline{H}} = \ln (\lambda_I) \vec{N}_I \circ \vec{N}^I$$

Innen rögtön látszik az is, hogy a $\underline{\underline{H}}$ Hencky-féle alakváltozási tenzor sajátvektorai megegyeznek az $\underline{\underline{U}}$ jobboldali nyújtó tenzor sajátvektoraival.

Megjegyzés: Tekintsünk egy kezdetben L hosszúságú vonalszakaszt. Nyújtsuk meg ezt a vonalszakaszt úgy, hogy a hossza l legyen. Bontsuk fel a megnyújtás folyamatát kis szakaszokra, amelyek során mindig csak egy kis $d\vec{l} \ll l - L$ értékkel növeljük a szakasz hosszát. Vezessünk be egy új mennyiséget, amelyet a fajlagos nyúlás növekményének fogunk nevezni (Az elnevezés és jelölés a kis alakváltozások elméletéből származik, és nem összetévesztendő az itt használt szintén fajlagos nyúlásnak nevezett λ -val.).

$$d\varepsilon = \frac{d\vec{l}}{l}, \quad (86)$$

ahol a betűk fölött lévő hullám arra utal, hogy az adott mennyiséget a nyújtás során egy közbülső időpillanatban vesszük. Ha összegezzük az L hosszról l hosszra történő nyújtás során az összes $d\varepsilon$ fajlagos nyúlás növekményt, megkapjuk a teljes fajlagos nyúlást.

$$\varepsilon = \int_L^l d\varepsilon,$$

vagy behelyettesítve a (86) összefüggést

$$\varepsilon = \int_L^l \frac{d\tilde{l}}{\tilde{l}} = \left[\ln(\tilde{l}) \right]_L^l = \ln\left(\frac{l}{L}\right).$$

Ha most azt mondjuk, hogy legyen $L = dS$ és $l = ds$, akkor

$$\varepsilon = \ln\left(\frac{ds}{dS}\right) = \ln(\lambda_s).$$

Fejtsük sorba a logaritmus függvényt az egy körül a lineáris tagokig bezárólag

$$\varepsilon = \ln(\lambda_s) \approx \lambda_s - 1,$$

vagyis

$$\lambda_s \approx 1 + \varepsilon.$$

11. Definíció. Az $\vec{N}_I \circ \vec{N}^I$ bázisban diagonális

$$\underline{\underline{E}}^{(n)} = f(\lambda_I) \vec{N}_I \circ \vec{N}^I$$

tenzort *általános Lagrange-féle alakváltozási tenzor*nak nevezzük, ha az $f(\lambda)$ függvény monoton növekvő, és igaz rá az $f(1) = 0$ és $\frac{df}{d\lambda}\Big|_{\lambda=1} = 1$ feltétel.

Legyen $f(\lambda) = \frac{1}{n}(\lambda^n - 1)$, ahol a $\lambda = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$, vagyis egy tetszőleges egész szám. Ekkor az általános Lagrange-féle alakváltozási tenzor az

$$\underline{\underline{E}}^{(n)} = \frac{1}{n}(\lambda_I^n - 1) \vec{N}_I \circ \vec{N}^I \quad (87)$$

alakban írható. Az ezzel a függvénnyel kapott alakváltozási tenzorokat különböző n értékekre az 1. táblázat mutatja.

n	Jele	Sajátvektorok bázisában	Tenzoros alakban	Elnevezés
\vdots		\vdots	\vdots	\vdots
2	$\underline{\underline{E}} =$	$\underline{\underline{E}}^{(2)} = \frac{1}{2}(\lambda_I^2 - 1) \vec{N}_I \circ \vec{N}^I =$	$\frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}})$	Green-Lagrange
1		$\underline{\underline{E}}^{(1)} = (\lambda_I - 1) \vec{N}_I \circ \vec{N}^I =$	$\underline{\underline{U}} - \underline{\underline{I}}$	Biot-féle
0	$\underline{\underline{H}} =$	$\underline{\underline{E}}^{(0)} = \ln(\lambda_I) \vec{N}_I \circ \vec{N}^I =$	$\ln(\underline{\underline{U}})$	Hencky-féle
-1		$\underline{\underline{E}}^{(-1)} = (1 - \lambda_I^{-1}) \vec{N}_I \circ \vec{N}^I =$	$\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{U}}^{-1}$	„True”
-2		$\underline{\underline{E}}^{(-2)} = \frac{1}{2}(1 - \lambda_I^{-2}) \vec{N}_I \circ \vec{N}^I =$	$\frac{1}{2}(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T})$	visszaforgatott Euler-Almansi
\vdots		\vdots	\vdots	\vdots

1. táblázat. Lagrange-féle alakváltozási tenzorok.

Látható, hogy mindegyik Lagrange-féle alakváltozási tenzor a kezdeti konfigurációban értelmezett (erre utal a „Lagrange-féle” jelző), és mindegyik Lagrange-féle alakváltozásnak ugyan azok az \vec{N}_I vektorok a sajátvektorai. Látszólag a Hencky-féle alakváltozási tenzor kilóg a sorból, de bizonyítható hogy rá is érvényes a (87) összefüggés. Ismert a matematikából az

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

nevezetes határérték. Végezzük el az $m = \frac{1}{n}$, $y = e^x$ és ebből következően $x = \ln(y)$ helyettesítést a fenti határértékben

$$y = \lim_{m \rightarrow 0} (1 + m \ln(y))^{\frac{1}{m}}.$$

Fejezzük ki innen az $\ln(y)$ -t.

$$\begin{aligned}\lim_{m \rightarrow 0} y^m &= \lim_{m \rightarrow 0} (1 + m \ln(y)), \\ &\Downarrow \\ \lim_{m \rightarrow 0} (y^m - 1) &= \lim_{m \rightarrow 0} m \ln(y), \\ &\Downarrow \\ \ln(y) &= \lim_{m \rightarrow 0} \frac{1}{m} (y^m - 1).\end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk az

$$\ln(\lambda_I) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} (\lambda_I^n - 1)$$

összefüggést, azaz a Hencky-féle alakváltozási tenzor is (87) alakú.

