

1. RUGALMASSÁGTANI ALAPFOGALMAK

Szilárdságtan: a terhelés előtt és után is tartós nyugalomban lévő, alakváltozásra képes testek kinematikája, dinamikája és anyagszerkezeti viselkedése.

Az értelmezésben előforduló kifejezések magyarázata:

Terhelés: az általunk vizsgált rendszerhez (testekhez) nem tartozó testekről származó ismert nagyságú hatás. Ez a hatás szilárd halmazállapotú testeknél általában felületi érintkezéssel valósul meg.

Terhelés = ismert külső erőrendszer (ER).

A tartós nyugalom feltételei:

- a testre ható erőrendszer egyensúlyi,
- a test megtámasztása nem enged meg merevtestszerű elmozdulást.

Alakváltozás:

- a test pontjai terhelés hatására egymáshoz képest elmozdulnak és ezért
- anyagi, geometriai alakzatai (hossz, szög, felület, térfogat) megváltoznak.

Kinematika a szilárdságtanban: leírja a terhelés hatására a testben bekövetkező elmozdulásokat és alakváltozásokat.

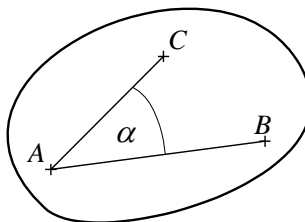
Dinamika a szilárdságtanban: megadja az alakváltozás és a belső erőrendszer közötti kapcsolatot.

Anyagszerkezeti viselkedés a szilárdságtanban: megadja az alakváltozást jellemző mennyiségek és a belső erőrendszer közötti kapcsolatot.

A valóságos testek helyett modelleket vizsgálunk.

Test modell: Olyan idealizált tulajdonságokkal rendelkező test, amely a valóságos test vizsgálata szempontjából leglényegesebb tulajdonságait tükrözi. A valóságos test lényegesnek tartott tulajdonságait megtartjuk, a lényegtelennek ítélt tulajdonságokat pedig elhanyagoljuk.

Például: merev test, szilárd test.

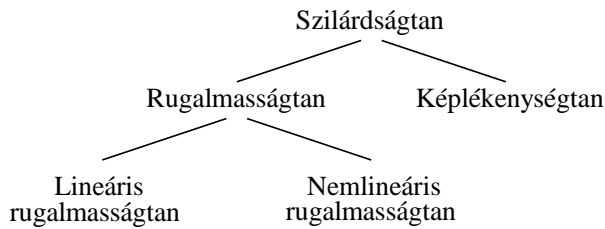


Merev test: Bármely két pontjának távolsága állandó, a távolság terhelés hatására nem változik meg. A test pontjai (részei) egymáshoz képest terhelés hatására sem mozdulnak el. Pl. az \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{BC} távolságok és az α szög nem változnak.

Szilárd test: Alakváltozásra képes test. A test pontjainak távolsága, egyenesének egymással bezárt szöge terhelés hatására megváltozik. A test felületeinek és térfogatainak alakja és nagysága is megváltozik. Pl. az \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{BC} távolságok és az α szög is megváltozik.

A szilárdságtan szilárd testek terhelés hatására történő viselkedését vizsgálja.

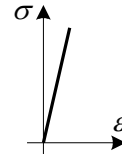
A szilárdságtan több részterületre osztható:



Rugalmas alakváltozás / rugalmas test: A terhelés hatására alakváltozott szilárd test a terhelés megszüntetése (levétele) után visszanyeri eredeti alakját.

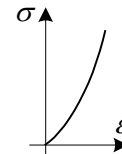
Lineárisan rugalmas alakváltozás:

A terhelés és alakváltozás, a belső erőrendszer (feszültségek) és az alakváltozás között lineáris kapcsolat van.



Nemlineárisan rugalmas alakváltozás:

A terhelés és alakváltozás, a belső erőrendszer (feszültségek) és az alakváltozás közötti kapcsolat nem lineáris.



Képlékeny alakváltozás / képlékeny test: Az alakváltozott test tehermentesítés után nem nyeri vissza eredeti alakját.

A tárgy lineárisan rugalmas testek kis elmozdulásaival és kis alakváltozásaival foglalkozik.

Kis elmozdulás: A test pontjainak elmozdulása nagyságrendekkel kisebb a test jellemző geometriai méreteinél.

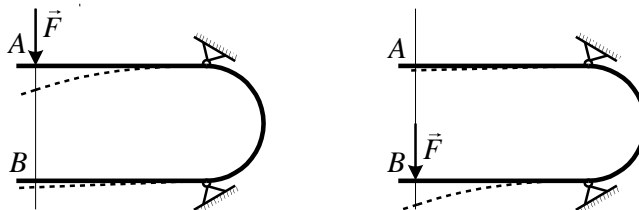
Kis alakváltozás: A test alakváltozását jellemző mennyiségek lényegesen kisebbek, mint 1.
 $\varepsilon \ll 1, \gamma \ll 1. (\varepsilon, \gamma \approx 10^{-3} - 10^{-5})$

Erőrendszerek egyenértékűsége lehet: statikai, vagy szilárdságtani.

Statikai egyenértékűség: Két erőrendszer statikailag egyenértékű, ha azonos nyomatéki vektorteret hoznak létre.

Szilárdságtani egyenértékűség: Két, ugyanazon testre ható erőrendszer szilárdságtanilag egyenértékű, ha azok – a test egy kis részétől eltekintve – a testnek ugyanazt az alakváltozási állapotát hozzák létre.

Például:



Ez a két erőrendszer statikailag egyenértékű, szilárdságtanilag viszont nem.

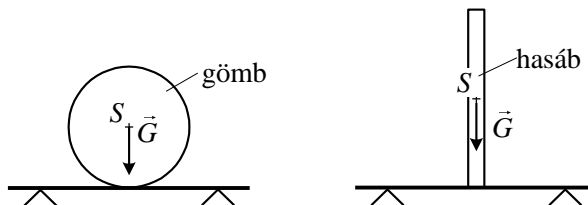
Az \vec{F} erő a nyomaték vonatkozásában hatásvonala mentén eltolható \Rightarrow a két erőrendszer statikailag egyenértékű.

A fenti szerkezet az \vec{F} erő támadáspontjától függően egészen másképpen alakváltozik (az ábrán szaggatott vonal) \Rightarrow a két erőrendszer szilárdságtanilag nem egyenértékű.

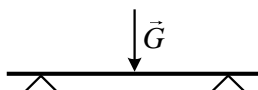
A Saint-Venant¹ (san vönan) - elv:

Szilárd test alakváltozásakor a test valamely ugyanazon kis felületén ható, nyomatéki terük vonatkozásában egyenértékű erőrendszerek - a kis felület közvetlen környezetének kivételével – jó közelítéssel ugyanazt az alakváltozási állapotot állítják elő.

Például:



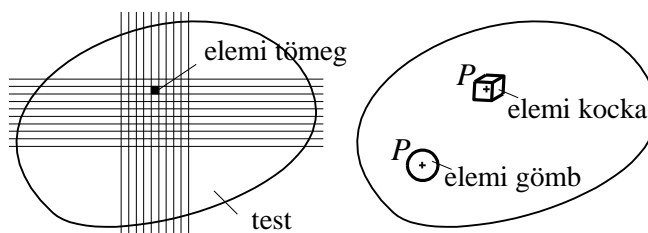
A tartóban, a terhelés környezetén kívül jó közelítéssel ugyanaz az alakváltozási állapot jön létre. A fenti két terhelés azonos módon modellezhető:



Elemi környezet / elemi tömeg:

Minden test ∞ sok tömegpontból felépülő rendszernek is tekinthető.

A tömegpontokhoz úgy jutunk el, hogy a testet ∞ sok kis részre bontjuk.



Tömegpontnak / elemi tömegnek / elemi környezetnek a szilárdságtanban egy olyan kis testrészről tekintünk, amelynek méretei a test méreteihez képest elhanyagolhatóan kicsik.

Az elemi környezet szilárdságtani állapotait az elemi környezet egy pontjához (a középpontjához) kötött mennyiségekkel írjuk le.

- Elemi környezet szilárdságtani állapotai:
- elmozdulási állapot,
 - alakváltozási állapot,
 - feszültségi állapot,
 - energia állapot.

Test szilárdságtani állapotai:

Az elemi környezetek szilárdságtani állapotainak összessége (halmaza).

A test szilárdságtani állapotait mezőkkel (terekkel) írjuk le.

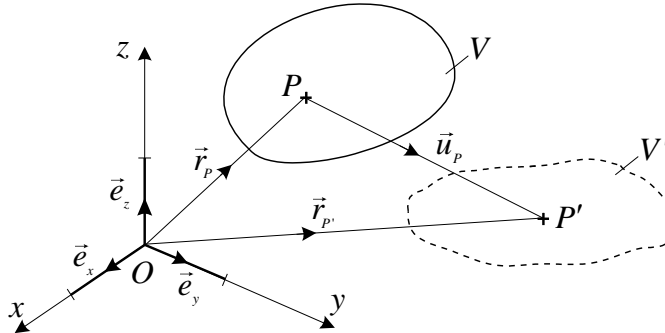
Mező / tér: Az adott mennyiségeket a hely függvényében ismerjük.

