SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM **ALKALMAZOTT MECHANIKA TANSZÉK**

1. MECHANIKA-MOZGÁSTAN GYAKORLAT
(kidolgozta: Szüle Veronika, egy. ts.)

Matematikai összefoglaló

1.1. Mátrixalgebrai összefoglaló:

a) Mátrix értelmezése, jelölése:

Mátrix: skaláris mennyiségeknek, számoknak megadott szabály szerint táblázatba rendezett halmaza.

Jelölése: $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Négyzetes mátrix: olyan mátrix, amelyben a sorok és oszlopok száma megegyezik.

Oszlopmátrix: $\left[\underline{\underline{\mathrm{a}}}\right] = \begin{bmatrix} \mathrm{a}_1 \\ \mathrm{a}_2 \\ \mathrm{a}_3 \end{bmatrix}$.

Sormátrix: $\left[\underline{\underline{\mathrm{a}}}\right]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \mathrm{a}_1 & \mathrm{a}_2 & \mathrm{a}_3 \end{bmatrix}$

b) Műveletek mátrixokkal:

- **Mátrix transzponáltja:** tükrözés a főátlóra. A mátrix főátlóját az azonos indexű elemek alkotják.

$$\left[\underline{\underline{A}}\right] = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{(2\times 2)} \Rightarrow \left[\underline{\underline{A}}\right]^{T} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}}_{(2\times 2)}$$

- **Mátrixok összeadása, kivonása:** csak azonos méretű mátrixok adhatók össze, ill. vonhatók ki egymásból.

$$\underline{\underline{\mathrm{A}}} + \underline{\underline{\mathrm{B}}} = \underline{\underline{\mathrm{C}}}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \ \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{(2\times 2)} \pm \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}}_{(2\times 2)} = \underbrace{\begin{bmatrix} (a_{11} \pm b_{11}) & (a_{12} \pm b_{12}) \\ (a_{21} \pm b_{21}) & (a_{22} \pm b_{22}) \end{bmatrix}}_{(2\times 2)} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}}_{(2\times 2)}$$

- **Mátrix szorzás (sor-oszlop kombináció):**

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}},$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{(2\times 2)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}}_{(2\times 2)} = \underbrace{\begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) & (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) & (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \end{bmatrix}}_{(2\times 2)}$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{b}}=\underline{\underline{c}},$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{(2\times2)}\underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_{(2\times1)}=\underbrace{\begin{bmatrix} (a_{11}b_1+a_{12}b_2) \\ (a_{21}b_1+a_{22}b_2) \end{bmatrix}}_{(2\times1)}=\underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{(2\times1)}$$

$$\underline{\underline{a}}^T\cdot\underline{\underline{B}}=\underline{\underline{d}}^T,$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}}_{(1\times2)}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}}_{(2\times2)}=\underbrace{\begin{bmatrix} (a_1b_{11}+a_2b_{21}) & (a_1b_{12}+a_2b_{22}) \end{bmatrix}}_{(1\times2)}=\underbrace{\begin{bmatrix} d_1 & d_2 \end{bmatrix}}_{(1\times2)}$$

c) Különleges mátrixok:

- **Egységmátrix**: $\underline{\underline{E}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tulajdonsága: $\underline{\underline{E}}\cdot\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{E}}=\underline{\underline{A}}$.

  Az egységmátrixszal történő szorzás nem változtatja meg a megszorzott mátrixot.
- **Szimmetrikus mátrix:** $\underline{\underline{A}}^T=\underline{\underline{A}}$, azaz $a_{ij}=a_{ji}$, ahol $(i,j=1,2,3,...)$. A mátrix elemei megegyeznek a főátlóra vett tükörképükkel.

  Például: $\underline{\underline{A}}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 7 \\ -2 & 7 & 8 \end{bmatrix}$
- **Ferdeszimmetrikus mátrix:** $\underline{\underline{A}}^T=-\underline{\underline{A}}$, azaz $a_{ij}=-a_{ji}$, ahol $i,j=1,2,3,...$. A mátrix bármelyik eleme megegyezik a főátlóra vett tükörképének mínusz egyszeresével. Ebből következik, hogy a főátlóban csak zérus elemek lehetnek.

