SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM **ALKALMAZOTT MECHANIKA TANSZÉK**

FELÜLETI FESZÜLTSÉGI ÁLLAPOT MEGHATÁROZÁSA NYÚLÁSMÉRÉSSEL, ELMOZDULÁSMÉRÉS

Laboratóriumi mérési gyakorlat
Egyetemi alapképzésben (BSc) részt vevő mérnökhallgatók számára

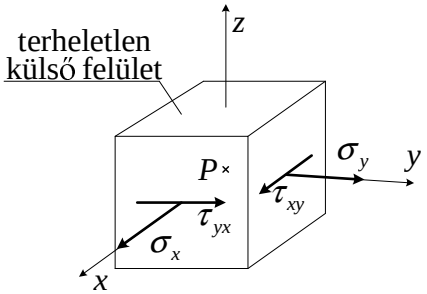
Összeállította: Aczél Ákos, egyetemi tanársegéd

1. Szilárdságtani alapismeretek

Alkatrészeknél, mérnöki szerkezeteknél gyakran előforduló eset, hogy a felületen, vagy a felület közelében alakul ki kritikus (veszélyes) feszültségi állapot és ennek következtében a felületről indul el a szerkezet tönkremenetele. Ezért fontos, hogy az alkatrészek felületén kialakuló feszültségi állapotot meghatározzuk. A laboratóriumi gyakorlaton az alkatrész felületén levő pontokban fellépő feszültségek meghatározásának egyik leggyakoribb mérési módjával az ún. nyúlásmérő bélyeges mérési technikával, valamint az elmozdulásméréssel ismerkedünk meg.

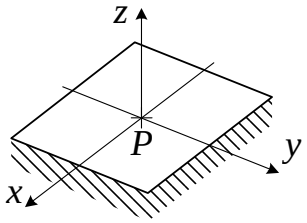
1.1. Felületi feszültségi állapot

A nyúlásmérő bélyeges technikát a műszaki fejlesztéssel foglalkozó cégek gyakran alkalmazzák, ez az eljárás ugyanis tetszőleges alakú és terhelésű alkatrész felületén alkalmas az alakváltozási- és a feszültségi állapot meghatározására. A számítógépes méretezési módszerek elterjedésével (Pl: végeselem módszer, peremelem módszer, véges differenciák módszere, stb.) a nyúlásmérési technikát gyakran használjuk a számítások helyességének ellenőrzésére.
A valóságos szerkezeteken feszültséget nem tudunk mérni! Az ún. nyúlásmérő bélyegekkel a szerkezet külső felületén különböző irányokban a fajlagos nyúlás értékét tudjuk mérni, és ebből a Hooke-törvény ismeretében a feszültségeket meghatározni.
Amint az előbbiekből kitűnik, ismernünk kell bizonyos szilárdságtani alapfogalmakat a síkbeli feszültségállapothoz kapcsolódóan.



A z normálisú sík terheletlen külső felület:

$$\vec{p}_z = \vec{0}$$
$$\Downarrow$$
$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0$$



A felületi feszültségállapot szemléltetése
1. ábra

Az alkatrész terheletlen felületén feszültség nem ébred: $\vec{p}_z = \vec{0} \;\Rightarrow\; \tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0$. A felület pontjaiban az *1. ábra* szerint σ_x, τ_{yx}, illetve σ_y, τ_{xy} feszültségek ébrednek. A τ_{xy} és τ_{yx} feszültségekre érvényes a dualitás elve, vagyis az $\vec{i}$ és $\vec{j}$ normálisú lapok közötti élre nézve a τ_{xy} és τ_{yx} feszültségek vagy összefutó, vagy szétfutó irányúak és abszolút értékük egyenlő.
A terheletlen felületen kialakuló feszültségi állapotot tehát a következő feszültségi tenzor írja le:

$\left[\underset{xyz}{\underline{\underline{F_P}}}\right]=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & 0\\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, ahol a z tengely a terheletlen felület kifelé mutató normálisa, egyben feszültségi főirány.

A $\vec{k}$ normálisú, terheletlen felületen lévő P pont alakváltozási állapotát a következő alakváltozási tenzor írja le: $\left[\underline{\underline{A_P}}\right]=\begin{bmatrix}\varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0\\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_z\end{bmatrix}$.

A két tenzor koordinátái között a Hooke-törvény teremt kapcsolatot a következő összefüggések szerint.

Az alakváltozási jellemzők előállítása a feszültségekből:

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left(\sigma_x-\nu\sigma_y\right),$$

$$\varepsilon_y=\frac{1}{E}\left(\sigma_y-\nu\sigma_x\right),$$

$$\varepsilon_z=-\frac{\nu}{E}\left(\sigma_x+\sigma_y\right)=-\frac{\nu}{1-\nu}\left(\varepsilon_x+\varepsilon_y\right),$$

$$\gamma_{xy}=2\frac{1+\nu}{E}\tau_{xy},$$

A feszültségek meghatározása az alakváltozási jellemzőkből:

$$\sigma_x=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y\right)$$

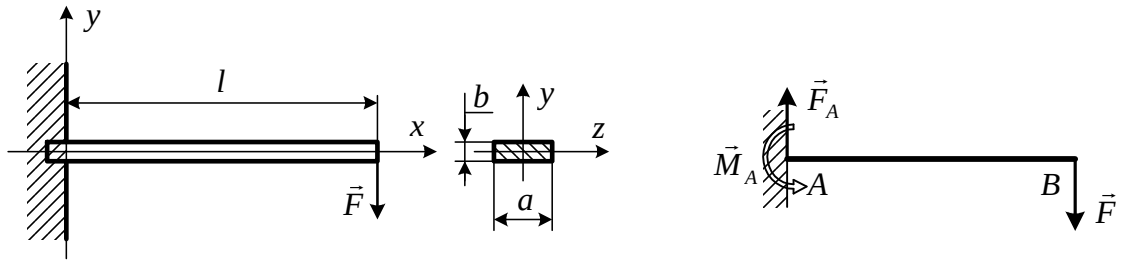
$$\sigma_y=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y+\nu\varepsilon_x\right)$$

$$\tau_{xy}=\frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\gamma_{xy}$$

ahol E a rugalmassági modulus, ν a Poisson-tényező. (Acélra $E\approx 2\cdot 10^5\,\text{MPa}$, $\nu\approx 0{,}3$.)

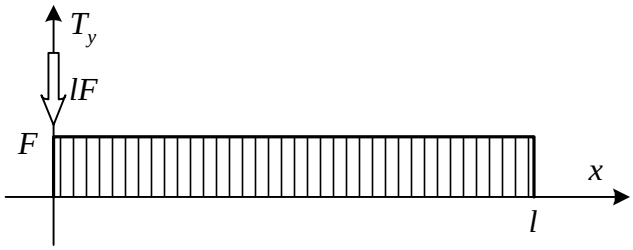
1.2. Hajlított, nyírt tartó feszültségi állapota

A mérés során egy hajlított, nyírt tartót fogunk vizsgálni, melynek elméleti úton előállított megoldását ismerjük. A *2. ábrán* látható egyik végén befalazott és másik végén F erővel terhelt tartó feszültségi viszonyait a rúdelmélet alapján tárgyaljuk.