Pl.: $\rho = \rho(\vec{r}) = \rho(x, y, z)$, $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(x, y, z)$, vagy $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(\vec{r}) = \underline{\underline{A}}(x, y, z)$.

¹ Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797-1886) francia mérnök.

2. SZILÁRDSÁGTANI ÁLLAPOTOK

2.1. Elmozdulási állapot



A terhelés utáni geometriai alakzatokat vesszővel jelöljük.

\vec{u}_P - a test tetszőleges P pontjának elmozdulás vektora.

$$\vec{r}_{P'} = \vec{r}_P + \vec{u}_P \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_P = \vec{r}_{P'} - \vec{r}_P.$$

Pont / elemi környezet elmozdulási állapotának jellemzése:

A P pont elmozdulásvektora: $\vec{u}_P = u_P \vec{e}_x + v_P \vec{e}_y + w_P \vec{e}_z$.

Test elmozdulási állapotának jellemzése:

A test elmozdulásmezője: $\vec{u}(x, y, z) = u(x, y, z) \vec{e}_x + v(x, y, z) \vec{e}_y + w(x, y, z) \vec{e}_z$.

$$\left. \begin{aligned} u(\vec{r}) &= u(x, y, z), \\ v(\vec{r}) &= v(x, y, z), \\ w(\vec{r}) &= w(x, y, z). \end{aligned} \right\} \text{ az elmozdulásmező skaláris koordinátái.}$$

2.2. Fajlagos relatív elmozdulási állapot

Elemi triéder: A P pontban felvett terhelés előtt egymásra merőleges $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ egységvektor hármas.

Feltételezzük, hogy az elemi triéder a P pont elemi környezetén belül helyezkedik el.

A P pont elemi környezetének elmozdulása felbontható: - párhuzamos eltolásra és
- fajlagos relatív elmozdulásra.

Párhuzamos eltolás: \vec{u}_P . (Az elemi környezet minden pontja \vec{u}_P -vel mozdul el)

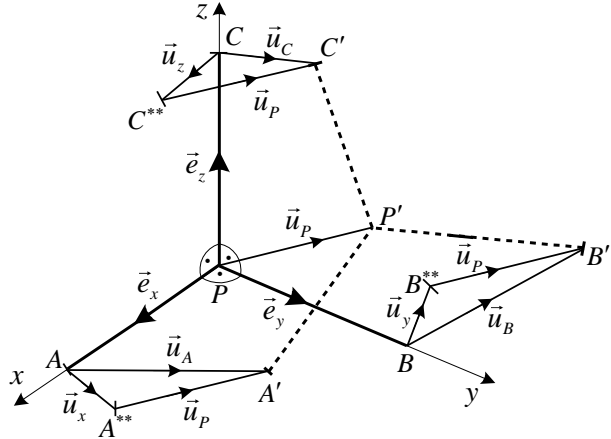
A P pontra vonatkoztatott relatív elmozdulások:

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}_x &= \vec{u}_A - \vec{u}_P \\ \vec{u}_y &= \vec{u}_B - \vec{u}_P \\ \vec{u}_z &= \vec{u}_C - \vec{u}_P \end{aligned} \right\} \text{ az elemi triéder végpontjainak fajlagos relatív elmozdulás vektorai.}$$

Relatív, mert a P ponthoz viszonyított.

Fajlagos, mert a P ponttól egységnyi távolságra lévő pontok elmozdulása.

Az elemi triéder mozgása:



$PABC \xrightarrow{\text{relatív elmozdulás}} PA^{**}B^{**}C^{**} \xrightarrow{\text{párhuzamos eltolás}} P'A'B'C'$.

Célkitűzés: meg akarjuk határozni a P elemi környezetében, a P -től egységnyi távolságra levő tetszőleges N pont relatív fajlagos elmozdulását.

Az \vec{n} - a P -ből az N pontba mutató helyvektor (egységvektor).

$|\vec{n}|=1 \Rightarrow$ az N pontok a P középpontú egységnyi sugarú gömbfelületen helyezkednek el.

$\vec{n} \xrightarrow{\text{hozzárendelés (leképezés)}} \vec{u}_n$.

Az elmozdulásmező derivált tenzora:

- Diadikus előállítás: $\underline{\underline{D}}_P = \vec{u}_x \circ \vec{e}_x + \vec{u}_y \circ \vec{e}_y + \vec{u}_z \circ \vec{e}_z$.

- Mátrixos előállítás:

$$\left[\underline{\underline{D}}_P \right] = \begin{bmatrix} u_{xx} & u_{xy} & u_{xz} \\ u_{yx} & u_{yy} & u_{yz} \\ u_{zx} & u_{zy} & u_{zz} \end{bmatrix}. \quad \text{- nem szimmetrikus tenzor.}$$

$$\vec{u}_x \quad \vec{u}_y \quad \vec{u}_z$$

A derivált tenzor egyértelműen jellemzi a P pont környezetének fajlagos, relatív elmozdulási állapotát.

A $\underline{\underline{D}}$ derivált tenzor fizikai tartalma: megadja a P pont elemi környezetében az elmozdulás hely szerinti megváltozását.

Az N pont fajlagos relatív elmozdulásvektora: $\vec{u}_n = \underline{\underline{D}}_P \cdot \vec{n}$.

2.3. A fajlagos relatív elmozdulási állapot felbontása

Minden tenzor felbontható egy szimmetrikus és egy ferdeszimmetrikus részre.

A derivált tenzor felbontása: $\underline{\underline{D}}_P = \underbrace{\frac{1}{2}(\underline{\underline{D}}_P + \underline{\underline{D}}_P^T)}_{\underline{\underline{A}}_P \text{ szimmetrikus rész}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\underline{\underline{D}}_P - \underline{\underline{D}}_P^T)}_{\underline{\underline{\Psi}}_P \text{ ferdeszimmetrikus rész}}.$

Tetszőleges N pont fajlagos, relatív elmozdulásának felbontása:

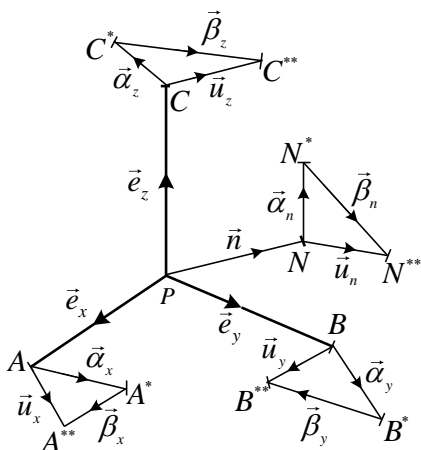
$$\vec{u}_n = \underline{\underline{D}}_P \cdot \vec{n} = (\underline{\underline{A}}_P + \underline{\underline{\Psi}}_P) \cdot \vec{n} = \underline{\underline{A}}_P \cdot \vec{n} + \underline{\underline{\Psi}}_P \cdot \vec{n} = \vec{\alpha}_n + \vec{\beta}_n .$$

Az N a P pont elemi környezetében levő pont: $|\vec{n}| = 1$.

Az N pont alakváltozási vektora: $\vec{\alpha}_n = \underline{\underline{A}}_P \cdot \vec{n}$, ahol $\underline{\underline{A}}_P$ a P pont alakváltozási tenzora.

Az N pont merevtestszerű forgási vektora: $\vec{\beta}_n = \underline{\underline{\Psi}}_P \cdot \vec{n}$, ahol $\underline{\underline{\Psi}}_P$ a P pont merevtestszerű forgási tenzora.

A fajlagos relatív elmozdulási állapot szemléltetése:



$$|\vec{n}| = 1,$$

$$\vec{u}_n = \vec{\alpha}_n + \vec{\beta}_n ,$$

$$\vec{u}_x = \vec{\alpha}_x + \vec{\beta}_x ,$$

$$\vec{u}_y = \vec{\alpha}_y + \vec{\beta}_y ,$$

$$\vec{u}_z = \vec{\alpha}_z + \vec{\beta}_z .$$

Alakváltozás: $\vec{\alpha}_x, \vec{\alpha}_y, \vec{\alpha}_z, \dots, \vec{\alpha}_n$.

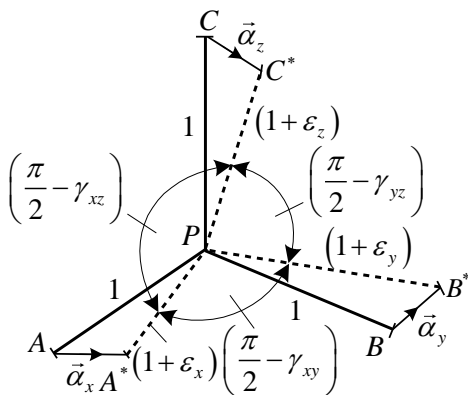
Merevtestszerű mozgás: $\vec{\beta}_x, \vec{\beta}_y, \vec{\beta}_z, \dots, \vec{\beta}_n$.

$$PABC \xrightarrow{\text{alakváltozás}} PA^*B^*C^* \xrightarrow{\text{merevtestszerű forgás}} PA^{**}B^{**}C^{**} .$$

2.4. Alakváltozási állapot

Az alakváltozási állapot során megváltozik a P pontra illeszkedő \vec{n} egységvektorok hossza és egymással bezárt szöge.