  Például: $\underline{\underline{A}}=\begin{bmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -5 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

<u>1.2. Vektorok skaláris, kétszeres vektoriális és diadikus szorzata:</u>

Vektor: irányított geometriai, vagy fizikai mennyiség, ami jellemezhető iránnyal, nagysággal, mértékegységgel.

a) Vektorok skaláris szorzata:

Skaláris szorzás értelmezése: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$, ahol α a vektorok által bezárt szög.

A skaláris szorzás kiszámítása mátrixszorzással:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

A szorzás eredménye egy skaláris mennyiség.

b) Vektorok kétszeres vektoriális szorzata:

$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$, vagy $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$

Kiszámítás kétféleképpen lehetséges:

- a két vektoriális szorzásnak a kijelölt sorrendben történő elvégzésével,
- a kifejtési tétellel:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)-\vec{a}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right), \text{ ill. } \vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)-\vec{c}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right).$$

c) Vektorok diadikus szorzata:

Legyen adott az $\vec{a}, \vec{b}$ és $\vec{c}$ tetszőleges vektor.

Két vektor diadikus szorzatának jelölése: $\vec{a}\circ\vec{b}$, elnevezése: diád.
Két vektor diadikus szorzatát a szorzás tulajdonságainak megadásával értelmezzük:

- a diadikus szorzás és a skaláris szorzás asszociatív (csoportosítható, azaz a szorzások elvégzésének sorrendjét felcserélhetjük):
  $\left(\vec{a}\circ\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\circ\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$,
- a diád a skaláris szorzás szempontjából nem kommutatív (nem mindegy, hogy egy diádot jobbról vagy balról szorzunk skalárisan egy vektorral, mert más eredményt kapunk).
  $\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\circ\vec{b}\right)=\left(\vec{a}\circ\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$

Ha a szorzás a fent leírt összefüggéseket kielégíti a szorzás diadikus.
Két vektor diadikus szorzatának kiszámítása jobbsodrású, derékszögű koordináta rendszerben.

$$\left[\vec{a}\circ\vec{b}\right]=\begin{bmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_x & b_y & b_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_xb_x & a_xb_y & a_xb_z\\a_yb_x & a_yb_y & a_yb_z\\a_zb_x & a_zb_y & a_zb_z\end{bmatrix}$$

1.3. Tenzorok előállítása:

a) Tenzorok értelmezése és tulajdonságai:

Tenzor: homogén, lineáris vektor-vektor függvény által megvalósított leképezés (hozzárendelés).

$$\vec{w}=f\left(\vec{v}\right)=\underline{\underline{T}}\cdot\vec{v}.$$

A $\underline{\underline{T}}$ tenzor a tetszőleges $\vec{v}$ vektorhoz a $\vec{w}$ képvektort rendeli hozzá.

b) Tenzor előállítása jobbsodratú, derékszögű descartesi koordináta-rendszerben:

Tenzor megadása:

- a tenzor koordinátáival (mátrixával) és
- koordináta rendszerrel történik.

Tenzor koordinátáinak jelölése mátrixba rendezve:

- $$\left[\underline{\underline{T}}\right]_{xyz}=\begin{bmatrix}T_{xx} & T_{xy} & T_{xz}\\T_{yx} & T_{yy} & T_{yz}\\T_{zx} & T_{zy} & T_{zz}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T_{11} & T_{12} & T_{13}\\T_{21} & T_{22} & T_{23}\\T_{31} & T_{32} & T_{33}\end{bmatrix}.$$

Tenzor előállítása:

Legyen ismert három értékpár:

$$\vec{i} \to \vec{a} = f\left(\vec{i}\right), \qquad \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

$$\vec{j} \to \vec{b} = f\left(\vec{j}\right), \qquad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k},$$

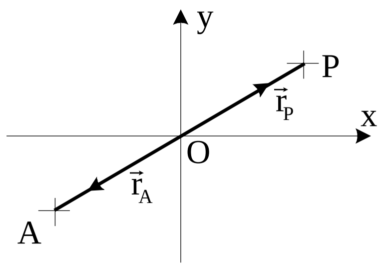
$$\vec{k} \to \vec{c} = f\left(\vec{k}\right), \qquad \vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}.$$

A tenzor diadikus előállítása: $\underline{\underline{T}} = \left(\vec{a} \circ \vec{i} + \vec{b} \circ \vec{j} + \vec{c} \circ \vec{k}\right)$.

A tenzor mátrixa: $\left[\underline{\underline{T}}\right]_{xyz} = \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{bmatrix}$.