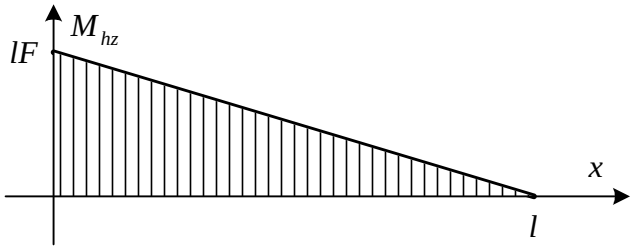


Hajlított, nyírt tartó és rúdmodellje a támasztóerő-rendszerrel
2. ábra

A tartó A keresztmetszeténél (a befalazásnál) az ábrán feltüntetett $\vec{F}_A=-\vec{F}$ erő és $\vec{M}_A=-l\,\vec{i}\times\vec{F}=l\left|\vec{F}\right|\vec{k}$ nyomaték biztosítja az egyensúlyt. Ezek ismeretében meghatározhatjuk az igénybevételi függvényeket és megrajzolhatjuk az igénybevételi ábrákat.



$$T_y(x) = F$$



$$M_{hz}(x) = F(l-x)$$

Hajlított, nyírt tartó igénybevételi ábrái és igénybevételi függvényei
3. ábra

A szilárdságtani szempontból veszélyes keresztmetszet a befalazásnál lévő *A* keresztmetszet. A fenti függvényekből a tartó bármelyik keresztmetszetének igénybevétele kiszámítható. A rúd tetszőleges keresztmetszetének egy kiválasztott pontjában a következő feszültségi tenzor lép fel:

$$\left[\underline{\underline{F}}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{ahol} \quad \sigma_x(x,y) = \frac{M_{hz}(x)}{I_z} y = \frac{12F(l-x)}{ab^3} y$$

$$\tau_{xy}(y) = \tau_{yx}(y) = -\frac{F}{A} 6\left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

A Hooke-törvény segítségével kiszámíthatjuk az alakváltozási tenzort:

$$\left[\underline{\underline{A_P}}\right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \quad \text{ahol} \quad \varepsilon_x(x,y) = \frac{\sigma_x(x,y)}{E} = \frac{12F(l-x)}{Eab^3} y$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$$

$$\gamma_{xy}(y) = \gamma_{yx}(y) = 2\frac{1+\nu}{E}\tau_{xy} = -2\frac{1+\nu}{E}\frac{F}{A}6\left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

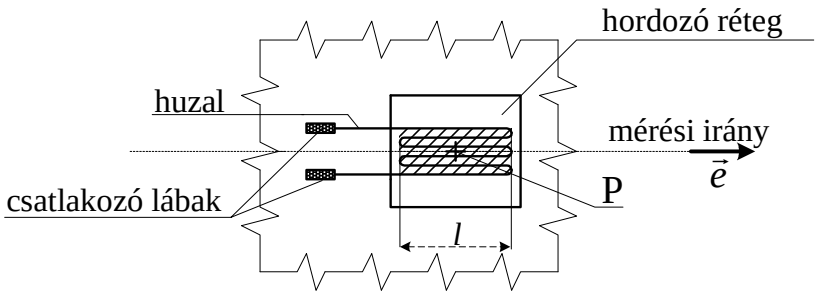
Az alakváltozást csak az alkatrész felületén tudjuk mérni, ezért a tartó felületi pontjaiban fellépő alakváltozási koordinátákat határozzuk meg. Amennyiben $y = \pm\frac{b}{2}$ (a tartó „alsó” és „felső” felülete), $\varepsilon_x(x) = \pm\frac{6F(l-x)}{Eab^2}$, $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$, $\gamma_{xy} = 0$. Ezen felületeken az alakváltozást tehát kizárólag a hajlítás okozza. Ha meg tudjuk mérni ezeken a felületeken az x tengely irányú fajlagos nyúlást, akkor következtethetünk a felület feszültségi állapotára is.

A feszültségkoordináták nem függenek a *z* helykoordinátától, ezért ha $z = \pm\frac{a}{2}$ (a tartó oldalfelületei), akkor normál feszültséget és csúsztató feszültséget egyaránt megfigyelhetünk. Amennyiben $z = \pm\frac{a}{2}$ és $y = 0$ (az oldalfelületek középvonala), akkor a normál feszültség eltűnik, miközben a csúsztató feszültség és a belőle fakadó szögtorzulás maximális. Ha meg tudjuk mérni eze-

ken a szakaszokon a szögtorzulást, akkor következtethetünk a felület feszültségi állapotára is. A fajlagos nyúlást és közvetve a szögtorzulást nyúlásmérő bélyeggel mérhetjük meg.

2. A nyúlásmérő bélyeg

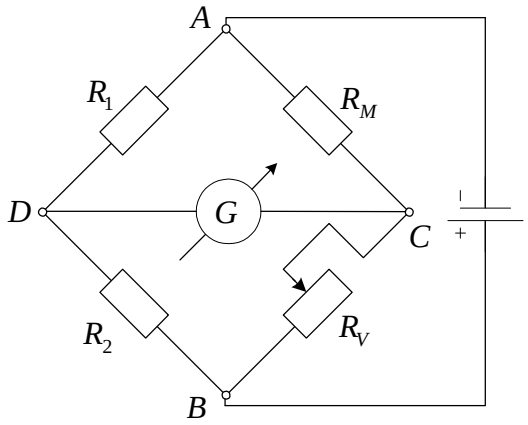
Ismeretes, hogy egy huzal elektromos ellenállása függ a huzal hosszától és keresztmetszetétől: $R = \rho \frac{l}{A}$, ahol l a vezető hossza, A a vezető keresztmetszete, ρ a vezető fajlagos ellenállása. Ha a huzal hossza megnő, vagy keresztmetszete lecsökken, az ellenállása megnövekszik. Ha egy ilyen huzalt úgy rögzítünk az alkatrész felületéhez, hogy az alkatrész alakváltozását a huzal is elszenvedje, anélkül, hogy hatással lenne magának a vizsgált alkatrésznek az alakváltozására, akkor ennek a huzalnak az ellenállás-változásából következtethetünk a szóban forgó alkatrész vizsgált felületén bekövetkező alakváltozásra.
A nyúlásmérő bélyeg eredeti formájában tehát egy villamos szigetelőlapra (hordozó réteg) rögzített elektromos vezető huzal, amelynek felületére a külső behatások kizárására egy védőborítást visznek fel. A nyúlásmérő bélyeget a terheletlen alkatrész mérendő P pontjára ragasztjuk, pontosabban az alkatrész szabad felületére (*4. ábra*).