Az elemi triéder alakváltozása: $PABC \longrightarrow PA^*B^*C^*$.



Megváltozott
hosszak:

$$\overline{PA^*} = 1 + \vec{\epsilon}_x ,$$

$$\overline{PB^*} = 1 + \vec{\epsilon}_y ,$$

$$\overline{PC^*} = 1 + \vec{\epsilon}_z ,$$

Megváltozott
szögek:

$$\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy} \right) ,$$

$$\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{xz} \right) ,$$

$$\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{yz} \right) .$$

Az értelmezésből következik:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} , \gamma_{yz} = \gamma_{zy} , \gamma_{xz} = \gamma_{zx} .$$

Alakváltozási jellemzők: - fajlagos nyúlások : $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$.

- fajlagos szögváltozások : $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$.

Előjel: $\varepsilon > 0$ megnyúlás, $\varepsilon < 0$ megrövidülés,

$\gamma > 0$ ha az eredeti 90° -os szög csökken, $\gamma < 0$ ha az eredeti 90° -os szög nő.

Mértékegység: ε : mm/mm=1, γ : rad=1.

Kis alakváltozás: $\varepsilon = 10^{-3} \sim 10^{-4}$, $\gamma = 10^{-3} \sim 10^{-4}$.

Az alakváltozási tenzor:

- Diadikus előállítás: $\underline{\underline{A}}_P = \vec{\alpha}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\alpha}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\alpha}_z \circ \vec{e}_z$.

- Mátrixos előállítás:

$$[\underline{\underline{A}}_P] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \gamma_{xy} = \gamma_{yx} \\ \gamma_{yz} = \gamma_{zy} \\ \gamma_{xz} = \gamma_{zx} \end{array} \right\} \text{szimmetrikus tenzor.}$$

$\vec{\alpha}_x \quad \vec{\alpha}_y \quad \vec{\alpha}_z$

Az alakváltozási tenzor a derivált tenzor szimmetrikus része – hat egymástól független skaláris koordinátával adható meg.

Az alakváltozási tenzor oszlopaiban az alakváltozási vektorok koordinátái találhatók.

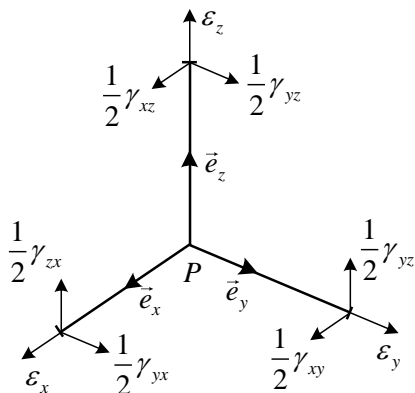
Az alakváltozási vektorok:

$$\vec{\alpha}_x = \varepsilon_x \vec{e}_x + \frac{1}{2}\gamma_{yx} \vec{e}_y + \frac{1}{2}\gamma_{zx} \vec{e}_z,$$

$$\vec{\alpha}_y = \frac{1}{2}\gamma_{xy} \vec{e}_x + \varepsilon_y \vec{e}_y + \frac{1}{2}\gamma_{zy} \vec{e}_z,$$

$$\vec{\alpha}_z = \frac{1}{2}\gamma_{xz} \vec{e}_x + \frac{1}{2}\gamma_{yz} \vec{e}_y + \varepsilon_z \vec{e}_z.$$

Az alakváltozási állapot szemléltetése:



Az alakváltozási jellemzők számítása:

$$\varepsilon_n = \vec{n} \cdot \vec{\alpha}_n = \vec{n} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{n},$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{nm} = \vec{m} \cdot \vec{\alpha}_n = \vec{\alpha}_m \cdot \vec{n} = \vec{m} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{m}.$$

A test alakváltozási állapota: $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(\vec{r}) = \underline{\underline{A}}(x, y, z).$

A test alakváltozási állapota alakváltozási tenzormezővel jellemezhető.

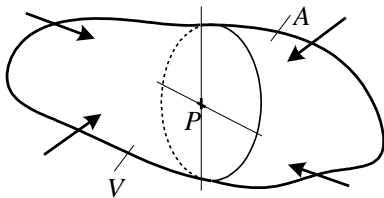
2.5. Feszültségi állapot, belső erőrendszer

A belső erőrendszert úgy tudjuk vizsgálni, ha a testet gondolatban részekre bontjuk és az így keletkezett testrészek egyensúlyát vizsgáljuk.

Feltételezés: Az egész testre egyensúlyi erőrendszer hat.

Egyensúlyi erőrendszer = terhelések + támasztó erőrendszer.

A testet a P pontra illeszkedő síkkal vágjuk ketté. A P ponton át végtelen sok sík vehető fel.



$$(V) = (V_1) + (V_2)$$

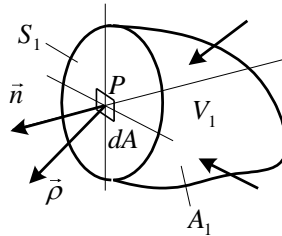
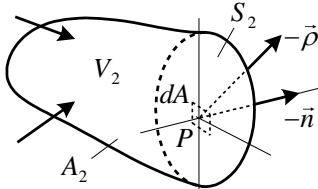
V – a test térfogata,

$$(A) = (A_1) + (A_2)$$

A - a test külső felülete,

$$(S_1) \equiv (S_2)$$

S_1, S_2 - a metszetsfelület.



A szétvágás után az egyes részek egyensúlya akkor biztosított, ha az (S_1) és (S_2) felületen belső erőrendszer lép fel.

Feszültségvektor: Az (S_1) és (S_2) metszetsfelületen megoszló belső erőrendszer sűrűségvektora.

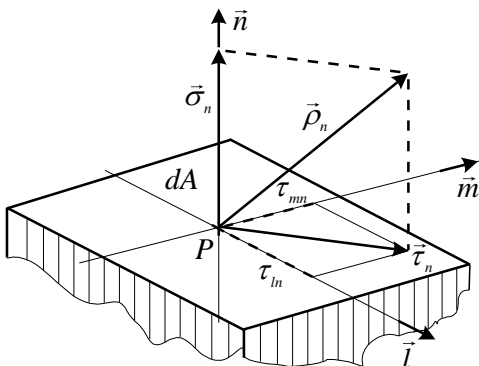
$\vec{\rho} = \vec{\rho}(\vec{r}, \vec{n})$, ahol \vec{r} a P pont helyvektora és \vec{n} az (S_1) sík normális egységvektora.

Pontbeli feszültség állapot (\vec{r} = állandó):

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}(\vec{n}) = \vec{\rho}_n, \quad \vec{\rho}_{-n} = -\vec{\rho}_n.$$

\vec{n} - a dA elemi felület kifelé mutató normálisa,

\vec{l}, \vec{m} - az elemi felület síkjába eső egységvektorok.



A feszültségvektor összetevői, koordinátái:

Összetevők: - Normál feszültségvektor: $\vec{\sigma}_n = \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{\rho}_n)}_{\sigma_n} \vec{n}$.

- Csúsztató feszültségvektor: $\vec{\tau}_n = \vec{\rho}_n - \sigma_n \vec{n} = (\vec{n} \times \vec{\rho}_n) \times \vec{n}$

Koordináták: - Normál feszültségi koordináta: $\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{\rho}_n \cdot \vec{n}$.

- Csúsztató feszültségi koordináták: $\tau_{mn} = \vec{m} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{m} \cdot \vec{\tau}_n, \tau_{ln} = \vec{l} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{l} \cdot \vec{\tau}_n$.

Mértékegység: $\frac{N}{m^2} = Pascal^2$ (paszkál), $\frac{N}{mm^2} = \frac{MN}{m^2} = MPa$ (megapaszka).

Feszültségi tenzor:

A test P pontjában a $\vec{\rho}_n$ feszültségvektor az \vec{n} lineáris homogén függvénye: $\vec{\rho}_n = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}$.

- Diadikus előállítás: $\underline{\underline{F}} = \vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z$.

- Mátrixos előállítás:

$$\left[\underline{\underline{F}} \right] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \tau_{xy} = \tau_{yx} \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} \end{array} \right\} \text{szimmetrikus tenzor.}$$

$$\vec{\rho}_x \quad \vec{\rho}_y \quad \vec{\rho}_z$$

Az $\underline{\underline{F}}$ feszültségi tenzor mátrixa hat darab (három σ és három τ) független skalár mennyiséggel adható meg.