Megjegyzés: Fejtsük sorba az $\frac{1}{n} (\lambda_I^n - 1)$ kifejezést a $\lambda_I = 1$ érték körül

$$\frac{1}{n} (\lambda_I^n - 1) \approx \lambda_I - 1 + \frac{(n-1)(\lambda_I - 1)^2}{2} + \frac{(n^2 - 3n + 2)(\lambda_I - 1)^3}{6} + \dots$$

Ha $\lambda_I - 1 \ll 1$, akkor a fenti kifejezés minden n értékre közelítőleg ugyan azt az eredményt adja, nevezetesen a sorfejtés lineáris tagját

$$\frac{1}{n} (\lambda_I^n - 1) \approx \lambda_I - 1.$$

Ezek után mondhatjuk, hogy kis alakváltozások esetében, ha $\varepsilon_I \approx \lambda_I - 1 \ll 1$, bármelyik Lagrange-féle alakváltozási tenzor közelítőleg megegyezik a kis alakváltozások elméletéből ismert $\underline{\underline{\varepsilon}}$ infinitezimális alakváltozási tenzonnal

$$\underline{\underline{E}}^{(n)} \approx \underline{\underline{\varepsilon}}.$$

1.4.4. Baloldali Cauchy-Green alakváltozási tenzor

Most az 1.4.1. fejezetben megfogalmazott feladatnak az inverzét oldjuk meg, vagyis meg kellene határozni egy elemi vonalszakasz dS eredeti hosszát és az \vec{E} eredeti irányát a kezdeti konfigurációban, ha adott az alakváltozás utáni ds hossz és \vec{e} irány. A dS hosszt a (75) képlettel kapjuk meg. Helyettesítsük be ide a (18) összefüggést.

$$dS = \sqrt{d\vec{r} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot d\vec{r}} = ds \sqrt{\vec{e} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \vec{e}} \quad (88)$$

A könnyebb érthetőség kedvéért írjuk fel ugyan ezt a bázisok feltüntetésével is

$$\begin{aligned}dS &= \sqrt{(dX^I \vec{G}_I) \cdot (dX^J \vec{G}_J)} = \sqrt{\left(\left((F^{-1})^I_{\cdot j} \vec{G}_I \circ \vec{g}^j \right) \cdot dx^k \vec{g}_k \right) \cdot \left(\left(F_m^L \vec{G}_L \circ \vec{g}^m \right) \cdot dx^n \vec{g}_n \right)} = \\ &= \sqrt{\left(dx^j (F^{-1})^I_{\cdot j} \vec{G}_I \right) \cdot \left(dx^m F_m^L \vec{G}_L \right)} = \sqrt{dx^j (F^{-1})^I_{\cdot j} G_{IL} F_m^L dx^m} = \\ &= \sqrt{ds e^j (F^{-1})^I_{\cdot j} G_{IL} F_m^L e^m ds} = ds \sqrt{e^j (F^{-1})^I_{\cdot j} G_{IL} F_m^L e^m},\end{aligned}$$

ahol $d\vec{r} = ds \vec{e} = ds e^i \vec{g}_i$. Jól látszik, hogy a gyökjel alatt álló $(F^{-1})^I_{\cdot j}$ tenzor koordináta j második indexét az e^j , míg az I első indexét a G_{IL} metrikus tenzoron keresztül az F_m^L tenzor koordináta L indexe „szorozza”. Emiatt kell a (88) egyenlet jobb oldalán a gyök alatt a bal oldalon álló deformáció gradiens inverzét transzponálni. Vezessünk be egy új jelölést.

12. Definíció. A deformáció gradiens tenzor saját transzponáltjával vett

$$\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T$$

szorzatát *baloldali Cauchy-Green alakváltozási tenzornak* vagy *Finger-tenzornak* nevezzük, és $\underline{\underline{b}}$ -vel jelöljük. Deformálatlan esetben $\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{I}}$.

Az elnevezésben azért szerepel a baloldali jelző, mert bal oldalról szorzunk az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradienssel (és jobbról a transzponáltjával). Érdemes figyelni a jelölésre, mert könnyű összetéveszteni a \underline{b} baloldali Cauchy-Green alakváltozási tenzort a \underline{B} Piola-féle alakváltozási tenzonnal. Az egyiket „kis b” betűvel, a másikat „nagy B” betűvel jelöljük. A \underline{b} a pillanatnyi konfigurációban értelmezett tenzor, ugyanis

$$\underline{b} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T = \left(F^i_{\cdot J} \vec{g}_i \circ \vec{G}^J \right) \cdot \left(F^k_L \vec{G}^L \circ \vec{g}_k \right) = F^i_{\cdot J} G^{JL} F^k_L \vec{g}_i \circ \vec{g}_k = b^{ik} \vec{g}_i \circ \vec{g}_k. \quad (89)$$

A \underline{b} baloldali Cauchy-Green alakváltozási tenzor tulajdonképpen a deformálatlan test (kezdeti konfiguráció) pillanatnyi konfigurációba áttranszformált metrikus tenzora, vagyis a segítségével tudjuk megmondani a pillanatnyi konfigurációban lévő vonalelem kezdeti konfigurációban mérhető hosszát. Osszuk el a (88) egyenlet mindkét oldalát a ds pillanatnyi hosszal.

$$\frac{dS}{ds} = \frac{1}{\lambda_s} = \sqrt{\vec{e} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \vec{e}} = \sqrt{\vec{e} \cdot \underline{b}^{-1} \cdot \vec{e}} \quad (90)$$