A felület P pontjára ragasztott nyúlásmérő bélyeg vázlata
4. ábra

A ragasztónak kellően szilárdnak kell lennie ahhoz, hogy a felület alakváltozását maradéktalanul továbbítsa a mérőbélyeg hordozó rétegének. A hordozó rétegnek pedig olyan lágynak kell lennie, hogy az alkatrész alakváltozását ne befolyásolja.
A modern nyúlásmérő bélyegek mérőelemei a nyomtatott áramköri technikának megfelelően már nem vezető huzalok, hanem az ábra alakját követő vezető fóliák, vezetőrétegek.
Az acél alkatrészek méréséhez használt nyúlásmérő bélyegek névleges elektromos ellenállása $R = 120\,\Omega$ nagyságú. A mérési hossz (az ábrán l jelöli) a mérési céltól függően $l = 0,3 - 100$ mm; szokványos gépészeti feladatoknál 1-3-5-7-10 mm értékű. Fontos megemlíteni, hogy a mérőbélyeg nem egy pontban, a P pontban mér, hanem a P pont környezetében a mérési hossznak és a bélyeg szélességének megfelelő területen az átlagos nyúlást méri. A vezetőréteg kialakítása biztosítja a mérőbélyeg ellenállásának nagyfokú érzéketlenségét a mérési irányra merőleges nyúlásra. A szokásos keresztirányú érzékenység tizedszázalék nagyságrendű, vagyis az alkatrész mérési irányra merőleges nyúlása több százszor kisebb ellenállás-változást okoz, mint az ugyanakkora nagyságú, de a mérési irányba eső nyúlás.
Ez alapján feltételezhetjük, hogy a jól felragasztott nyúlásmérő bélyeg elektromos vezetőjének fajlagos nyúlása megegyezik a P pontban, illetve a pont megfelelő környezetében a mérendő alkatrész felületén bekövetkező átlagos fajlagos nyúlással.

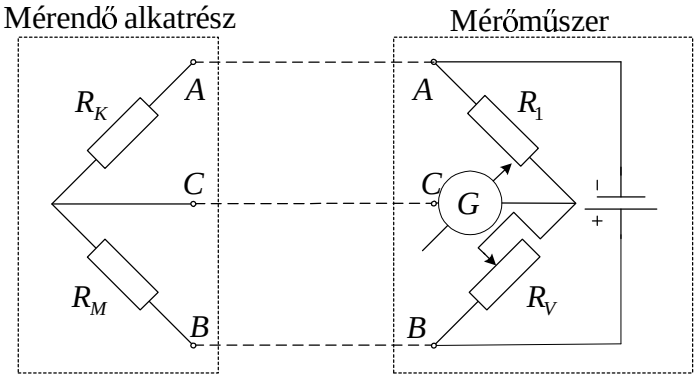
A bélyeg elektromos ellenállása: $R = \rho \frac{l}{A} \quad [\Omega]$, ahol l a vezetőréteg hossza m-ben, A a vezetőréteg keresztmetszete mm^2-ben, ρ a vezetőréteg fajlagos ellenállása $\frac{\Omega\ \mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$ mértékegységben.
Ha a bélyeg az alkatrész terhelése közben a mérendő felülettel együtt alakváltozva megnyúlik, akkor a bélyegen lévő vezetőréteg megnyúlik, keresztmetszete lecsökken, így az R ellenállása megváltozik. A tapasztalat szerint ez a ΔR ellenállás-változás arányos a fajlagos nyúlással: $\frac{\Delta R}{R} = k_0 \varepsilon$, ahol k_o a bélyegállandó, más néven átalakítási tényező. Mivel a k_o bélyegállandó 2 és 2,7 közötti érték, ezért a relatív ellenállásváltozás a fajlagos nyúlás nagyságrendjébe esik. Ilyen kis (tized-, század-, vagy akár ezredszázaléknyi) ellenállásváltozás pontos és megbízható mérésére az erre a célra épített mérőműszer, az ún. mérőerősítő alkalmas. A mérőerősítő működése a *Wheatstone-híd* (kiejtve: Vítszton-híd) kiegyenlítésére vezethető vissza.
Az alkatrész felületére ragasztott mérőbélyeget (R_M a mérőbélyeg ellenállása), a bélyeg csatlakozó lábaihoz forrasztott vezetékekkel csatlakoztatva a mérőműszerbe épített három másik ellenállással ún. *Wheatstone-híd* kapcsolásba kötjük össze (*5. ábra*).



A mérő-híd bekötési vázlata
5. ábra

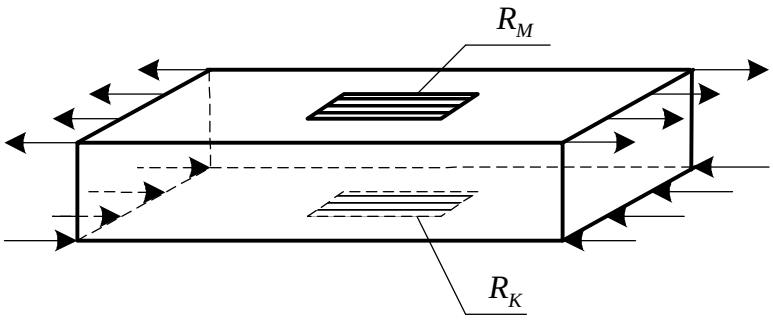
A *Wheatstone-híd A, B* kapcsaira egyenáramú áramforrást, a *C* és *D* kapcsok közé egy galvanométert (érzékeny árammérő) kapcsolunk. A mérendő alkatrész terheletlen. Az R_V változtatható ellenállást úgy állítjuk be, hogy a galvanométeren ne folyjon áram, vagyis a galvanométer mutatója $I_G = 0$ áramértéket jelezzen. Ilyenkor a *C* és a *D* pont azonos potenciálon van, vagyis az ellenállásokból képzett feszültségosztókra fennáll az $\frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{R_M}{R_M + R_V}$ egyenlőség. A nevezőkkel való bővítés után kiesik $R_1 R_M$ és kapjuk az $R_M R_2 = R_1 R_V$, vagy az ezzel egyenértékű $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_M}{R_V}$ egyenlőséget. Vagyis a híd szemben lévő ágaiban lévő ellenállások szorzata egyenlő.
Ha teljesül az $R_1 = R_2$ egyenlőség, akkor célszerű olyan R_V változtatható ellenállást használni, melynek ellenállása a középállásban megegyezik a mérőbélyeg ellenállásával.
Ha a mérendő alkatrészt megterheljük, akkor az R_M nyúlásmérő bélyeg megnyúlik, a híd elhangolódik, és a galvanométeren áram folyik. Ekkor az R_V ellenállást ismét addig változtatjuk, míg az $I_G = 0$ kiegyenlítettség be nem áll. A hangolási értéket mindkét esetben a változtatható ellenállás skálájáról tudjuk leolvasni. A leolvasás különbsége megadja, mennyi az R_V ellenállásnak a