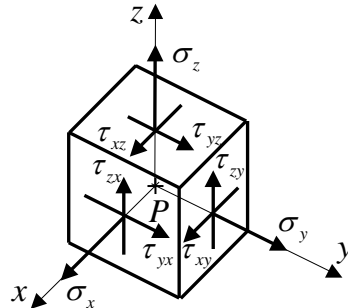
A feszültségvektorok koordinátái:

$$\begin{aligned} \vec{\rho}_x &= \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_x = \sigma_x \vec{e}_x + \tau_{yx} \vec{e}_y + \tau_{zx} \vec{e}_z, \\ \vec{\rho}_y &= \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_y = \tau_{xy} \vec{e}_x + \sigma_y \vec{e}_y + \tau_{zy} \vec{e}_z, \\ \vec{\rho}_z &= \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_z = \tau_{xz} \vec{e}_x + \tau_{yz} \vec{e}_y + \sigma_z \vec{e}_z. \end{aligned}$$

Előírt irányokhoz tartozó feszültségkoordináták számítása:

$$\begin{aligned} \vec{\rho}_n &= \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}, & \sigma_n &= \vec{n} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{n} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}, \\ \tau_{mn} &= \tau_{mn} = \vec{m} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{\rho}_n \cdot \vec{m} = \vec{m} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{m}. \end{aligned}$$

A P ponti feszültségi állapot szemléltetése:



² Blaise Pascal (1623-1662) francia természettudós.

Feszültségi főtengelek, főfeszültségek:

Ha az \vec{e} egységvektorra merőleges elemi felületen $\vec{\tau}_e = \vec{0}$ és $\Rightarrow \vec{\rho}_e = \sigma_e \vec{e}$, akkor az \vec{e} feszültségi főtengele (feszültségi főirány), σ_e főfeszültség és az \vec{e} -re merőleges elemi felület síkja főfeszültségi sík.

Megjegyzések:

- σ_e is lehet zérus $\Rightarrow \vec{\rho}_e = 0$.
- Minden P pontban létezik legalább három főirány, melyek kölcsönösen merőlegesek egymásra.

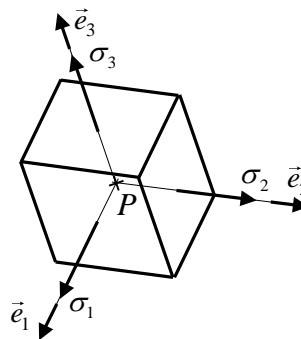
A főtengelek, főfeszültségek ismeretére a későbbiekben szükség lesz.

Feszültségi állapot a főtengelek koordináta-rendszerében:

$$\underset{(1,2,3)}{\underline{\underline{F}}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}.$$

Megállapodás a főfeszültségek jelölésére:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3.$$



2.6. Főtengely probléma \equiv sajátérték feladat

A főtengely probléma matematikai szempontból sajátérték feladatnak tekinthető.

A feladat kitűzése:

Feszültségi állapot esetén:

$$\vec{\rho}_e = \sigma_e \vec{e},$$

$$\underline{\underline{F}} \cdot \vec{e} = \sigma_e \underline{\underline{E}} \cdot \vec{e},$$

$$(\underline{\underline{F}} - \sigma_e \underline{\underline{E}}) \cdot \vec{e} = \vec{0}.$$

Alakváltozási állapot esetén:

$$\vec{\alpha}_e = \varepsilon_e \vec{e},$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{e} = \varepsilon_e \underline{\underline{E}} \cdot \vec{e},$$

$$(\underline{\underline{A}} - \varepsilon_e \underline{\underline{E}}) \cdot \vec{e} = \vec{0}.$$

Az egységtenzor:

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A főtengely probléma azonos módon írható fel a feszültségi és az alakváltozási állapot esetén. Az \vec{e} egységvektor koordinátáira nézve mindkét esetben homogén, lineáris algebrai egyenletrendszert kapunk.

Kérdés: Van-e olyan \vec{e} irány, mely kielégíti a fenti egyenleteket?

Válasz: Van, legalább három.

Elnevezés: \vec{e} – főirány/főtengely irány egységvektora, σ_e – főfeszültség, ε_e – főnyúlás.

A homogén lineáris algebrai egyenletrendszer nemtriviális megoldásának feltétele:

(Itt csak a feszültségi állapotról mutatjuk be a megoldást, az alakváltozási állapotról a megoldás gondolatmenete azonos.)

$$\det \left[\underline{\underline{F}} - \sigma_e \underline{\underline{E}} \right] = 0.$$

A determináns részletesen felírva:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_e) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma_e) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma_e) \end{vmatrix} = 0.$$

A determinánst kifejtve \Rightarrow karakterisztikus egyenlet: $\sigma_e^3 - F_I \sigma_e^2 + F_{II} \sigma_e - F_{III} = 0$.

A karakterisztikus egyenlet megoldásai: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ főfeszültségek.

A karakterisztikus egyenlet együtthatói, a feszültségi tenzor skalár invariánsai:

$F_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ - az első skalár invariáns,

$$F_{II} = \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} - \text{a második skalár invariáns,}$$

$$F_{III} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} - \text{a harmadik skalár invariáns.}$$

Invariáns: Olyan mennyiség, amely a koordináta transzformáció során nem változik.

Főirányok meghatározása:

A $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ főfeszültségeket visszahelyettesítjük a homogén, lineáris algebrai egyenletrendszerbe és megoldjuk az egyenletrendszert az irányvektor koordinátáira.

$$\sigma_1 \rightarrow \vec{e}_1, \quad \sigma_2 \rightarrow \vec{e}_2, \quad \sigma_3 \rightarrow \vec{e}_3.$$

A három egyenlet nem független egymástól \Rightarrow az egyenletrendszerből csak az \vec{e}_i irányvektor koordinátáinak aránya határozható meg.

Az egyértelmű megoldáshoz szükséges a pótlólagos feltétel: $e_{ix}^2 + e_{iy}^2 + e_{iz}^2 = 1, (i=1,2,3)$.

A feltétel geometriai tartalma, hogy az \vec{e}_i legyen egységvektor, $|\vec{e}_i| = \sqrt{e_{ix}^2 + e_{iy}^2 + e_{iz}^2} = 1$.

2.7. Deviátor és gömbi tenzorok

Értelmezés:

Feszültségi deviátor tenzor:

$$\underline{\underline{F}}_d = \underline{\underline{F}} - \sigma_k \underline{\underline{E}}.$$

Közepes feszültség:

$$\sigma_k = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{F_I}{3}.$$

Átrendezve:

$$\underline{\underline{F}} = \underbrace{\underline{\underline{F}}_d}_{\text{deviátoros rész}} + \underbrace{\sigma_k \underline{\underline{E}}}_{\text{gömbi rész}}$$

Alakváltozási deviátor tenzor:

$$\underline{\underline{A}}_d = \underline{\underline{A}} - \varepsilon_k \underline{\underline{E}}.$$

Közepes nyúlás:

$$\varepsilon_k = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = \frac{A_I}{3}.$$

$$\underline{\underline{A}} = \underbrace{\underline{\underline{A}}_d}_{\text{tisztá torzulás}} + \underbrace{\varepsilon_k \underline{\underline{E}}}_{\text{tisztá térfogatváltozás}}$$

A feszültségi és az alakváltozási tenzor is felbontható tiszta torzulási (deviátoros) és tiszta térfogatváltozási (gömbi) részre.

A deviátor tenzorok tulajdonságai: $F_{d_i} = 0$, $A_{d_i} = 0$. (A deviátor tenzorok első skalár invariánsa zérus.)

2.8. A Mohr-féle feszültségi kördiagram és alakváltozási kördiagram

a) A feszültségi kördiagram:

A Mohr³ (mór) -féle feszültségi kördiagram a P pontbeli feszültségi állapotot szemlélteti a $\sigma_n, |\tau_n|$ síkon.

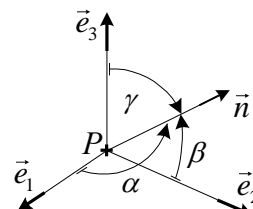
Legyen ismert az $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ feszültségi főirány.

A P pontban felvett tetszőleges normális egységvektor:

$$\vec{n} = \cos \alpha \vec{e}_1 + \cos \beta \vec{e}_2 + \cos \gamma \vec{e}_3.$$

A szemléltetés alapja:

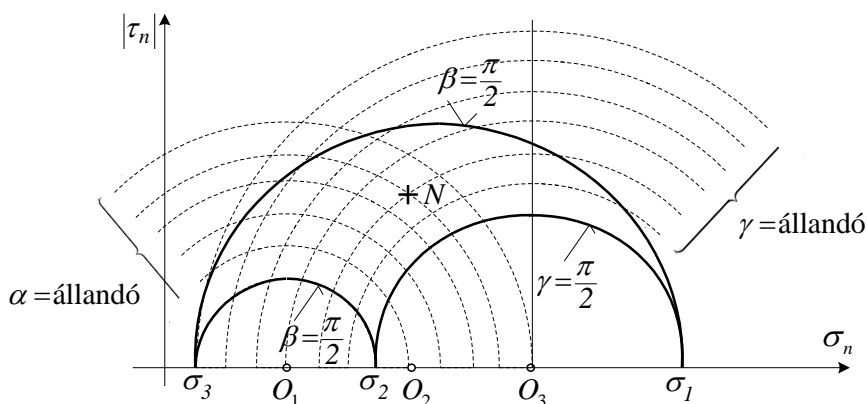
$$\vec{\rho}_n \rightarrow N \text{ pont a } \sigma_n, |\tau_n| \text{ síkon.}$$



Bizonyítható:

- A $\gamma = \text{állandó}$ normálisok $\vec{\rho}_n$ feszültségvektoraihoz tartozó N pontok a $\sigma_n, |\tau_n|$ síkon félkörívet alkotnak.
- Ez a megállapítás az $\alpha = \text{állandó}$ és $\beta = \text{állandó}$ feltételek esetén is igaz.
- A főfeszültségi síkokba eső normálisok $\vec{\rho}_n$ feszültségvektoraihoz tartozó N pontok a $\sigma_n, |\tau_n|$ síkon félkörívet alkotnak. Például: az (\vec{e}_1, \vec{e}_2) sík normálisai: $\gamma = 90^\circ$.