A (36) egyenletből azt kapjuk, hogy

$$\underline{b}^{-1} = \left(\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T \right)^{-1} = \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} = \left(\underline{v} \cdot \underline{v} \right)^{-1} = \underline{v}^{-2}, \quad (91)$$

vagy véve mindkét oldal inverzét

$$\underline{b} = \underline{v}^2. \quad (92)$$

Ez azt jelenti, hogy mivel a \underline{b} baloldali Cauchy-Green alakváltozási tenzor sajátértékei inverzei a \underline{b}^{-1} inverz tenzor sajátértékeinek, sajátvektorai pedig megegyeznek a \underline{b}^{-1} inverz tenzor sajátvektoraival, a \underline{b} baloldali Cauchy-Green alakváltozási tenzor sajátértékei és sajátvektorai megegyeznek a \underline{v} baloldali nyújtó tenzor \underline{v}^2 négyzetének λ_i^2 sajátértékeivel és \vec{n}_i és \vec{n}^i sajátvektoraival. Emiatt a sajátvektorok koordinátarendszerében (bázisában) a \underline{b} baloldali Cauchy-Green alakváltozási tenzor a

$$\underline{b} = \lambda_i^2 \vec{n}_i \circ \vec{n}^i \quad (93)$$

alakban írható. Mutasson a $d\vec{r}_i$ elemi vonalszakasz az i -edik sajátvektor irányába, azaz $d\vec{r}_i = ds \vec{n}_i$. Ekkor a (90) és (93) felhasználásával

$$\lambda_s^{-1} = \sqrt{\lambda_i^{-2} \vec{n}_i \cdot \vec{n}_i \circ \vec{n}^i \cdot \vec{n}_i} = \sqrt{\lambda_i^{-2}} = \lambda_i^{-1},$$

vagyis a λ_i az \vec{n}_i irányban bekövetkező fajlagos nyúlást jelenti.

1.4.5. Euler-Almansi alakváltozási tenzor

A következő két fejezetben olyan pillanatnyi konfigurációban értelmezett alakváltozási tenzorok kerülnek bemutatásra, amelyek kevésbé szemléletesek, kevésbé tűnnek használhatónak, azonban a későbbiekben, amikor az alakváltozási energiáról és a feszültségi tenzorokról lesz szó, nélkülözhetetlenek bizonyulnak. Az első ilyen tenzor bevezetéséhez számoljuk ki a következőt: az alakváltozás során megváltozott ds hosszúságú és \vec{e} irányú elemi vonalszakasz megváltozott ds hosszát emeljük négyzetre, és vonjuk ki belőle az eredeti elemi vonalszakasz hosszának négyzetét. Az eredményt osszuk el a megváltozott vonalszakasz hossz négyzetének kétszeresével. A (88) és (91) összefüggések felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{ds^2 - dS^2}{ds^2} &= \frac{1}{2} \frac{ds^2 - ds^2 \vec{e} \cdot \underline{b}^{-1} \cdot \vec{e}}{ds^2} = \frac{1}{2} \frac{ds^2 \overbrace{\vec{e} \cdot \underline{\underline{I}} \cdot \vec{e}}^1 - ds^2 \vec{e} \cdot \underline{b}^{-1} \cdot \vec{e}}{ds^2} = \\ &= \frac{1}{2} \vec{e} \cdot \left(\underline{\underline{I}} - \underline{b}^{-1} \right) \cdot \vec{e} = \vec{e} \cdot \left(\frac{1}{2} \left(\underline{\underline{I}} - \underline{b}^{-1} \right) \right) \cdot \vec{e}. \end{aligned}$$

Az utolsó tagban zárójelben álló tenzorra vezessünk be új jelölést.

13. Definíció. Az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradiens vagy a \underline{b} baloldali Cauchy-Green alakváltozási tenzor segítségével számított

$$\underline{e} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \right) = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{I}} - \underline{b}^{-1} \right) \quad (94)$$

tenzort *Euler-Almansi alakváltozási tenzornak* nevezzük. Deformáció mentes állapotban $\underline{e} = \underline{0}$, ahol $\underline{0}$ a zérus tenzor. Az Euler-Almansi alakváltozási tenzorra szokásos még az

$$\underline{a} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \right) = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{I}} - \underline{b}^{-1} \right) \quad (95)$$

jelölés is.

Az \underline{e} a pillanatnyi konfigurációban értelmezett mennyiség. Ennek belátásához használjuk fel a (89) összefüggést és az $(\underline{A} \cdot \underline{B} \cdot \underline{C})^{-1} = \underline{C}^{-1} \cdot \underline{B}^{-1} \cdot \underline{A}^{-1}$ azonosságot. Ezek alapján a \underline{b} inverze a

$$\underline{b}^{-1} = (b^{-1})_{ki} \vec{g}^k \circ \vec{g}^i = (F^{-1})_k^L G_{LJ} (F^{-1})_i^J \vec{g}^k \circ \vec{g}^i$$

képlettel számítható. Ezt könnyen beláthatjuk az alábbi rövid számítással.