ΔR_V megváltozása a terheletlen állapothoz képest. Mivel $\Delta R_V = \Delta R_M = R_M k_o \varepsilon$, így ebből a mérőbélyeg fajlagos nyúlása meghatározható.
R_M értékére azonban a munkadarab hőmérsékletének változása is hatással van, ezt a hatást ki kell egyenlítenünk, kompenzálnunk kell. Annál is inkább, mert a munkadarabnak már néhány Celsius fokos melegedése olyan mértékben változtatja a mérőbélyeg ellenállását, mint egy 10^{-5} nagyságrendű fajlagos nyúlás. Ekkora hőmérsékletváltozást pedig pusztán a munkadarab megvilágításával is okozhatunk. A 6. ábrán látható mérési elrendezésben a *Wheatstone-híd* két „félhídra” oszlik. A jobboldali félhíd a mérőerősítőben foglal helyet, a baloldali félhíd mindkét ellenállása egy-egy nyúlásmérő bélyeg.



A mérési elrendezés kompenzációval
6. ábra

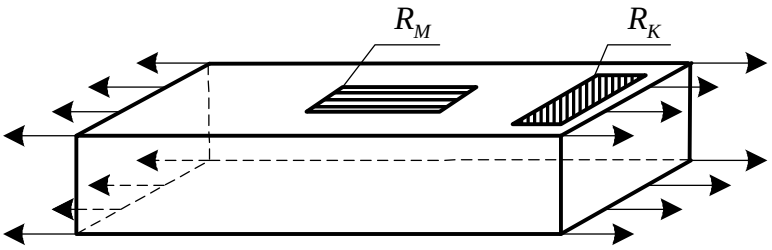
R_M a mérendő alkatrész alakváltozását érzékeli a terhelés megjelenésekor, az R_K kompenzátor bélyeget pedig a mérendő alkatrész környezetében olyan helyre ragasztjuk, ahol nem ébred feszültség, nem jön létre nyúlás, de a hőmérséklet közel azonos a mérendő *P* pont környezetének hőmérsékletével. Ekkor a hőmérséklet változása miatt bekövetkező ellenállás-változások: ΔR_M és ΔR_K azonos értékűek. Így a szemben lévő hídágakban az ellenállások szorzata azonos marad, nem szűnik meg a híd kiegyenlítettsége. Ezzel tehát kikompenzáltuk a hőmérsékletváltozás hatását. A 6. ábra bal oldalán látható R_M -R_K kapcsolást fél hídkapcsolásnak nevezzük.
Az 7. és 8. ábrán a hőmérséklet-kompenzált nyúlásmérés gyakorlati megvalósítása látható rudak két legegyszerűbb igénybevételére: hajlításra és húzás-nyomásra.



Hőmérséklet-kiegyenlítés hajlítás esetén
7. ábra

Ha a rúd igénybevétele tiszta egyenes hajlítás, akkor a két mérőbélyeg alkalmazása maradéktalanul kompenzálja a hőmérséklet változásának hatását, hiszen a híd szomszédos ágaiban vannak. Az alakváltozásból eredő ellenállás-változásaik viszont összeadódnak, az R_M -mel jelölt mérőbélyeg ugyanis nyúlik, vagyis ellenállása nő, míg az R_K -val jelölt hossza és ezzel ellenállása csök-

ken. Így a híd kiegyenlítése után leolvasott ellenállás-változást osztani kell kettővel, hogy az R_M ellenállású mérőbélyegnél fellépő fajlagos nyúlást kiszámíthassuk.



Hőmérséklet-kiegyenlítés húzás-nyomás esetén
8. ábra

Ha a rúd igénybevétele húzás-nyomás, akkor a hőmérséklet-változást teljesen kikompenzálhatjuk a 8. ábra szerinti elrendezésben. A próbatestnek a terhelés irányára merőleges méretei és ezzel az R_K jelű bélyeg hossza csökkennek, amit a nyúlásmérés kiértékelésekor figyelembe kell venni. A *Wheatstone-híd* kiegyenlített állapota $R_V = R_1 \frac{1+k_0\varepsilon_z}{1-k_0\nu\varepsilon_z}$ esetén következik be, ami a magasabb rendű tagok elhanyagolásával az $R_V = R_1\left[1+\left(1+\nu\right)k_0\varepsilon_z\right]$ kifejezéssé egyszerűsödik. Az így kapott nyúláseredményt tehát $\left(1+\nu\right)$-vel osztani kell, hogy a ténylegesen bekövetkezett nyúlást megkapjuk (ν a Poisson-tényező).

A legmodernebb nyúlásmérő bélyegek bizonyos esetekben egyáltalán nem igénylik a hőmérséklet-kiegyenlítést. A vezetőréteg anyagának gondos megválasztásával ugyanis elérhető, hogy a bélyeg anyagának a hőmérsékletváltozás miatt bekövetkező ellenállás-változása ugyanakkora abszolút értékű, de ellentétes előjelű legyen, mint az a változás, ami a mérendő alkatrész hőmérsékletváltozás okozta tágulásából ered. Ha tehát valóban olyan hőtágulású anyagból készült alkatrészt vizsgálunk, amilyenre a speciális bélyeget tervezték, akkor a hőkompenzálás elmaradhat. Ezeknek a speciális bélyegeknek viszont komoly hátrányuk, hogy amennyiben nem a megfelelő anyagot vizsgáljuk velük, akkor teljesen hamis eredményt szolgáltathatnak. A hőkompenzálásra tehát különösen ügyelni kell, ha ismeretlen hőtágulású (ismeretlen anyagú) alkatrészt vizsgálunk. Semmiképpen nem alkalmazható hőkompenzáló bélyegként a mérőbélyegtől eltérő típus, hiszen előfordulhat, hogy ezzel a kompenzálás helyett tovább növeljük a kiegyenlítetlenséget!

A fent leírt mérési elv az idők folyamán nem változott, de a mérőműszerek lényegesen korszerűbbek lettek. Az egyenáramú műszerek helyett váltóáramú ún. vivőfrekvenciás mérőerősítőket használunk. A hidat csak a mérés kezdetén kell kiegyenlíteni, s a kijelző skálát úgy is kalibrálhatjuk, hogy nyúlás helyett a feszültséget mutassa. A mérőműszerek egyszerre több mérőbélyeget is ki tudnak szolgálni. (A többcsatornás mérőerősítő általában 6 vagy 12 csatornás, de létezik 100 csatornás mérőerősítő is.) A laboratóriumi gyakorlaton egy *Hottinger-Baldwin Messtechnik GmbH* által gyártott *Quantum 840* típusú számítógépes 6, illetve 12 csatornás mérő és méréskiértékelő műszercsoportot használunk. A csatornák egy része hőfokmérésre, illetve elmozdulás mérésre használható.