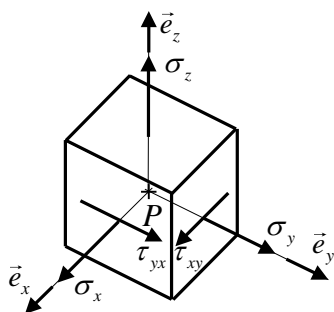
A kördiagram:



A tetszőleges \vec{n} irányhoz tartozó $\vec{\rho}_n$ feszültségvektornak megfelelő N pontok a folytonos félkörívvel határolt tartományon belül vannak.

³ Christian Otto Mohr (1835-1918) német építőmérnök.

Kördiagram szerkesztése, ha egy főfeszültség (például a σ_z) ismert:



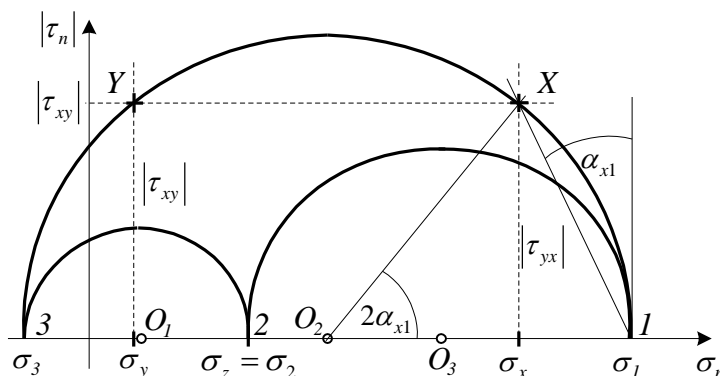
Az \vec{e}_z feszültségi főirány \Rightarrow az xy sík feszültségi fősíka (nincs \vec{e}_z csúsztató feszültség)

\Downarrow

A kördiagramban az X, Y pontok egy félkörön (főkörön) helyezkednek el.

\Downarrow

Az X, Y pontokra fektetett félkör határozza meg az x, y síkba eső σ_1, σ_3 főfeszültségi pontokat / irányokat.



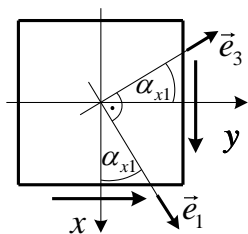
A szerkesztés gondolatmenete:

- Felvesszük az X, Y pontokat. Koordinátáik: $\sigma_x, |\tau_{xy}|$, illetve $\sigma_y, |\tau_{xy}|$.
- Meghatározzuk a félkör O_2 középpontját: $\sigma_{O_2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$.
- Megrajzoljuk az X, Y pontokon átmenő, O_2 középpontú félkört $\Rightarrow \sigma_1, \sigma_3$.
- A $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ főfeszültségek ismeretében megrajzoljuk a másik két félkört.

A főfeszültségek meghatározása a kördiagramból:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad \sigma_2 = \sigma_z, \quad \sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}.$$

A főirányok meghatározása a kördiagramból:



A kördiagramból: $\operatorname{tg} 2\alpha_{x1} = \frac{2|\tau_{xy}|}{|\sigma_x - \sigma_y|}$.

Szabály: A τ csúsztató feszültségek mindig a σ növekedésének irányában mutatnak.

\Downarrow

Az α_{x1} szög felmérésének iránya.

b) Az alakváltozási kördiagram:

A Mohr-féle alakváltozási kördiagram a P pontbeli alakváltozási állapotot szemlélteti az $\varepsilon_n, \left| \frac{1}{2} \gamma_{mn} \right|$ síkon.

A Mohr-féle alakváltozási kördiagramra minden ugyanúgy érvényes, mint a Mohr-féle feszültségi kördiagramra.

2.9. Energia állapot

2.9.1. Alakváltozási energia

Alakváltozási energia: a vizsgált testben az alakváltozás során felhalmozódó energia.

a) Fajlagos alakváltozási energia (egységnyi térfogat alakváltozási energiája):

$$u(\vec{r}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} (\vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z) \cdot (\vec{\alpha}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\alpha}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\alpha}_z \circ \vec{e}_z) =$$

$$= \frac{1}{2} (\vec{\rho}_x \cdot \vec{\alpha}_x + \vec{\rho}_y \cdot \vec{\alpha}_y + \vec{\rho}_z \cdot \vec{\alpha}_z) = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}).$$

$u \geq 0$. A fajlagos alakváltozási energia pozitív skaláris mennyiség.

Az alakváltozási energia felbontása: $u = u_T + u_V$.

tiszta
tiszta
torzulás
térfogatváltozás

A fajlagos tiszta torzulási energia:

$$u_T = \frac{1}{12G} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)].$$

$u_T \geq 0$. A fajlagos torzulási energia pozitív skaláris mennyiség.

A tiszta torzulás esetén a vizsgált egységnyi térfogat úgy alakváltozik, hogy közben térfogata nem változik meg.

A fajlagos tiszta térfogatváltozási energia:

$$u_V = \frac{1}{6} A_I F_I = \frac{1}{12G} \frac{1-2\nu}{1+\nu} F_I^2.$$

$u_V \geq 0$. A fajlagos térfogatváltozási energia pozitív skaláris mennyiség.

A tiszta térfogatváltozás esetén nem lépnek fel szögtorzulások.

Határeset: tökéletesen összenyomhatatlan anyag (nem képes térfogatváltozásra).

$$\text{Például: kaucsuk, gumi, stb } u_V = 0 \Rightarrow 1 - 2\nu = 0 \Rightarrow \nu = 0,5.$$

$$\text{A többi anyagra: } u_V > 0 \Rightarrow \nu < 0,5.$$

b) Test alakváltozási energiája: $U = \int_V u dV$, ahol V a test térfogata.

2.9.2. Mechanikai energia tétel

Csak a mechanikai hatásokból származó energiákat vesszük figyelembe.

$$E_2 - E_1 = W_K + W_B$$

E – kinetikai (mozgási) energia, 1 – terhelés előtti állapot, 2 - terhelés utáni állapot.
 W_K – a külső erők munkája, W_B – a belső erők munkája.

Szilárdságtan/rugalmaságtan: test a terhelés előtt és után is tartós nyugalomban van.

$$E_1 = E_2 \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad W_K + W_B = 0.$$

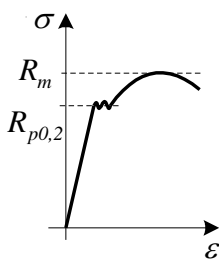
$$W_K = -W_B = \underbrace{U}_{\substack{\text{rugalmas} \\ \text{alakváltozási} \\ \text{energia} \\ \text{(visszanyerhető} \\ \text{rész)}}} + \underbrace{W_D}_{\substack{\text{disszipációs} \\ \text{energia} \\ \text{(nem visszanyerhető} \\ \text{rész)}}}.$$

Rugalmas alakváltozás:

A külső munka teljes egészében visszanyerhető: $W_K = -W_B = U.$

Fontos tulajdonság: az energia pozitív skaláris mennyiség.

2.10. Az általános Hooke⁴- törvény



R_m - szakítószilárdság,

$R_{p0,2}$ - folyáshatár.

Az általános Hooke (huk) törvény a lineárisan rugalmas, izotróp anyagi viselkedést írja le.

Lineárisan rugalmas: az alakváltozások és a feszültségek között lineáris függvénykapcsolat van.

Izotróp: az anyagi viselkedés iránytól független. (Például a fémek esetében.)

Lineárisan rugalmas alakváltozás esetén az alakítható anyag szakító diagramjának lineáris szakaszán vagyunk.

Alakítható anyagról beszélünk, ha az anyag képlékeny alakváltozásra képes.