<u>1.3.1. Tenzor előállítása:</u>

<u>Adott:</u> $\vec{r}_P = \left(12\vec{i} + 4\vec{j}\right)$m.



<u>Feladat:</u>

a) Azon $\underline{\underline{T}}$ tenzor mátrixának előállítása, amely az xy sík helyvektoraiból a helyvektoroknak a koordinátarendszer O kezdőpontjára tükrözött vektorait állítja elő.

b) Előállítani azt az $\vec{r}_A$ vektort, amely az $\vec{r}_P$ vektor origóra vett tükörképe.

a) A tenzor előállítása:

Síkbeli esetben a tenzort két értékpárja határozza meg:

$$\vec{i} \to \vec{a} = -\vec{i}, \qquad \vec{j} \to \vec{b} = -\vec{j}.$$

A két értékpárból a tenzor: $\underline{\underline{T}} = \left(\vec{a} \circ \vec{i} + \vec{b} \circ \vec{j}\right)$

A tenzor mátrixa: $\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

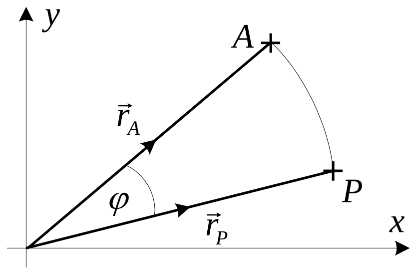
b) Az origóra tükrözött $\vec{r}_A$ képvektor meghatározása:

$$\vec{r}_A = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{r}_P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

$$\vec{r}_A = \left(-12\vec{i} - 2\vec{j}\right)\text{m}.$$

1.3.2. Tenzor előállítása:

Adott: $\vec{r}_P = \left(8\vec{i} + 2\vec{j}\right)\text{m},\ \varphi = 60^\circ.$

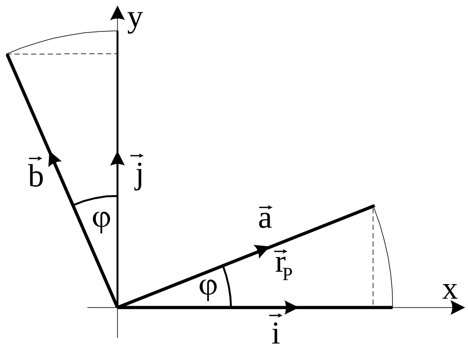


Feladat:

a) Azon $\underline{\underline{T}}$ tenzor mátrixának előállítása, amely az xy sík helyvektoraiból a helyvektorok z tengely körül φ szöggel elforgatott vektorait állítja elő.

b) Előállítani azt az $\vec{r}_A$ vektort, amelyet az $\vec{r}_P$ vektor φ szöggel történő elforgatásával kapunk.

a) A tenzor előállítása:



Síkbeli esetben a tenzort két értékpárja határozza meg:

$\vec{i} \to \vec{a} = \left(\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}\right),$

$\vec{j} \to \vec{b} = \left(-\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}\right).$

A két értékpárból a tenzor: $\underline{\underline{T}} = \left(\vec{a}\circ\vec{i} + \vec{b}\circ\vec{j}\right).$

A diádok kiszámítása:

$$\left[\vec{a}\circ\vec{i}\right] = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & 0 \\ a_y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 \\ \sin\varphi & 0 \end{bmatrix},$$

$$\left[\vec{b}\circ\vec{j}\right] = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_x \\ 0 & b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin\varphi \\ 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

A tenzor mátrixa:

$$\left[\underline{\underline{T}}\right] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,866 \\ 0,866 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

b) Az elforgatott $\vec{r}_A$ vektor meghatározása:

$$\vec{r}_A = \underline{\underline{T}}\cdot\vec{r}_P = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,866 \\ 0,866 & 0,5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,268 \\ 7,928 \end{bmatrix}.$$

$\vec{r}_A = \left(2,268\vec{i} + 7,928\vec{j}\right)\text{m}.$

1.4. Differenciálszámítás:

Az f függvény deriváltján az

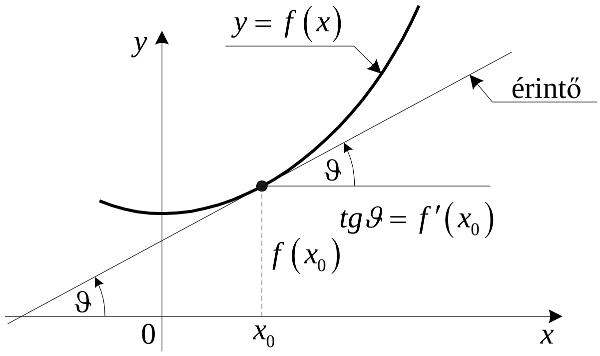
$$f'(x) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

határértéket értjük (feltételezve, hogy létezik és véges).