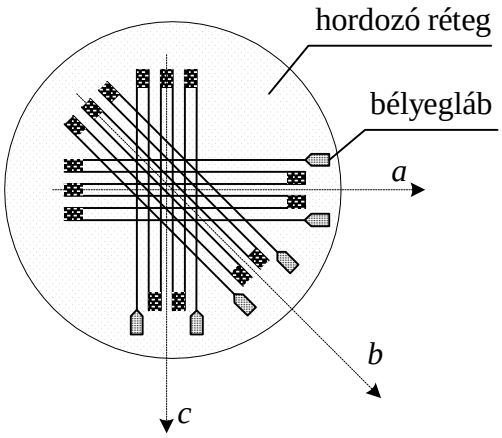
3. Felületi alakváltozási- és feszültségi állapot meghatározása nyúlásméréssel

A $\vec{k}$ normálisú terheletlen felületen lévő P pont alakváltozási tenzorát már meghatároztuk: $\left[\underline{\underline{A_P}}\right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$.

A tenzor koordinátái közül csak öt nem egyenlő nullával, és ezek sem mind függetlenek egymástól: $\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)$, $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$. (Első összefüggés a $\sigma_z = 0$ egyenlőségből, a második az alakváltozási tenzor szimmetriájából következik.) Hasonló módon kapjuk a $\vec{j}$ normálisú, terheletlen felületen fekvő pontok alakváltozási tenzorát:

$$\left[\underline{\underline{A_P}}\right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

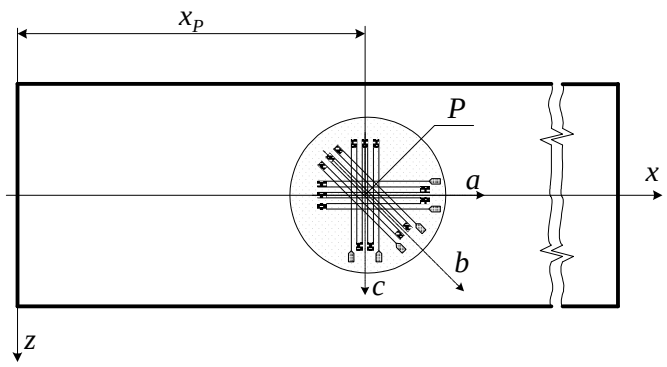
Tehát az alkatrész terheletlen felületén lévő tetszőleges pont alakváltozás-állapotát meghatározhatjuk az adott pontban végzett három egymástól független nyúlásmérés segítségével. Erre a feladatra fejlesztették ki az úgy nevezett rozettákat. A rozetták olyan összetett nyúlásmérő bélyegek, amelyek ugyanabban a pontban több különböző mérési irányban mérik a fajlagos nyúlást. A mérőbélyegek mérési irányának egymással bezárt szöge a gyakorlatban 45°, vagy 60°. Az előbbi esetre meghatározzuk az alakváltozási tenzor koordinátáinak kiszámítási módját.



45°-os rozetta
9. ábra

A rozetta három, egymás fölé rétegzett nyúlásmérő bélyegből áll. A mérési irányok (*a*, *b*, *c*) egymással 45°-t, illetve 90° -t zárnak be. A mérőbélyegek középpontjai pontosan egymás fölött vannak, ezért a három mérőbélyeg a három mérési irányban bekövetkezett fajlagos nyúlást ugyanannak a pontnak kis környezetében méri! A nyúlásmérő bélyegeket a „bélyeglábakra” forrasztott kivezetésekkel csatlakoztathatjuk a mérőerősítőhöz. A mérendő alkatrész felületére a speciális ragasztóval a hordozó réteget kell rögzíteni.

Ha a hajlított, nyírt tartó felső és/vagy alsó felületén kialakuló alakváltozást vizsgáljuk, akkor a rozettát a 10. ábra szerint elrendezésben ragasztjuk az alkatrészre.



A tartóra ragasztott rozetta a $P(x_P, b/2, 0)$ pont kis környezetében méri az *a, b, c* irányú fajlagos nyúlásokat. A rozetta irányításából következik, hogy $\varepsilon_a = \varepsilon_x$ és $\varepsilon_c = \varepsilon_z$.

45°-os rozetta a hajlított, nyírt tartó felső felületén
10. ábra

A *b* irányú fajlagos nyúlást pedig kifejezhetjük az alakváltozási tenzor fenti alakjából: $\varepsilon_b = \vec{n}_b \cdot \vec{\alpha}_b = \vec{n}_b \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{n}_b$, ahol $\vec{n}_b$ a *b* irányú egységvektor, $\vec{\alpha}_b$ a *b*-re merőleges felületen fellépő alakváltozás-vektor.

Ebben az esetben $\vec{n}_b = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}; & 0; & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$.

Így $\vec{\alpha}_b = \begin{bmatrix} \varepsilon_a & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & 0 & \varepsilon_c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_a + \frac{\sqrt{2}}{4}\gamma_{xz}; & 0; & \frac{\sqrt{2}}{4}\gamma_{zx} + \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_c \end{bmatrix}$.

Végül $\varepsilon_b = \vec{n}_b \cdot \vec{\alpha}_b = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}; & 0; & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_a + \frac{\sqrt{2}}{4}\gamma_{xz}; & 0; & \frac{\sqrt{2}}{4}\gamma_{zx} + \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_c \end{bmatrix} = \frac{\varepsilon_a}{2} + \frac{\varepsilon_c}{2} + \frac{\gamma_{zx}}{2}$,

ahol már kihasználtuk az alakváltozási tenzor szimmetriáját ($\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$). Kifejezhetjük a fajlagos szögtorzulást: $\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = 2\varepsilon_b - (\varepsilon_a + \varepsilon_c)$. A vizsgált felületre merőleges ε_y fajlagos nyúlást a felület terheletlen voltából számíthatjuk: $\varepsilon_y = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_z) = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_a + \varepsilon_c)$. Tehát, ha a három, egymással 45°-os szöget bezáró fajlagos nyúlást a mérésből meghatározzuk, akkor az alakváltozási tenzor minden koordinátáját kiszámíthatjuk.