$$\begin{aligned} \underline{b} \cdot \underline{b}^{-1} &= (\underline{F} \cdot \underline{F}^T) \cdot (\underline{F}^{-T} \cdot \underline{F}^{-1}) = (F^i_J G^{JL} F_L^k \vec{g}_i \circ \vec{g}_k) \cdot \left((F^{-1})_r^S G_{SQ} (F^{-1})_p^Q \vec{g}^r \circ \vec{g}^p \right) = \\ &= F^i_J G^{JL} F_L^k (F^{-1})_r^S G_{SQ} (F^{-1})_p^Q \vec{g}_i \circ \underbrace{\vec{g}_k \circ \vec{g}^r}_{\delta_k^r} \circ \vec{g}^p = \\ &= F^i_J G^{JL} \underbrace{F_L^k (F^{-1})_k^S}_{\delta_L^S} G_{SQ} (F^{-1})_p^Q \vec{g}_i \circ \vec{g}^p = F^i_J \underbrace{G^{JL} G_{LQ}}_{\delta_Q^J} (F^{-1})_p^Q \vec{g}_i \circ \vec{g}^p = \\ &= \underbrace{F^i_J (F^{-1})_p^J}_{\delta_p^i} \vec{g}_i \circ \vec{g}^p = \vec{g}_i \circ \vec{g}^i = \underline{I} \end{aligned}$$

A fentiek segítségével az \underline{e} Euler-Almansi alakváltozási tenzor az

$$\begin{aligned} \underline{e} &= \frac{1}{2} \left(g_{ki} \vec{g}^k \circ \vec{g}^i - (F^{-1})_k^L G_{LJ} (F^{-1})_i^J \vec{g}^k \circ \vec{g}^i \right) = \frac{1}{2} \left(g^{ki} - (F^{-1})_k^L G_{LJ} (F^{-1})_i^J \right) \vec{g}^k \circ \vec{g}^i = \\ &= \frac{1}{2} (g_{ki} - (b^{-1})_{ki}) \vec{g}^k \circ \vec{g}^i = e_{ki} \vec{g}^k \circ \vec{g}^i \end{aligned}$$

alakban írható, ahol $\underline{I} = \vec{g}_i \circ \vec{g}^i = g_{ik} \vec{g}^i \circ \vec{g}^k$. Annak kiderítéséhez, hogy mik az \underline{e} Euler-Almansi alakváltozási tenzor sajátértékei és sajátvektorai, írjuk fel az \underline{e} -t a \underline{b}^{-1} baloldali Cauchy-Green alakváltozási tenzor sajátvektoraiból álló bázisban (lásd a (93) képlet).

$$\underline{e} = \frac{1}{2} (\vec{n}_i \circ \vec{n}^i - \lambda_i^{-2} \vec{n}_i \circ \vec{n}^i) = \left(\frac{1}{2} (1 - \lambda_i^{-2}) \right) \vec{n}_i \circ \vec{n}^i,$$

ahol $\underline{I} = \vec{n}_i \circ \vec{n}^i$. Látható, hogy az \underline{e} Euler-Almansi alakváltozási tenzor diagonális az $\vec{n}_i \circ \vec{n}^i$ bázisban, ebből következik, hogy sajátvektorai megegyeznek a \underline{b} baloldali Cauchy-Green alakváltozási tenzor inverzének a sajátvektoraival, így a baloldali Cauchy-Green alakváltozási tenzor sajátvektoraival is, sajátértékei pedig az $\frac{1}{2} (1 - \lambda_i^2)$ értékek lesznek ($i = 1, 2, 3$).

* * *

Szorozzuk meg az \underline{E} Green-Langrange alakváltozási tenzort balról a deformáció gradiens inverzének transzponáltjával, jobbról pedig a deformáció gradiens inverzével.

$$\underline{F}^{-T} \cdot \underline{E} \cdot \underline{F}^{-1} = \underline{F}^{-T} \cdot \left[\frac{1}{2} (\underline{F}^T \cdot \underline{F} - \underline{I}) \right] \cdot \underline{F}^{-1} = \frac{1}{2} (\underline{I} - \underline{F}^{-T} \cdot \underline{F}^{-1}) = \underline{e} \quad (96)$$

Ezt a műveletet „előretolásnak” (push forward) is szokás nevezni. Az elnevezés azt jelenti, hogy a kezdeti konfigurációban lévő Green-Langrange alakváltozási tenzort áttranszformáljuk (előretoljuk) a pillanatnyi konfigurációba. Az előretolás műveletét a ϕ betűvel fogjuk jelölni, például

$$\phi(\underline{E}) = \underline{e}.$$

Definiálhatjuk az inverz műveletet is, amit „visszahúzásnak” (pull back) nevezünk. Szorozzuk meg az \underline{e} Euler-Almansi alakváltozási tenzort balról a deformáció gradiens transzponáltjával, jobbról pedig a deformáció gradienssel.

$$\underline{F}^T \cdot \underline{e} \cdot \underline{F} = \underline{F}^T \cdot \left[\frac{1}{2} (\underline{I} - \underline{F}^{-T} \cdot \underline{F}^{-1}) \right] \cdot \underline{F} = \frac{1}{2} (\underline{F}^T \cdot \underline{F} - \underline{I}) = \underline{E} \quad (97)$$

Az elnevezés azt jelenti, hogy a pillanatnyi konfigurációban lévő Euler-Almansi alakváltozási tenzort áttranszformáljuk (visszahúzzuk) a kezdeti konfigurációba. A visszahúzás műveletet a ϕ inverzével, azaz ϕ^{-1} -zel jelöljük.

$$\phi^{-1}(\underline{e}) = \underline{E}$$

Az előretolás és visszahúzás műveletét vektorok esetében nem a (96) és (97) egyenletekkel határozzuk meg, hanem a (13) vagy (18) összefüggések mintájára balról a deformáció gradienssel, vagy annak inverzével történő szorzással. Például:

$$\phi(d\vec{R}) = \underline{F} \cdot d\vec{R} = d\vec{r},$$

vagy

$$\phi^{-1}(d\vec{r}) = \underline{F}^{-1} \cdot d\vec{r} = d\vec{R}.$$

1.4.6. További pillanatnyi konfigurációban értelmezett alakváltozási tenzorok

A további pillanatnyi konfigurációban értelmezett tenzorok jelentősége kisebb, de érdemes megemlíteni őket.