Az általános Hooke törvény két, egymással egyenértékű alakja:

$$\alpha) \underline{\underline{A}} = \frac{1}{2G} \left(\underline{\underline{F}} - \frac{\nu F_I}{1+\nu} \underline{\underline{E}} \right), \quad \beta) \underline{\underline{F}} = 2G \left(\underline{\underline{A}} + \frac{\nu A_I}{1-2\nu} \underline{\underline{E}} \right).$$

Az egyenletekben szereplő mennyiségek jelentése:

G – csúsztató rugalmassági modulus } anyagjellemzők,
 ν – Poisson tényező }

F_I – a feszültségi tenzor } első skalár invariánsa,
 A_I – az alakváltozási tenzor }

$$[\underline{\underline{E}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ az egységtenzor.}$$

⁴ Robert Hooke (1635-1703) angol természettudós.

Az α) alak skaláris egyenletei:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right], & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_y - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_z - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right], & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G}.\end{aligned}$$

A β) alak skaláris egyenletei:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2G \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right], & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= 2G \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right], & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= 2G \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right], & \tau_{xz} &= G\gamma_{xz}.\end{aligned}$$

2.11. Gyakorló feladatok szilárdságtani állapotokra

2.11.1. feladat: *P* pont elemi környezetének alakváltozási állapota

Adott: A *P* pont elemi környezetében az alakváltozási jellemzők és egy irány egységvektora:

$$\varepsilon_x = 5 \cdot 10^{-3}, \quad \varepsilon_y = 4 \cdot 10^{-3}, \quad \varepsilon_z = 10 \cdot 10^{-3},$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 0, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = -10 \cdot 10^{-3}, \quad \vec{e}_n = 0,8\vec{e}_x + 0,6\vec{e}_z.$$

Feladat:

- Az $\underline{\underline{A}}_P$ alakváltozási tenzor mátrixának a felírása és a pontbeli alakváltozási állapot szemléltetése az elemi triéderen.
- Az ε_n fajlagos nyúlás és γ_{ny} fajlagos szögtorzulás meghatározása.

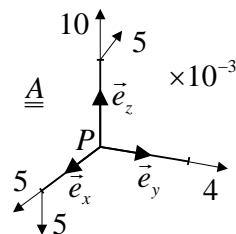
Kidolgozás:

- Az $\underline{\underline{A}}_P$ alakváltozási tenzor mátrixának a felírása és a pontbeli alakváltozási állapot szemléltetése az elemi triéderen:

Az alakváltozási tenzor:

$$\left[\underline{\underline{A}}_P \right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \quad \left[\underline{\underline{A}}_P \right] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & 0 \\ -5 & 0 & 10 \end{bmatrix} 10^{-3}.$$

Az alakváltozási állapot szemléltetése:



b) Az ε_n fajlagos nyúlás és γ_{ny} fajlagos szögtorzulás meghatározása:

$$\vec{\alpha}_n = \underline{\underline{A}}_P \cdot \vec{n},$$

$$[\vec{\alpha}_n] = [\underline{\underline{A}}_P] \cdot [\vec{n}] = 10^{-3} \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & 0 \\ -5 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0 \\ 0,6 \end{bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 4-3 \\ 0 \\ -4+6 \end{bmatrix}, \quad [\vec{\alpha}_n] = 10^{-3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\varepsilon_n = \vec{e}_n \cdot \vec{\alpha}_n = [0,8 \quad 0 \quad 0,6] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} 10^{-3} = (0,8+1,2) 10^{-3} = 2 \cdot 10^{-3},$$

$$\gamma_{ny} = 2 \vec{e}_y \cdot \vec{\alpha}_n = 0.$$

2.11.2. feladat: P pont elemi környezetének feszültségi állapota

Adott: A P pontban az $\underline{\underline{F}}_P$ feszültségi tenzor és három, egymásra kölcsönösen merőleges irány.

$$[\underline{\underline{F}}_P] = \begin{bmatrix} 50 & 20 & -40 \\ 20 & 80 & 30 \\ -40 & 30 & -20 \end{bmatrix} \text{ MPa},$$

$$\vec{n} = \frac{1}{3} \vec{e}_x + \frac{2}{3} \vec{e}_y + \frac{2}{3} \vec{e}_z, \quad \vec{m} = -\frac{2}{3} \vec{e}_x - \frac{1}{3} \vec{e}_y + \frac{2}{3} \vec{e}_z, \quad \vec{l} = \frac{2}{3} \vec{e}_x - \frac{2}{3} \vec{e}_y + \frac{1}{3} \vec{e}_z.$$

$$|\vec{n}| = |\vec{m}| = |\vec{l}| = 1, \quad \vec{n} \cdot \vec{m} = \vec{l} \cdot \vec{m} = \vec{n} \cdot \vec{l} = 0.$$

Feladat: a) A P pontban a $\vec{\rho}_x, \vec{\rho}_y, \vec{\rho}_z$ feszültségvektorok meghatározása.

b) A pontbeli feszültségi állapot szemléltetése az elemi kockán.

c) A P pontban a $\vec{\rho}_n$ feszültségvektor és a $\sigma_n, \tau_{nm}, \tau_{nl}$ feszültség koordináták meghatározása.

Kidolgozás:

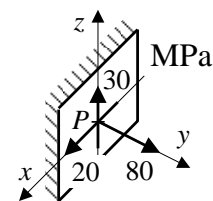
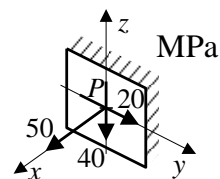
a) A P pontban a $\vec{\rho}_x, \vec{\rho}_y, \vec{\rho}_z$ feszültségvektorok meghatározása:

$$[\vec{\rho}_x] = [\underline{\underline{F}}_P] [\vec{e}_x] = \begin{bmatrix} 50 & 20 & -40 \\ 20 & 80 & 30 \\ -40 & 30 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 20 \\ -40 \end{bmatrix} \text{ MPa},$$

$$\vec{\rho}_x = \sigma_x \vec{e}_x + \tau_{xy} \vec{e}_y + \tau_{xz} \vec{e}_z = (50 \vec{e}_x + 20 \vec{e}_y - 40 \vec{e}_z) \text{ MPa}.$$

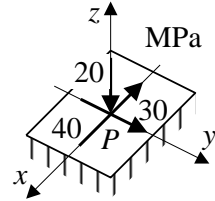
$$[\vec{\rho}_y] = [\underline{\underline{F}}_P] [\vec{e}_y] = \begin{bmatrix} 50 & 20 & -40 \\ 20 & 80 & 30 \\ -40 & 30 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 80 \\ 30 \end{bmatrix} \text{ MPa},$$

$$\vec{\rho}_y = \tau_{yx} \vec{e}_x + \sigma_y \vec{e}_y + \tau_{yz} \vec{e}_z = (20 \vec{e}_x + 80 \vec{e}_y + 30 \vec{e}_z) \text{ MPa}.$$



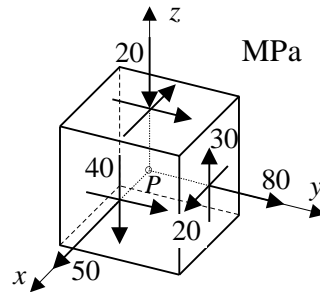
$$[\bar{\rho}_z] = [\underline{F}_p][\bar{e}_z] = \begin{bmatrix} 50 & 20 & -40 \\ 20 & 80 & 30 \\ -40 & 30 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 \\ 30 \\ -20 \end{bmatrix} \text{MPa},$$

$$\bar{\rho}_z = \tau_{zx}\bar{e}_x + \tau_{zy}\bar{e}_y + \sigma_z\bar{e}_z = (-40\bar{e}_x + 30\bar{e}_y - 20\bar{e}_z) \text{MPa}.$$



b) A feszültségi állapot szemléltetése az elemi kockán:

Az elemi kocka \bar{e}_x normálisú lapjára a $\bar{\rho}_x$ koordinátáit, az \bar{e}_y normálisú lapra a $\bar{\rho}_y$ koordinátáit, a \bar{e}_z normálisú lapra pedig a $\bar{\rho}_z$ koordinátáit rajzoljuk fel.



c) A P pontban a $\bar{\rho}_n$ feszültségvektor és a $\sigma_n, \tau_{mn}, \tau_{ln}$ feszültség koordináták meghatározása:

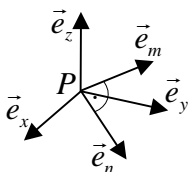
$$[\bar{\rho}_n] = [\underline{F}_p][\bar{n}] = \begin{bmatrix} 50 & 20 & -40 \\ 20 & 80 & 30 \\ -40 & 30 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50/3 + 40/3 - 80/3 \\ 20/3 + 160/3 + 60/3 \\ -40/3 + 60/3 - 40/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/3 \\ 80 \\ -20/3 \end{bmatrix} \text{MPa},$$

$$\sigma_n = \bar{\rho}_n \cdot \bar{n} = \begin{bmatrix} 10/3 & 80 & -20/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \frac{10}{9} + \frac{160}{3} - \frac{40}{9} = 50 \text{MPa},$$

$$\tau_{ln} = \tau_{nl} = \bar{\rho}_n \cdot \bar{l} = \begin{bmatrix} 10/3 & 80 & -20/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} = \frac{20}{9} - \frac{160}{3} - \frac{20}{9} = -\frac{160}{3} \text{MPa},$$

$$\tau_{mn} = \tau_{nm} = \bar{\rho}_n \cdot \bar{m} = \begin{bmatrix} 10/3 & 80 & -20/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = -\frac{20}{9} - \frac{80}{3} - \frac{40}{9} = -\frac{100}{3} \text{MPa}.$$

2.11.3. feladat: P pont elemi környezetének feszültségi állapota



Adott:

$$\sigma_x = -60 \text{MPa}, \quad \sigma_z = 60 \text{MPa}, \quad \tau_{xz} = 60 \text{MPa}, \quad \tau_{yz} = 0,$$

$$\bar{e}_n = \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{e}_y, \quad \bar{e}_m = -\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{e}_y,$$

$$\sigma_n = -85 \text{MPa}, \quad \tau_{mn} = 15 \text{MPa}.$$

Feladat: a) A σ_y normál feszültség és a τ_{xy} csúsztató feszültség meghatározása.

b) A τ_{zn} csúsztató feszültség meghatározása.