Az alakváltozási tenzor ismeretében mód nyílik a feszültségi tenzor meghatározására is, a Hooke-törvény segítségével:

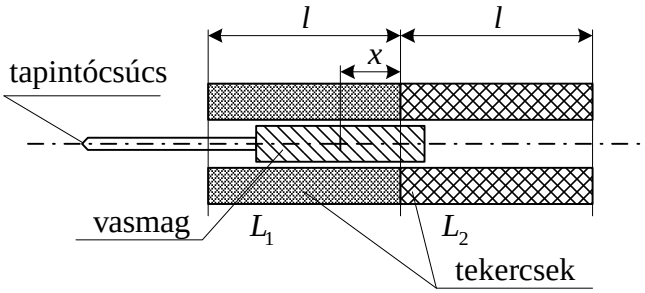
$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_a + \nu\varepsilon_c) \qquad \sigma_y = 0$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_c + \nu\varepsilon_a) \qquad \tau_{yx} = \tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left[2\varepsilon_b - (\varepsilon_a + \varepsilon_c)\right] \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$$

4. Elmozdulásmérés induktív útadóval

A befalazott és megterhelt tartó pontjai elmozdulnak. Ezeket az elmozdulásokat kiszámíthatjuk a Castigliano-tétel (kiejtve: Kasztiliánó) segítségével. A laboratóriumi gyakorlat során azonban a tartó egy pontjának a különböző terhelések során bekövetkező elmozdulását nem számítással, hanem méréssel fogjuk meghatározni.
Vizsgálataink során olyan kis elmozdulásokat kell pontosan megmérni, melyek szabad szemmel esetleg észre sem vehetők. Az ilyen kis elmozdulások mérésére induktív elmozdulás-mérőt, vagy a műszaki gyakorlatban elterjedt nevén: induktív útadót használunk.
Az induktív útadó működése azon alapul, hogy egy tekercs induktivitása megnövekszik, ha ferromágneses anyagból készült tárgy közeledik hozzá. Acéltárgyak elmozdulását tehát már egy egyszerű tekercs segítségével is mérhetnénk, azonban az induktivitás a távolságnak nem lineáris függvénye, továbbá a zajszint és a pontosság rendkívüli mértékben függene a távolságtól. A gyakorlatban az úgynevezett tapintós, kettőstekercsű induktív útadó rendelkezik megfelelő linearitással és nagy mérési tartománnyal.



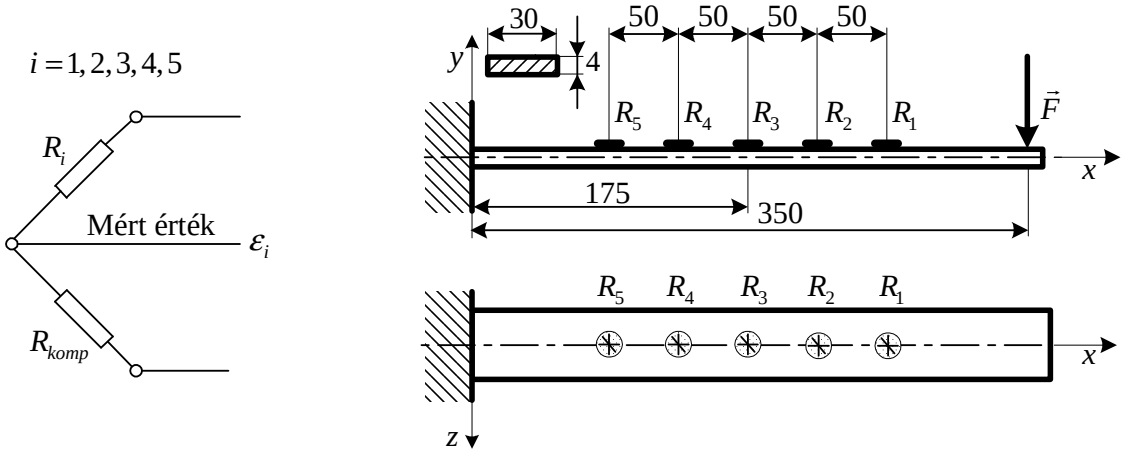
Tapintós kettőstekercsű induktív útadó
11. ábra

A két tekercs belsejében mozgó vasmag pillanatnyi helyzetétől függ az L_1 és L_2 tekercs induktivitása, valamint a két tekercs M kölcsönös induktivitása.

A tekercsek L_1 és L_2 induktivitásából, valamint az M kölcsönös induktivitásból meghatározható a vasmag *x* elmozdulása a 11. ábrán látható középhelyzettől: $x = \alpha \frac{L_1 - L_2}{L_1 + L_2 + 2M} = \alpha K$, ahol α a készülékre jellemző állandó. A $K = \frac{L_1 - L_2}{L_1 + L_2 + 2M}$ mennyiség ugyanis – szemben magukkal az L_1, L_2, M induktivitásokkal – széles tartományon belül lineáris függvénye az *x* elmozdulásnak. A mérőerősítő a szükséges induktivitások mérése után közvetlenül szolgáltatja az *x* elmozdulást. De kielégítő pontosságot érhetünk el a két tekercs félhídba kapcsolásával is, ahogy a nyúlásmérő bélyeg hőmérsékletkompenzálásánál tettük. Ekkor a két induktivitás különbségét mérjük és ez a vasmag elmozdulásával arányos, feltéve, hogy ez az elmozdulás kicsi az útadó tekercseinek hosszához képest. Mivel éppen a kicsi (legfeljebb néhány milliméternyi) elmozdulások mérése a célunk, ez a feltétel teljesül, hiszen a tekercsek 5-10 cm hosszúak.

5. A mérés leírása, normál feszültség meghatározása hajlított-nyírt tartón:

A nyúlásmérő bélyeg alkalmazásával a befalazott, hajlított-nyírt tartó felső felületének alakváltozását vizsgáljuk a terhelés függvényében. A 12. *ábrán* látható, egyik végén befogott, téglalap keresztmetszetű tartót különböző nagyságú súlyokkal terheljük. A súlyterhelésből származik a tartó $\vec{F}$ terhelése. A mérés során három terhelési esetet vizsgálunk, melyekben az $\vec{F}$ terhelő erő nagysága *5N*, *10N* és *15N*. A laboratóriumi mérés előtt valamely terhelési esetre készítse el a jegyzőkönyvet! A tartó pontjaiban tehát nyírás és hajlítás egyidejűleg fellép.



A laboratóriumi mérés vázlata
12 ábra

A laboratóriumi mérés oldal- és felülnézetben
13. ábra

Mérési feladat:

- Adott terhelésre nyúlásméréssel meghatározni a felső felület öt megadott pontjában a feszültségi állapotot, vagyis a feszültségi tenzort. (A tartó anyagának rugalmassági modulusát és Poisson-tényezőjét ismerjük: $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\nu = 0,3$.)
- A rúdelmélet alapján számítással meghatározni a feszültségi állapotot ugyanabban az öt pontban, ugyanazzal a terheléssel. A számításokat összehasonlítjuk a mért értékekkel.
- A mérési eredményekből is és a rúdelmélet alapján számoltakból is megrajzolni a tartó adott szakaszára az $M_{hz}(x)$ nyomatéki ábrát.