Az $y=f(x)$ függvény deriváltjának jelölései: $f',\ f'(x),\ y',\ y'(x),\ \dot{y},\ \frac{dy}{dx}$ stb., ahol $\dot{y}$ az idő szerinti első derivált.

A derivált x_0 helyen vett $f'(x_0)$ helyettesítési értékét szokás a függvény x_0 helyhez tartozó differenciálhányadosának is nevezni. A derivált előállítását deriválásnak vagy differenciálásnak nevezzük.

A $f'(x_0)$ differenciálhányados geometriai jelentése az $y=f(x)$ görbe x_0 helyhez tartozó érintőjének az iránytangense, azaz $f'(x_0)=tg\vartheta$ (1. ábra).



1. ábra

Amennyiben egy függvény valamely helyen vagy intervallumon deriválttal rendelkezik, akkor a függvény itt differenciálható. A differenciálhatóságból pedig a függvény folytonossága következik.

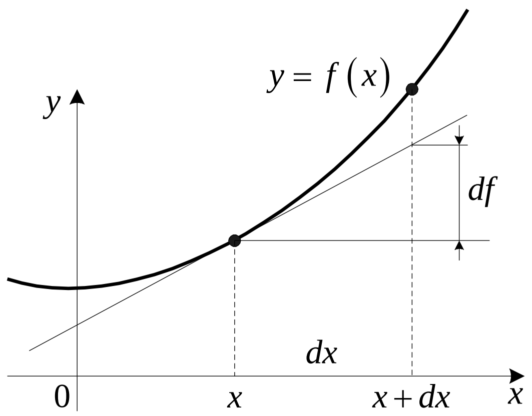
- **Deriválási szabályok:** Legyenek u, v, f, g differenciálható függvények. Ekkor:

1. $(Cu)' = Cu',\ C$ állandó;
2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
3. $(uv)' = u'v + uv'$;
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},\ v \neq 0$;
5. $\left[f\left(g(x)\right)\right]' = f'\left(g(x)\right)\cdot g'_x$ láncszabály;
6. Legyen $y=f(x)$ és $x=f^{-1}(y)$. Ekkor $f'(x) = \frac{1}{\left[f^{-1}(y)\right]'}$;
7. Ha $x=x(t),\ y=y(t)$, akkor $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

- **Alapfüggvények deriváltja:**

$C' = 0$, C állandó	$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$
$\left(\sin x\right)' = \cos x$	$\left(\cos x\right)' = -\sin x$
$\left(\operatorname{tg} x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x;$	$\left(\operatorname{ctg} x\right)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x} = -\left(1 + \operatorname{ctg}^2 x\right)$
$\left(e^x\right)' = e^x$	$\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$

Értelmezzük a függvény második, harmadik stb. deriváltját. Jelölésük: $f'', f''', \ldots, f^{(n)}, \ldots$. A f függvény differenciálja: $df = f'(x)\,dx$ (2. ábra).



2. ábra

<u>1.4.1. Példa:</u>

A $f'(x) := \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ formula alapján határozzuk meg az $f(x) = x^2$ és a $g(x) = \dfrac{1}{x}$ függvény deriváltját.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0}(2x + h) = 2x;$$

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(x+h)x} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.$$

1.4.2. Példa:

Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltját:

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\left(x^3\sqrt{x}\right)' = \left(x \cdot x^{\frac{1}{3}}\right)' = \left(x^{\frac{4}{3}}\right)' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x};$$

1.5. A határozatlan integrál:

A (nagy) F függvényt a (kis) f függvény primitív függvényének nevezzük valamely nyílt intervallumon, ha itt $F'(x) = f(x)$. Egy függvénynek végtelen sok primitív függvénye van, és ezek összességét f határozatlan integráljának nevezzük. Jelölése:

$$\int f(x)\,dx + C,$$

ahol C tetszőleges állandó (integrációs állandó). Például: $\int 2\,dx = 2x + C$.