14. Definíció. A \underline{b} baloldali Cauchy-Green alakváltozási tenzor

$$\underline{c} = \underline{b}^{-1} \quad (98)$$

inverzét *Cauchy-féle alakváltozási tenzornak* nevezzük, és \underline{c} -vel jelöljük.

A \underline{c} tenzor a bázisok és koordináták feltüntetésével az

$$\underline{c} = (b^{-1})_{ij} \vec{g}^i \circ \vec{g}^j = c_{ij} \vec{g}^i \circ \vec{g}^j \quad (99)$$

alakban írható. Ennek belátásához szorozzuk össze a \underline{b} és \underline{c} tenzorokat felhasználva a (89) és (99) alakokat.

$$\begin{aligned} \underline{b} \cdot \underline{c} &= (b^{ij} \vec{g}_i \circ \vec{g}_j) \cdot (c_{kl} \vec{g}^k \circ \vec{g}^l) = b^{ij} c_{kl} \vec{g}_i \circ \underbrace{\vec{g}_j \cdot \vec{g}^k}_{\delta_j^k} \circ \vec{g}^l = \\ &= b^{ij} c_{jl} \vec{g}_i \circ \vec{g}^l = b^{ij} (b^{-1})_{jl} \vec{g}_i \circ \vec{g}^l = \delta_i^i \vec{g}_i \circ \vec{g}^i = \underline{I} \end{aligned}$$

Ha a \underline{b} baloldali Cauchy-Green alakváltozási tenzor a sajátvektorok bázisában a (93) összefüggéssel írható, akkor a (98) miatt

$$\underline{c} = \lambda_i^{-2} \vec{n}_i \circ \vec{n}^i,$$

vagyis a \underline{c} sajátértékei megegyeznek a \underline{b} sajátértékeinek inverzeivel.

15. Definíció. A \underline{v} baloldali nyújtó tenzor felhasználásával kapott

$$\underline{h} = \ln \underline{v}$$

tenzort pillanatnyi konfigurációban értelmezett *Hencky-féle alakváltozási tenzornak* nevezzük, és \underline{h} -val jelöljük.

A tenzor logaritmusának kiszámításához az 1.4.3. fejezetben leírtakhoz hasonlóan a tenzort a sajátvektorai bázisába transzformáljuk, és a logaritmus függvényt a főatlóban lévő elemekre alkalmazzuk.

$$\underline{h} = \ln(\lambda_i) \vec{n}_i \circ \vec{n}^i$$

Innen rögtön látszik az is, hogy a \underline{h} Hencky-féle alakváltozási tenzor sajátvektorai megegyeznek a \underline{v} baloldali nyújtó tenzor sajátvektoraival.

16. Definíció. Az $\vec{n}_i \circ \vec{n}^i$ bázisban diagonális

$$\underline{e}^{(n)} = f(\lambda_i) \vec{n}_i \circ \vec{n}^i$$

tenzort *általános Euler-féle alakváltozási tenzornak* nevezzük, ha az $f(\lambda)$ függvény monoton növekvő, és igaz rá az $f(1) = 0$ és $\left. \frac{df}{d\lambda} \right|_{\lambda=1} = 1$ feltétel.

Legyen $f(\lambda) = \frac{1}{n}(\lambda^n - 1)$, ahol a $\lambda = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$, vagyis egy tetszőleges egész szám. Ekkor az általános Lagrange-féle alakváltozási tenzor az

$$\underline{\underline{e}}^{(n)} = \frac{1}{n}(\lambda_i^n - 1)\vec{n}_i \circ \vec{n}^i \quad (100)$$

alakban írható. Az ezzel a függvénnyel kapott alakváltozási tenzorokat különböző n értékekre a 2. táblázat mutatja.

n	Jele	Sajátvektorok bázisában	Tenzoros alakban	Elnevezés
\vdots		\vdots	\vdots	\vdots
-2	$\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{a}} =$	$\underline{\underline{e}}^{(-2)} = \frac{1}{2}(1 - \lambda_i^{-2})\vec{n}_i \circ \vec{n}^i =$	$\frac{1}{2}(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{b}}^{-1})$	Euler-Almansi
-1		$\underline{\underline{e}}^{(-1)} = (1 - \lambda_i^{-1})\vec{n}_i \circ \vec{n}^i =$	$\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{v}}^{-1}$	Swainger-féle
0	$\underline{\underline{h}} =$	$\underline{\underline{e}}^{(0)} = \ln(\lambda_i)\vec{n}_i \circ \vec{n}^i =$	$\ln(\underline{\underline{v}})$	Hencky-féle
1		$\underline{\underline{e}}^{(1)} = (\lambda_i - 1)\vec{n}_i \circ \vec{n}^i =$	$\underline{\underline{v}} - \underline{\underline{I}}$	
2		$\underline{\underline{e}}^{(2)} = \frac{1}{2}(\lambda_i^2 - 1)\vec{n}_i \circ \vec{n}^i =$	$\frac{1}{2}(\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T - \underline{\underline{I}})$	
\vdots		\vdots	\vdots	\vdots

2. táblázat. Euler-féle alakváltozási tenzorok.