- Három különböző terhelésre mind az öt pontban méréssel felvenni az $\varepsilon_x = \varepsilon_x(\sigma_x)$ diagramot.
- A tartó lehajlását egy adott pontban megmérni a három különböző terhelés esetén.

A mérés menete tehát a következő:

1. A terheletlen (pontosabban a csak a saját súlyával terhelt) tartón lévő mérőbélyegekhez kapcsolódó *Wheatstone*-hidakat kiegyenlíttetjük a mérőerősítővel.
2. Az ismert súllyal megterheljük a tartót és a beálló új egyensúlyban leolvassuk a mérőbélyegeknél tapasztalt fajlagos nyúlásokat és az induktív útadó által szolgáltatott lehajlást.
3. A terhelést levesszük és még terheletlenül ismét kiegyenlíttetjük a *Wheatstone*-hidakat.

Ugyanezeket a lépéseket elvégezzük mindhárom terhelés esetében.

A méréssorozat eredményeként tizenötször három fajlagos nyúlás értékhez és három lehajlásértékhez jutunk. (Minden rozetta három fajlagos nyúlás értéket szolgáltat mind az öt helyen és mind a három súly esetén.)

A mérési eredmények kiértékelése a következőképpen történik:

1. A harmadik fejezet első felében leírtak szerint meghatározzuk az öt pont feszültségi tenzorát a három különböző terhelés esetén. Várakozásaink szerint a tenzoroknak csak a σ_x koordinátája nem lesz zérus. A korlátozott mérési pontosság miatt a többi koordinátára sem feltétlenül kapunk nullát, de nagyságrendekkel kisebb számot, mint σ_x-re. Figyelmeztetés: ne „kozmetikázzuk” a mérési eredményeket abból a célból, hogy a várakozásoknak megfelelő eredmény jöjjön ki! A mérési pontatlanság a mérés természetes velejárója, melyet nem elfedni, hanem korrekten kezelni és a mérés fejlesztésével csökkenteni kell!
2. A terhelések ismeretében, a rúdelmélet segítségével számítással is meghatározzuk ezeket a tenzorokat. Természetesen itt valóban csak σ_x koordinátákat kapunk, vagyis a feladat ennek a tizenöt normálfeszültségnek a kiszámítása.
3. A nyomatéki ábrák megrajzolása során a három terhelés esetét külön-külön koordinátarendszerben ábrázoljuk. Így három ábrát kapunk, mindegyikben két-két görbét (várakozásaink szerint egyenest). Egyiket a rúdelméletből számítjuk (az első fejezet második része alapján), másikat a mérési eredményeinkből számítjuk a következő egyszerű képlet alapján: $M_{hz}(x) = \sigma_x(x)K_z = \sigma_x(x)\dfrac{I_z}{b/2} = \sigma_x(x)\dfrac{ab^2}{6}$. A „csaknem” egy egyenesre illeszkedő pontokra egyenest kell illeszteni a hatodik fejezetben részletezett legkisebb négyzetek módszerével.
4. Az öt vizsgált pont $\varepsilon_x = \varepsilon_x(\sigma_x)$ függvényének előállítása a következőképpen történik: a fajlagos nyúlás értékeit a nyúlásmérő bélyegek szolgáltatták, a normál feszültséget pedig a terhelés és a geometriai méretek ismeretében számoljuk: $\sigma_x(x) = \dfrac{F(l-x)}{I_z}\dfrac{b}{2} = F(l-x)\dfrac{6}{ab^2}$. Minden mérési pontban három mérési adat áll a rendelkezésünkre a három terhelésből. Erre a három eredményre kell egyenest illeszteni a hatodik fejezetben részletezett legkisebb négyzetek módszere alapján. Az öt pontra öt egyenest kapunk. Az egyenesek meredeksége egyenlő a rugalmassági modulus reciprokával. Várakozásaink szerint ez nem függ a pont helyétől, tehát az öt egyenest párhuzamosnak, sőt azonosnak várjuk.
5. Ábrázoljuk a $v_C = v_C(F)$ függvényt a mérések szolgáltatta három érték segítségével. A három pontra egyenest kell illeszteni a hatodik fejezetben részletezett legkisebb négyzetek módszerével.

6. Hibaszámítás, mérési eredmények kiértékelése, egyenes illesztése

6.1. A hibák keletkezése és terjedése

Minden mérés hibával terhelt. Egyrészt előfordulhatnak emberi mulasztások, tévedések, másrészt tudomásul kell vennünk, hogy a mérőeszközeink pontossága is korlátozott. Ha pedig a felhasznált adatok és méretek sem tetszőlegesen pontosak, akkor a mérési eljárás végeredményétől sem várhatjuk el a tökéletes egyezést a valóságos értékekkel.
Méréseink során hiba forrása a geometriai méretek pontatlan ismerete, ugyanis eszközeinkkel legfeljebb fél tized milliméter pontossággal határozhatjuk meg őket. Az anyagi állandókat sem ismerjük tetszőleges pontossággal és az alkalmazott súlyterhelések is csak körülbelül $\pm 5\cdot 10^{-4}$ N pontosságúak. Újabb hibaforrás adódik a nyúlásmérő bélyeg keresztirányú érzékenységéből, vagyis abból a jelenségből, hogy a bélyeg ellenállása kis mértékben a mérési irányra merőleges fajlagos nyúlástól is függ. A legszámottevőbb hiba azonban a bélyeg pontatlan felragasztásából ered. A legkörültekintőbb ragasztás során sem zárható ki két-három fokos eltérés a vizsgált tartó hossztengelye és a rozetta *a* mérési iránya között. Ez a látszólag jelentéktelen eltérés néhány százalékos (jellemzően 3-5%) hibát eredményez az alakváltozási tenzor diagonális elemeiben és a feszültségi tenzor legnagyobb koordinátáiban, de akár több, mint százszázalékos hibát is okozhat a szögtorzulásokban és a feszültségi tenzor kis értékű koordinátáiban. Szemléltetésül tekintsük a $\gamma_{xz} = 4,2\cdot 10^{-5}$ eredményt! Ha ezt a pontatlan méréseinkből számítottuk, akkor tudomásul kell vennünk, hogy ennek hibája elérheti akár a százötven százalékot is, vagyis a szögtorzulásról csak annyit tudunk biztosan, hogy $-2,1\cdot 10^{-4} \le \gamma_{xz} \le 6,3\cdot 10^{-4}$. Lehet akár nulla is.
Sikeres mérésről tehát akkor beszélhetünk, ha a közvetlen mérési eredményekből számított $\varepsilon_x, \varepsilon_z, \varepsilon_y$ fajlagos nyúlások és a σ_x normálfeszültség csak néhány százaléknyit tér el a rúdmodellből számított értékektől, a többi tenzor-koordináta pedig nagyságrendekkel kisebb ezeknél. A szóban forgó koordináták maximális hibáját a következő táblázat tartalmazza.