Kidolgozás:

a) A σ_y normál feszültség és a τ_{xy} csúsztató feszültség meghatározása:

A feszültségi tenzor az ismert és ismeretlen koordinátákkal: $[F_{\underline{=P}}] = \begin{bmatrix} -60 & \tau_{xy} & 60 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 60 & 0 & 60 \end{bmatrix}$ MPa .

Az egyenletek, amiből az ismeretlenek meghatározhatók: $\sigma_n = \vec{e}_n \cdot \vec{\rho}_n$, $\tau_{nm} = \vec{e}_m \cdot \vec{\rho}_n$.

Részletszámítások az első egyenlet felírásához:

$$[\vec{\rho}_n] = [F_{\underline{=P}}][\vec{e}_n] = \begin{bmatrix} -60 & \tau_{xy} & 60 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 60 & 0 & 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60 \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \tau_{xy} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \tau_{xy} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_y \\ 60 \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix},$$

$$\sigma_n = \vec{e}_n \cdot \vec{\rho}_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y \right) \cdot \left[\left(-60 \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \tau_{xy} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \tau_{xy} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_y \right) \vec{e}_y + 60 \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_z \right] = -30 + \tau_{xy} + \frac{1}{2} \sigma_y.$$

Részletszámítások a második egyenlet felírásához:

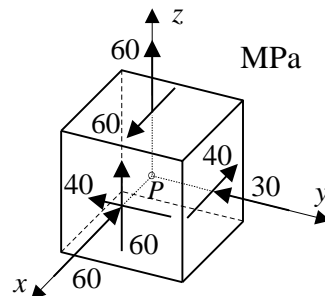
$$\tau_{nm} = \vec{e}_m \cdot \vec{\rho}_n = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y \right) \cdot \left[\left(-60 \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \tau_{xy} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \tau_{xy} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_y \right) \vec{e}_y + 60 \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_z \right] = 30 + 0,5 \sigma_y.$$

A megoldandó egyenletrendszer és megoldása:

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{xy} + \frac{1}{2} \sigma_y = 30 - 85 \\ \frac{1}{2} \sigma_y = -30 + 15 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \sigma_y = -30 \text{ MPa,} \\ \tau_{xy} = -40 \text{ MPa.} \end{array}$$

A feszültségi tenzor mátrixa:

$$[F_{\underline{=P}}] = \begin{bmatrix} -60 & -40 & 60 \\ -40 & -30 & 0 \\ 60 & 0 & 60 \end{bmatrix} \text{ MPa .}$$



b) A τ_{zn} csúsztató feszültség meghatározása:

$$\tau_{zn} = \vec{e}_n \cdot \vec{\rho}_z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y \right) \cdot (60 \vec{e}_x + 50 \vec{e}_z) = 30 \sqrt{2} \cong 42,3 \text{ MPa .}$$

2.11.4. feladat: P pont elemi környezetének feszültségi állapota

Adott:

A szilárd test P pontjában az $\underline{\underline{F}}$ feszültségi tenzor mátrixa.

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 30\sqrt{2} \\ 0 & 40 & -30\sqrt{2} \\ 30\sqrt{2} & -30\sqrt{2} & 40 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

Feladat:

- a) Az F_I , F_{II} és F_{III} skalár invariánsok kiszámítása.
 b) A σ_1 , σ_2 és σ_3 főfeszültségek meghatározása.

Kidolgozás:

a) A skalár invariánsok kiszámítása:

$$F_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 40 + 40 + 40 = 120 \text{ MPa},$$

$$F_{II} = \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 40 & -30\sqrt{2} \\ -30\sqrt{2} & 40 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 40 & 30\sqrt{2} \\ 30\sqrt{2} & 40 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 40 & 0 \\ 0 & 40 \end{vmatrix},$$

$$F_{II} = (1600 - 1800) + (1600 - 1800) + 1600 = -400 + 1600 = 1200 \text{ MPa}^2.$$

$$F_{III} = \det \begin{vmatrix} 40 & 0 & 30\sqrt{2} \\ 0 & 40 & -30\sqrt{2} \\ 30\sqrt{2} & -30\sqrt{2} & 40 \end{vmatrix} = 40(-200) + 30\sqrt{2}(-1200\sqrt{2}) = -80000 \text{ MPa}^3.$$

b) A főfeszültségek meghatározása:

A nemtriviális megoldás létezésének feltétele: $\det \underline{\underline{F}} - \sigma_e \underline{\underline{E}} = 0$.

A determináns meghatározása a kifejtési szabály alkalmazásával:

$$(40 - \sigma_e) \left[(40 - \sigma_e)(40 - \sigma_e) - (-30\sqrt{2})(-30\sqrt{2}) \right] - 0 + 30\sqrt{2} \left[0 - (40 - \sigma_e) \cdot 30\sqrt{2} \right] = 0.$$

A minden tagban szereplő $(40 - \sigma_e)$ kiemelése után:

$$(40 - \sigma_e) \left[\sigma_e^2 - 80\sigma_e + 1600 - 1800 - 1800 \right] = (40 - \sigma_e) (\sigma_e^2 - 80\sigma_e - 2000) = 0 \dots$$

A második tényező gyöktényezős alakra hozása:

$$\sigma_e^2 - 80\sigma_e - 2000 = 0 \Rightarrow \sigma_{1,3} = \frac{80 \pm \sqrt{80^2 + 4 \cdot 2000}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 100, \\ \sigma_3 = -20. \end{cases}$$

$$(\sigma_e - 40)(\sigma_e - 100)(\sigma_e + 20) = 0.$$

A főfeszültségek: $\sigma_1 = 100 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 40 \text{ MPa}$, $\sigma_3 = -20 \text{ MPa}$.

2.11.5. feladat: P pont elemi környezetének feszültségi állapota

Adott:

A szilárd test P pontjában az $\underline{\underline{F}}$ feszültségi tenzor mátrixa.

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & 20 & 50 \\ 20 & -40 & 0 \\ 50 & 0 & 130 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

Feladat:

- a) Az $\underline{\underline{F}}_d$ feszültségi deviátor tenzor mátrixának meghatározása.

- b) A feszültségi deviátor tenzor F_{d_I} és $F_{d_{II}}$ skalár invariánsainak meghatározása.
 c) A karakterisztikus egyenlet felírása.

Kidolgozás:

- a) Az $\underline{\underline{F}}_d$ feszültségi deviátor tenzor mátrixa:

$$\left[\underline{\underline{F}}_d \right] = \left[\underline{\underline{F}} \right] - \frac{F_I}{3} \left[\underline{\underline{E}} \right], \text{ ahol } F_I \text{ az } \underline{\underline{F}} \text{ feszültségi tenzor első skalár invariánsa:}$$

$$F_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 60 - 40 + 130 = 150 \text{ MPa} .$$

$$\left[\underline{\underline{F}}_d \right] = \begin{bmatrix} f_{d_{11}} & f_{d_{12}} & f_{d_{13}} \\ f_{d_{21}} & f_{d_{22}} & f_{d_{23}} \\ f_{d_{31}} & f_{d_{32}} & f_{d_{33}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & 20 & 50 \\ 20 & -40 & 0 \\ 50 & 0 & 130 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 50 \\ 20 & -90 & 0 \\ 50 & 0 & 80 \end{bmatrix} \text{ MPa} .$$

- b) A feszültségi deviátor tenzor F_{d_I} és $F_{d_{II}}$ skalár invariánsainak meghatározása:

$$F_{d_I} = f_{d_{11}} + f_{d_{22}} + f_{d_{33}} = 10 - 90 + 80 = 0 \text{ MPa} ,$$

$$F_{d_{II}} = \begin{vmatrix} f_{d_{22}} & f_{d_{23}} \\ f_{d_{32}} & f_{d_{33}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{d_{11}} & f_{d_{13}} \\ f_{d_{31}} & f_{d_{33}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{d_{11}} & f_{d_{12}} \\ f_{d_{21}} & f_{d_{22}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -90 & 0 \\ 0 & 80 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 10 & 50 \\ 50 & 80 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 10 & 20 \\ 20 & -90 \end{vmatrix} = -10200 \text{ MPa}^2 .$$

- c) A karakterisztikus egyenlet felírása:

$$\sigma_e^3 - F_I \sigma_e^2 + F_{II} \sigma_e - F_{III} = 0, \text{ ahol}$$

$$F_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 60 - 40 + 130 = 150 \text{ MPa} ,$$

$$F_{II} = \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -40 & 0 \\ 0 & 130 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 60 & 50 \\ 50 & 130 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 60 & 20 \\ 20 & -40 \end{vmatrix} = -2700 \text{ MPa}^2 ,$$

$$F_{III} = \begin{vmatrix} 60 & 20 & 50 \\ 20 & -40 & 0 \\ 50 & 0 & 130 \end{vmatrix} = -264000 \text{ MPa}^3 .$$

$$\text{A karakterisztikus egyenlet: } \sigma_e^3 - 150 \sigma_e^2 - 2700 \sigma_e + 264000 = 0 .$$

2.11.6. feladat: A P pontban a főfeszültségek és a feszültségi főirányok meghatározása

$$\text{Adott: } \left[\underline{\underline{F}}_P \right] = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & -40 \\ 0 & -40 & 90 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

Feladat: A P pontbeli főfeszültségek és feszültségi főirányok meghatározása.