Látható, hogy mindegyik Euler-féle alakváltozási tenzor a pillanatnyi konfigurációban értelmezett (erre utal az „Euler-féle” jelző), és mindegyik Euler-féle alakváltozásnak ugyan azok az \vec{n}_i vektorok a sajátvektorai. Az 1.4.3. fejezetben leírtakhoz hasonlóan a Hencky-féle alakváltozási tenzor látszólag kilóg a sorból, de rá is érvényes a (100) összefüggés (bizonyítás az 1.4.3. fejezetben), azaz

$$\ln(\lambda_I) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n}(\lambda_I^n - 1).$$

Megjegyzés: Az 1.4.3. fejezetben látottaknak megfelelően ha $\lambda_I - 1 \ll 1$, akkor minden n értékre közelítőleg az

$$\frac{1}{n}(\lambda_I^n - 1) \approx \lambda_I - 1$$

kifejezést kapjuk. Ezek után mondhatjuk, hogy kis alakváltozások (ha $\varepsilon_i \approx \lambda_i - 1 \ll 1$) és kis elmozdulások (ha $\vec{n}_i \approx \vec{N}_I$, vagyis $\underline{\underline{R}} \approx \underline{\underline{I}}$) esetében bármelyik Euler-féle alakváltozási tenzor közelítőleg megegyezik a kis alakváltozások elméletéből ismert $\underline{\underline{e}}$ infinitezimális alakváltozási tenzonnal

$$\underline{\underline{e}}^{(n)} \approx \underline{\underline{e}}.$$

1.5. Alakváltozási tenzorok deviátoros felbontása

Amikor egy test nagy alakváltozásokat szenved, sok esetben megfigyelhető, hogy a test térfogata alig, vagy egyáltalán nem változik meg. Példaként lehet említeni a nyersgumit, aminek térfogata bármilyen alakváltozás során állandó marad, de sok gumi alapú anyag, lágy műanyagok vagy éppen állati vagy emberi szövetek térfogata a bekövetkezett alakváltozásokhoz mérve csak nagyon kis mértékben változik meg. Meg lehet még említeni fémek képlékeny alakváltozását is, ahol az alakváltozás mértékéhez képest csak csekély mértékű a térfogatváltozás. A későbbiekben, amikor majd anyagtörvényeket próbálunk megfogalmazni, a térfogatállandóságot vagy a csak nagyon kis mértékű térfogatváltozást külön figyelembe kell venni. Ennek kinematikai megalapozása történik ebben a fejezetben.

Induljunk ki az 1.2.3. fejezetben kapott eredményből, azaz abból, hogy egy elemi térfogat alakváltozás során bekövetkezett megváltozását a deformáció gradiens determinánsával tudjuk jellemezni. Ha a deformáció gradiens determinánsa egy, azaz $J = \det(\underline{\underline{F}}) = 1$, akkor nincs térfogatváltozás. A deformáció gradiens a 3. tétel alapján felbontható egy ortogonális tenzor és egy szimmetrikus, pozitív definit tenzor szorzatára a (32) és (33) összefüggésekben látható módon. Mivel az ortogonális tenzor determinánsa mindig egy, ezért alkalmazva a tenzorok szorzatának determinánsára vonatkozó $\det(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) = \det(\underline{\underline{A}})\det(\underline{\underline{B}})$ azonosságot a

$$\det(\underline{\underline{F}}) = \underbrace{\det(\underline{\underline{R}})}_1 \det(\underline{\underline{U}}) = \det(\underline{\underline{U}}) = J$$

és

$$\det(\underline{\underline{F}}) = \det(\underline{\underline{v}}) \underbrace{\det(\underline{\underline{R}})}_1 = \det(\underline{\underline{v}}) = J$$

egyenleteket kapjuk. Az $\underline{\underline{U}}$ jobboldali és $\underline{\underline{v}}$ baloldali nyújtó tenzorok már tisztán az alakváltozásokat írják le, és mivel a determinánsaik nem azonosan egygel egyenlőek, ezért nyilván tartalmazzák a térfogat változást is. Szorozzuk meg és osszuk el az $\underline{\underline{U}}$ és $\underline{\underline{v}}$ tenzort is a Jacobi-determináns harmadik gyökével, és szorozzuk meg őket az egységtenzonnal.

$$\underline{\underline{U}} = \frac{J^{\frac{1}{3}}}{J^{\frac{1}{3}}} \underline{\underline{U}} = \frac{J^{\frac{1}{3}}}{J^{\frac{1}{3}}} \underline{\underline{I}} \cdot \underline{\underline{U}} = \underbrace{\left(J^{\frac{1}{3}} \underline{\underline{I}} \right)}_{\underline{\underline{J}}_U} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{J^{\frac{1}{3}}} \underline{\underline{U}} \right)}_{\underline{\underline{\tilde{U}}}} = \underline{\underline{J}}_U \cdot \underline{\underline{\tilde{U}}}$$

és

$$\underline{\underline{v}} = \frac{J^{\frac{1}{3}}}{J^{\frac{1}{3}}} \underline{\underline{v}} = \frac{J^{\frac{1}{3}}}{J^{\frac{1}{3}}} \underline{\underline{I}} \cdot \underline{\underline{v}} = \underbrace{\left(J^{\frac{1}{3}} \underline{\underline{I}} \right)}_{\underline{\underline{J}}_v} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{J^{\frac{1}{3}}} \underline{\underline{v}} \right)}_{\underline{\underline{\tilde{v}}}} = \underline{\underline{J}}_v \cdot \underline{\underline{\tilde{v}}}.$$

Ezzel az $\underline{\underline{U}}$ és $\underline{\underline{v}}$ tenzorokat két tenzor szorzatára bontottuk. Könnyen belátható, hogy a $\underline{\underline{J}}_U$ és $\underline{\underline{J}}_v$ tenzorok determinánsa megegyezik a J Jacobi-determinánssal. Felhasználva a $\det(\alpha \underline{\underline{A}}) = \alpha^3 \det(\underline{\underline{A}})$ azonosságot a

$$\det(\underline{\underline{J}}_U) = \det\left(J^{\frac{1}{3}} \underline{\underline{I}} \right) = \underbrace{\left(J^{\frac{1}{3}} \right)^3}_J \underbrace{\det(\underline{\underline{I}})}_1 = J$$