Alapintegrálok:

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, ahol C konstans, például: $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$;
2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$;
3. $\int e^x dx = e^x + C$;
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, például $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$;
5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$;
6. $\int \cos x dx = -\sin x + C$.

Integrálási szabályok:

1. $\int k \cdot f(x) dx = k\int f(x)\,dx = k \cdot F(x) + C$, például: $\int 2\cos x dx = 2\sin x + C$;
2. $\int (f + g - h)\,dx = F + G - H + C$, például:
   $\int \left(e^x + \sin x - \frac{1}{x}\right) dx = e^x - \cos x - \ln|x| + C$;
3. $\int f' \cdot f^n dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + C$, például: $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'} \underbrace{\ln x}_{f^n}\,dx = \frac{\ln^2 x}{2} + C$;

4. $\int \frac{f'}{f}\,dx = \ln|f| + C$, például:

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln x}\,dx = \int \frac{1}{x}\frac{1}{\ln x}\,dx = \int \frac{\overbrace{\frac{1}{x}}^{f'}}{\underbrace{\ln x}_{f}}\,dx = \ln|\ln x| + C,$$

$$\int \operatorname{tg}x\,dx = -\int \frac{\overbrace{-\sin x}^{f'}}{\underbrace{\cos x}_{f}}\,dx = \ln|\cos x| + C,$$

$$\int \operatorname{ctg}x\,dx = \int \frac{\overbrace{\cos x}^{f'}}{\underbrace{\sin x}_{f}}\,dx = \ln|\sin x| + C.$$

5. $\int f(kx)\,dx = \frac{F(kx)}{k} + C$, például: $\int \cos 3x\,dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$,

$$\int e^{2x-5}dx = \frac{e^{2x-5}}{2} + C,$$

$$\int \frac{1}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x| + C$$

6. $\int (ax+b)^n dx = \frac{F(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a} + C$

7. $\int f' e^f dx = e^f + C$, például: $\int \underbrace{2}_{f'} e^{\overbrace{2x+3}^{f}} dx = e^{2x+3} + C$;

8. $\int f'\sin(f)dx = -\cos(f) + C$, például:

$$\int (6x+3)\sin(3x^2+3x)dx = -\cos(3x^2+3x) + C$$

9. $\int f'\cos(f)dx = \sin(f) + C$, például:

$$\int \underbrace{(e^x+2x)}_{f'}\cos\underbrace{(e^x+x^2)}_{f}dx = \sin(e^x+x^2) + C$$

Parciális integrálás:

$$\int uv'dx = uv - \int u'v\,dx$$

1.6. A határozott integrál:

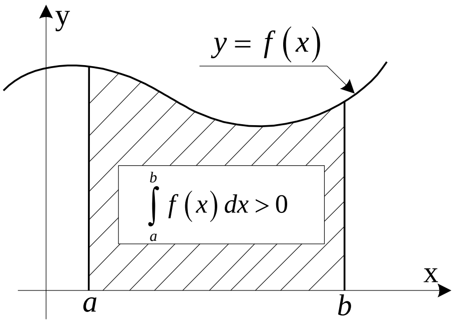
Az f függvény $[a,b]$ intervallumra vonatkozó határozott integrálján az integrálközelítő összegek sorozatának határértékét értjük (feltéve, hogy ez létezik és véges),

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \qquad (1)$$

ahol $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, ahol $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ az $[a,b]$ intervallum egy felosztása, ξ_i pedig az $[x_i - x_{i-1}]$ részintervallum egy tetszőleges pontja. Azt így értelmezett integrált Riemann-integrálnak is nevezzük.

Ha létezik az (1) határérték, akkor azt mondhatjuk, hogy f az $[a,b]$ intervallumon **integrálható.** Ha a függvény folytonos valamely intervallumon, akkor ott integrálható.

Ha f az $[a,b]$ intervallumon integrálható, és itt $f(x) \geq 0$, akkor az (1) határozott integrál geometriai jelentése az $y = f(x)$ görbe alatti és $[a,b]$ szakasz fölötti síkidom területe.



3. ábra

A határozott integrál tulajdonságai:

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx, \text{ } C \text{ állandó;}$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, a < c < b.$$