Mért, illetve számított mennyiség	Relatív hiba: a maximális hiba és a mérésekből számított érték hányadosának abszolút értéke
$\varepsilon_y, \varepsilon_z$	$h_r = 0,035\left(1+\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z}-2\frac{\varepsilon_{45^\circ}}{\varepsilon_z}\right)$
ε_x	$h_r = 0,035\left(1+\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}-2\frac{\varepsilon_{45^\circ}}{\varepsilon_x}\right)$
ε_{45°	$h_r = 0,035\left(\frac{\varepsilon_z-\varepsilon_x}{\varepsilon_{45^\circ}}\right)$
$\left.\begin{array}{l}\gamma_{yx}=\gamma_{xy}\\ \tau_{yx}=\tau_{xy}\end{array}\right\}$	$h_r = 0,07\frac{\varepsilon_z-\varepsilon_x}{2\varepsilon_{45^\circ}-\varepsilon_z-\varepsilon_x}$
σ_z	$h_r = 0,035(1-\nu)\frac{\varepsilon_z+\varepsilon_x-2\varepsilon_{45^\circ}}{\varepsilon_z+\nu\varepsilon_x}$
σ_x	$h_r = 0,035(1-\nu)\frac{\varepsilon_z+\varepsilon_x-2\varepsilon_{45^\circ}}{\nu\varepsilon_z+\varepsilon_x}$

Az alakváltozási- és a feszültségi tenzor többi eleme zérus, amit nem a mérési eredményekből tudunk, hanem abból, hogy a szóban forgó felület terheletlen. Ezeket a zérusokat tehát teljesen pontos adatoknak tekinthetjük.
Az általunk vizsgált tartóval közös állványon látható egy olyan tartó, melyen a rozetták az *x* tengellyel körülbelül $45°$-ot zárnak be (13. ábra). Bizonyítható, hogy $\varepsilon_a + \varepsilon_c = \varepsilon_x + \varepsilon_y$, függetlenül attól, hogy a rozetta mérési irányai milyen szöget zárnak be a koordinátarendszer tengelyeivel (ha az *a* és *c* mérési irányok merőlegesek egymásra). Ha a feszültség egytengelyű, például $\vec{i}$ irányú, akkor $\varepsilon_a + \varepsilon_c$ mérésével meghatározhatjuk az alakváltozási tenzort, ugyanis: $\varepsilon_a + \varepsilon_c = \varepsilon_x + \varepsilon_y = \varepsilon_x (1-\nu)$. Így kiküszöbölhetjük a ragasztási szöghiba által okozott mérési hibát.

6.2. A legkisebb négyzetek módszere

A legtöbb mérési feladat során a lehetőleg minél több adatból álló pontsorra kell egyenest illeszteni és ennek az egyenesnek a paramétereire (leggyakrabban a meredekségére) vagyunk kíváncsiak. Ha a mérendő fizikai mennyiségek egymással nem lineáris kapcsolatban vannak, a problémát sok esetben akkor is egyenes ábrázolására kell visszavezetnünk! Ha például az *y* mérni kívánt mennyiség várhatóan az *x* független változó négyzetével (vagy éppen logaritmusával) arányos, akkor az *y*-t az x^2 (vagy *lg(x)* függvényében) kell ábrázolnunk! Így joggal várunk egyenest. A mérés közben és a számítások során fellépő hibák, pontatlanságok miatt azonban az adatokból képzett pontok mégsem esnek pontosan egy egyenesre! Olyan egyenest kell keresnünk, amelyre a lehető legkisebb hibával illeszkednek a mérési eredmények. Az optimalizálási feladat célja a pontoknak az egyenestől vett függőleges távolságának négyzetösszegét minimalizálni az egyenes paramétereinek alkalmas megválasztásával (legkisebb négyzetek módszere). Bizonyítható, hogy ez a négyzetösszeg akkor minimális, ha az $y = mx + b$ alakban keresett egyenes paraméterei a következők:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{átl})(x_i - x_{átl})}{\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{átl})^2}, \qquad b = y_{átl} - m x_{átl}.$$

Az összefüggések megadják az egyenes *m* meredekségét és az *y* tengellyel való *b* metszetét. Az összegzéseket az összes mért értékpárra el kell végezni, $x_{átl}$ és $y_{átl}$ pedig a mérés független és mért függő változójára kapott értékek számtani közepei.
Várakozásunk szerint az ismert terhelésekből számított normál feszültség és a mért fajlagos nyúlás arányosak egymással, az arányossági tényező az *E* Young-modulus. Ha tehát ábrázoljuk az $\varepsilon(\sigma)$ függvényt, olyan egyenest várunk, mely átmegy az origón ($b = 0$) és meredeksége: $m = \frac{1}{E}$.

7. A mérési jegyzőkönyv elkészítése

A mérési jegyzőkönyv egy rövid összefoglalóval kezdődik, melyben a mérést végző leírja, milyen berendezések és mérőeszközök igénybevételével, milyen fizikai törvényszerűségek felhasználásával milyen fizikai mennyiségek mérését végezte el.
Ezután következik a konkrét mérési elrendezés vázlatrajza a műszaki ábrázolás követelményeinek betartásával. Célszerű a számításokhoz használt méreteket ellenőrizni (például tolómérővel).
A ténylegesen elvégzett mérések számszerű eredményeit táblázatban kell rögzíteni, mindig feltüntetve a mennyiségek mértékegységét is. A mérés közvetlen eredményeiből számítások útján határozzuk meg az alakváltozási- és a feszültségi tenzor koordinátáit. Természetesen nem elegendő pusztán a végeredmények közlése! A mérési jegyzőkönyvből ki kell derülnie, hogy a mé-

rést végző hogyan számolta ki eredményeit. Ezért legalább egy pont legalább egy terhelése esetére a számításokat teljes részletességgel mellékelni kell!
A mérési eredményekről grafikont kell készíteni: a vízszintes tengelyre a független változónak tekintett feszültséget, a függőleges tengelyre a függő változónak tekintett fajlagos nyúlást mérve fel. A táblázat alapján felrajzolt pontokra aztán a fenti egyenes-illesztési eljárással egyenest fektetünk. Ügyelni kell a grafikon tengelyeinek helyes skálázására és az egyenes jellemzőinek feltüntetésére is.
A mérési jegyzőkönyvet összefoglaló zárja, melyben értékelni kell, mennyire teljesültek az elmélet alapján megfogalmazott előzetes várakozások. Külön meg kell vizsgálni, vajon mi okozhatta az esetleges eltéréseket. Esetleg javaslatokat lehet megfogalmazni a mérés pontosságának növelésére.