és

$$\det(\underline{\underline{J}}_v) = \det\left(J^{\frac{1}{3}} \underline{\underline{I}} \right) = \underbrace{\left(J^{\frac{1}{3}} \right)^3}_J \underbrace{\det(\underline{\underline{I}})}_1 = J$$

eredményt kapjuk. A tenzorok szorzatának determinánsára vonatkozó azonosság alapján

$$\underbrace{\det(\underline{\underline{U}})}_J = \underbrace{\det(\underline{\underline{J}}_U)}_J \det(\underline{\underline{\tilde{U}}})$$

és

$$\underbrace{\det(\underline{\underline{v}})}_J = \underbrace{\det(\underline{\underline{J}}_v)}_J \det(\underline{\underline{\tilde{v}}}),$$

amiből következik a

$$\det(\underline{\underline{\tilde{U}}}) = 1$$

és

$$\det(\underline{\underline{\tilde{v}}}) = 1$$

egyenlőség, vagyis a $\underline{\underline{\tilde{U}}}$ és $\underline{\underline{\tilde{v}}}$ módosított nyújtó tenzorok nem tartalmazzak térfogatváltozást, míg a $\underline{\underline{J}}_U$ és $\underline{\underline{J}}_v$ tenzorok a J Jacobi-determinánson keresztül csak a térfogatváltozásról tartalmazzak információt. Ezzel az $\underline{\underline{U}}$ jobboldali és $\underline{\underline{v}}$ baloldali nyújtó tenzorokat felbontottuk tisztán térfogatváltozási és tisztán torzítási részekre, pontosabban ezen részeket leíró tenzorok *szorzatára*.

$$\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{J}}_U \cdot \underline{\underline{\tilde{U}}} = \underline{\underline{\tilde{U}}} \cdot \underline{\underline{J}}_U$$

és

$$\underline{\underline{v}} = \underline{\underline{J}}_v \cdot \underline{\underline{\tilde{v}}} = \underline{\underline{\tilde{v}}} \cdot \underline{\underline{J}}_v.$$

A tisztán *torzítási* részt szokás *deviátoros résznek* is nevezni. A (81) és (92) összefüggések alapján előállítható a jobb- illetve baloldali Cauchy-Green alakváltozási tenzorok deviátoros felbontása is.

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{J}}_C \cdot \underline{\underline{\tilde{C}}} = \underline{\underline{\tilde{C}}} \cdot \underline{\underline{J}}_C$$

és

$$\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{J}}_b \cdot \underline{\underline{\tilde{b}}} = \underline{\underline{\tilde{b}}} \cdot \underline{\underline{J}}_b,$$

ahol

$$\begin{aligned} \underline{\underline{J}}_C &= \underline{\underline{J}}_U \cdot \underline{\underline{J}}_U = J^{\frac{2}{3}} \underline{\underline{I}}, \\ \underline{\underline{\tilde{C}}} &= \underline{\underline{\tilde{U}}} \cdot \underline{\underline{\tilde{U}}} = J^{-\frac{2}{3}} \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{U}} = J^{-\frac{2}{3}} \underline{\underline{C}}, \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{J}}_b = \underline{\underline{J}}_v \cdot \underline{\underline{J}}_v = J^{\frac{2}{3}} \underline{\underline{I}}$$

és

$$\tilde{\underline{\underline{b}}} = \tilde{\underline{\underline{v}}} \cdot \tilde{\underline{\underline{v}}} = J^{-\frac{2}{3}} \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{v}} = J^{-\frac{2}{3}} \underline{\underline{b}}.$$

A többi alakváltozási tenzornál a deviátoros felbontás az előzőeknél jóval bonyolultabban lenne megoldható, de tulajdonképpen nincs is rájuk szükség a továbbiakban, ezért itt sem foglalkozunk velük.

1.6. Merev test szerű elmozdulás és objektivitás

1.7. Időben változó alakváltozási mennyiségek

1.7.1. Sebességmező

1.7.2. Materiális idő szerinti deriválás

1.7.3. Sebesség gradiens tenzor

1.7.4. Alakváltozási sebesség

1.7.5. Forgástenzor

1.8. Alakváltozási tenzorok idő szerinti objektív deriváltjai

2. Dinamika

2.1. Tömegmegmaradás

2.1.1. Tömeg

2.1.2. Tömeg-mérlegegyenlet

2.1.3. Integrálok idő szerinti deriváltja

2.2. Impulzus-tétel

2.2.1. Impulzus

2.2.2. Impulzus-tétel integrál alakja

2.2.3. Belső erők

2.2.4. Cauchy-féle feszültség tenzor

2.2.5. Impulzus-tétel differenciális alakja

2.3. Perdület-tétel

2.3.1. Perdület

2.3.2. Perdület-tétel integrál alakja

2.3.3. Perdület-tétel differenciális alakja

2.4. Energia-tétel, avagy a hőtan első főtétele

2.4.1. Energia

2.4.2. Energia-tétel integrál alakja

2.4.3. Celluláris (lokális) egyensúly, avagy az energia-tétel differenciális alakja

2.4.4. Belső energia

2.5. Entrópia-tétel, avagy a hőtan második főtétele

2.5.1. Reverzibilis, irreverzibilis folyamatok

2.5.2. Entrópia

2.5.3. Entrópia-tétel integrál alakja

2.5.4. Entrópia-tétel differenciális alakja

2.5.5. Clausius-Planck-egyenlőtlenség

2.6. Feszültség tenzorok

2.6.1. Kirchhoff-féle feszültség

2.6.2. I. Piola-Kirchhoff-féle feszültség

2.6.3. Impulzus-tétel a kezdeti konfigurációban

2.6.4. II. Piola-Kirchhoff-féle feszültség

- Történet függés
- Lokális hatás
- Egyidejűség
- Anyagi objektivitás

3.2. Egyszerű anyagmodellek

3.2.1. Tisztán rugalmas elem

3.2.2. Tisztán viszkózus elem

3.2.3. Tisztán képlékeny elem????

3.3. Összetett anyagmodellek

3.3.1. Kelvin-Voigt modell

3.3.2. Maxwell-modell

3.3.3. Vegyes modell

3.4. Anyagtörvények

3.4.1. Objektivitás

Megoldások

M 1. $\vec{r} = \vec{\chi}(\vec{R}) = (X^1 + \gamma X^2) \vec{g}_1 + X^2 \vec{g}_2 + X^3 \vec{g}_3$

Tárgymutató

- alakváltozási főirány, 32
- anyagi nyújtó tenzor, 20

- baloldali Cauchy-Green alakváltozási tenzor, 35
- baloldali nyújtó tenzor, 20
- Biot-féle alakváltozási tenzor, 34

- Cauchy-féle alakváltozási tenzor, 38

- deformáció gradiens, 14
- deviátoros felbontás, 39

- előretolás (push forward), 37
- Euler-Almansi alakváltozási tenzor, 36
- Euler-féle alakváltozási tenzorok, 38

- főnyúlás, 32
- fajlagos nyúlás, 31
- Finger-tenzor, 35
- forgató tenzor, 20

- Green-Lagrange alakváltozási tenzor, 32

- helyi hatások elve, 13
- Hencky-féle alakváltozási tenzor, 33, 38

- jobboldali Cauchy-Green alakváltozási tenzor, 31
- jobboldali nyújtó tenzor, 20

- kétpont tenzor, 15, 20
- kezdeti konfiguráció, 8
- kis alakváltozások, 34, 35, 39
- kis elmozdulások, 39

- Lagrange-féle alakváltozási tenzorok, 34

- Nanson-formula, 18
- nyújtó vagy stretch tenzor, 20

- pillanatnyi konfiguráció, 8
- Piola-féle alakváltozási tenzor, 33
- poláris felbontás, 20

- RU felbontás, 20

- Swainger-féle alakváltozási tenzor, 39

- térbeli nyújtó tenzor, 20

- visszaforgatott Euler-Almansi alakváltozási tenzor, 34
- visszahúzás (pull back), 37
- vonalelem arány, 31
- VR felbontás, 21

Hivatkozások

- [1] Holzapfel, G. A.: *Nonlinear solid mechanics*, John Wiley & Sons, Chichester, 2000
- [2] Haupt, P.: *Continuum Mechanics and Theory of Materials*, Springer Verlag, Berlin, 2002

Függelék

A. Tenzoralgebra

A.1. Vektorok

A.2. Tenzorok

A.2.1. Tenzorok szorzatainak determinánása

Legyen $\underline{\underline{A}} = \vec{a}_i \circ \vec{g}^i$ és $\underline{\underline{B}} = \vec{g}_i \circ \vec{b}^i$

$$\det(\underline{\underline{A}}) = [(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \vec{a}_3] [(\vec{g}^1 \times \vec{g}^2) \cdot \vec{g}^3] = \frac{1}{3!} [(\vec{a}_i \times \vec{a}_j) \cdot \vec{a}_k] [(\vec{g}^i \times \vec{g}^j) \cdot \vec{g}^k]$$

$$\det(\underline{\underline{B}}) = \det(\underline{\underline{B}}^T) = \left[(\vec{b}^1 \times \vec{b}^2) \cdot \vec{b}^3 \right] [(\vec{g}_1 \times \vec{g}_2) \cdot \vec{g}_3] = \frac{1}{3!} \left[(\vec{b}^i \times \vec{b}^j) \cdot \vec{b}^k \right] [(\vec{g}_i \times \vec{g}_j) \cdot \vec{g}_k]$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \vec{a}_i \circ \vec{b}^i \cdot \vec{g}_j \circ \vec{b}^j = \vec{a}_i \circ \delta_j^i \circ \vec{b}^j = \vec{a}_i \circ \vec{b}^i$$

$$\det(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) = [(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \vec{a}_3] \left[(\vec{b}^1 \times \vec{b}^2) \cdot \vec{b}^3 \right] = \frac{1}{3!} [(\vec{a}_i \times \vec{a}_j) \cdot \vec{a}_k] \left[(\vec{b}^i \times \vec{b}^j) \cdot \vec{b}^k \right]$$

$$\underline{\underline{I}} = \delta_j^i \vec{g}_i \circ \vec{g}^j = \vec{g}_i \circ \vec{g}^i$$

$$\det(\underline{\underline{I}}) = [(\vec{g}_1 \times \vec{g}_2) \cdot \vec{g}_3] [(\vec{g}^1 \times \vec{g}^2) \cdot \vec{g}^3] = \frac{1}{3!} [(\vec{g}_i \times \vec{g}_j) \cdot \vec{g}_k] [(\vec{g}^i \times \vec{g}^j) \cdot \vec{g}^k] = 1$$

$$\begin{aligned} \det(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) &= [(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \vec{a}_3] [(\vec{g}^1 \times \vec{g}^2) \cdot \vec{g}^3] \left[(\vec{b}^1 \times \vec{b}^2) \cdot \vec{b}^3 \right] [(\vec{g}_1 \times \vec{g}_2) \cdot \vec{g}_3] = \\ &= \frac{1}{3!} [(\vec{a}_i \times \vec{a}_j) \cdot \vec{a}_k] [(\vec{g}^i \times \vec{g}^j) \cdot \vec{g}^k] \frac{1}{3!} \left[(\vec{b}^i \times \vec{b}^j) \cdot \vec{b}^k \right] [(\vec{g}_i \times \vec{g}_j) \cdot \vec{g}_k] = \det(\underline{\underline{A}}) \det(\underline{\underline{B}}) \end{aligned}$$

A.3. Harmadrendű tenzorok

A.4. Negyedrendű tenzorok