Kidolgozás:

$$\text{Sajátérték feladat: } \vec{\rho}_e = \sigma_e \vec{e} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e} = \sigma_e \underline{\underline{E}} \cdot \vec{e} \quad \Rightarrow \quad (\underline{\underline{F}} - \sigma_e \underline{\underline{E}}) \cdot \vec{e} = \vec{0} .$$

$$\text{Lineáris algebrai egyenletrendszer: } \begin{aligned} (-20 - \sigma_e) e_x + 0 + 0 &= 0, \\ 0 + (30 - \sigma_e) e_y - 40 e_z &= 0, \\ 0 - 40 e_y + (90 - \sigma_e) e_z &= 0. \end{aligned}$$

A nemtriviális megoldás feltétele – karakterisztikus egyenlet: $\det[\underline{\underline{F}} - \sigma_e \underline{\underline{E}}] = 0$.

$$\text{Részletezve: } (20 + \sigma_e) \left[(30 - \sigma_e)(90 - \sigma_e) - 40^2 \right] = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet megoldása: $\sigma_3 = -20 \text{ MPa}$.

Ehhez a gyökhöz tartozó feszültségi főirány: $\vec{e}_3 = \vec{e}_x$.

A karakterisztikus egyenlet további gyökei:

$$(30 - \sigma_e)(90 - \sigma_e) - 40^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_e^2 - 120\sigma_e + 1100 = 0.$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{120 \pm \sqrt{14400 - 4400}}{2} = \frac{120 \pm 100}{2} \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 = 110 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 10 \text{ MPa}.$$

A feszültségi főirányok meghatározása – a főfeszültségeket visszahelyettesítjük a lineáris algebrai egyenletrendszerbe.

1. főirány:

$$\begin{bmatrix} -130 & 0 & 0 \\ 0 & -80 & -40 \\ 0 & -40 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \\ e_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $e_{1x} = 0$, $e_{1z} = -2e_{1y}$.

$$|\vec{e}_1| = 1 = \sqrt{e_{1y}^2 + e_{1z}^2} = \sqrt{5} e_{1y} \quad \Rightarrow \quad e_{1y} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} (\vec{e}_y - 2\vec{e}_z).$$

$$2. \text{ főirány: } \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_x \times \frac{1}{\sqrt{5}} (\vec{e}_y - 2\vec{e}_z) = \frac{1}{\sqrt{5}} (2\vec{e}_y + \vec{e}_z).$$

2.11.7. feladat: A főirányok azonossága alakváltozási-, illetve feszültségi tenzor esetén.

Adott: A szilárd test P pontjában az $\underline{\underline{A}}$ alakváltozási tenzor mátrixa és ugyanabban a pontban az $\underline{\underline{F}}$ feszültségi tenzor mátrixa:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 0 \\ 6 & 20 & -8 \\ 0 & -8 & 10 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5}, \quad \underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 30 & 6 & 0 \\ 6 & 40 & -8 \\ 0 & -8 & 30 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

Feladat:

- Annak igazolása, hogy a szilárd test P pontjában a *Hooke*-törvény érvényesül.
- Az alakváltozási állapot ε_1 , ε_2 és ε_3 főnyúlásainak kiszámítása.
- Az alakváltozási főirányok meghatározása.
- A σ_1 , σ_2 és σ_3 főfeszültségek kiszámítása.
- A feszültségi főirányok meghatározása.

Kidolgozás:

- A *Hooke*-törvény érvényesülésének igazolása.

Az általános *Hooke*-törvény szerint az alakváltozási- és a feszültségi tenzor főátlón kívüli elemeinek hányadosa azonos. Ez a hányados a G csúsztató rugalmassági modulus (anyagjellemző).

$$\frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}} = \frac{\tau_{zy}}{\gamma_{zy}} = \frac{\tau_{zx}}{\gamma_{zx}} = G = 0,5 \cdot 10^5 \text{ MPa}.$$

A főátlóban lévő koordinátákra a *Hooke*-törvény szerint: $\sigma_i = 2G \left(\varepsilon_i + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \right)$.

$$A_I = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 40 \cdot 10^{-5}.$$

$$\sigma_x = 2G \left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \right) = 2 \cdot 0,5 \cdot 10^5 \left(10 \cdot 10^{-5} + \frac{\nu}{1-2\nu} 40 \cdot 10^{-5} \right) = 30.$$

$$10 + \frac{\nu}{1-2\nu} 40 = 30 \Rightarrow \nu = 0,25.$$

Ugyanezt kapjuk σ_y, σ_z esetén is, vagyis a két tenzor megfelelő koordinátái közt valóban a *Hooke*-törvény teremt kapcsolatot. Az anyagállandók: $G = 0,5 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\nu = 0,25$.

b) A főnyúlások kiszámítása (az alakváltozási tenzor sajátértékeinek meghatározása):

$$\text{A nem triviális megoldás létezésének feltétele: } \det \left[\underline{\underline{A}} - \varepsilon_e \underline{\underline{E}} \right] = 0.$$

A determináns meghatározása a kifejtési szabály alkalmazásával:

$$(10 - \varepsilon_e) \left[(20 - \varepsilon_e)(10 - \varepsilon_e) - (-8)(-8) \right] - 6 \left[6(10 - \varepsilon_e) - 0 \right] + 0 = 0.$$

A minden tagban szereplő $(10 - \varepsilon_e)$ kiemelése után:

$$(10 - \varepsilon_e) \left[\varepsilon_e^2 - 30\varepsilon_e + 200 - 64 - 36 \right] = (10 - \varepsilon_e) (\varepsilon_e^2 - 30\varepsilon_e + 100) = 0.$$

A második tényező gyöktényezős alakra hozása:

$$\varepsilon_e^2 - 30\varepsilon_e + 100 = 0 \Rightarrow \varepsilon_{1,3} = \frac{30 \pm \sqrt{30^2 - 4 \cdot 100}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = 15 + 5\sqrt{5}, \\ \varepsilon_3 = 15 - 5\sqrt{5}. \end{cases}$$

$$(\varepsilon_e - 10) (\varepsilon_e - 15 - 5\sqrt{5}) (\varepsilon_e - 15 + 5\sqrt{5}) = 0.$$

$$\text{A főnyúlások: } \varepsilon_1 = (15 + 5\sqrt{5}) \cdot 10^{-5}, \quad \varepsilon_2 = 10 \cdot 10^{-5}, \quad \varepsilon_3 = (15 - 5\sqrt{5}) \cdot 10^{-5}.$$

c) Az alakváltozási főirányok meghatározása:

$$\text{Az } \varepsilon_1\text{-hez tartozó főirány meghatározása: } \left(\underline{\underline{A}} - \varepsilon_1 \underline{\underline{E}} \right) \vec{e}_1 = \vec{0}.$$

$$\text{Mátrix-alakban: } \begin{bmatrix} (10 - 15 - 5\sqrt{5}) & 6 & 0 \\ 6 & (20 - 15 - 5\sqrt{5}) & -8 \\ 0 & -8 & (10 - 15 - 5\sqrt{5}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \\ e_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Válasszuk e_{1x} -t egységnyiinek ($e_{1x} = 1$)! Ezt azért tehetjük meg, mert a számítások végén kapott vektort úgymint normáljuk, azaz irány egységvektort állítunk elő.

$$\text{Első egyenletből: } (10 - 15 - 5\sqrt{5}) \cdot 1 + 6e_{1y} = 0 \Rightarrow e_{1y} = \frac{5(1 + \sqrt{5})}{6} \approx 2,6967.$$

$$\text{Harmadik egyenletből: } -8e_{1y} + (10 - 15 - 5\sqrt{5})e_{1z} = 0 \Rightarrow e_{1z} = \frac{8}{-5(1 + \sqrt{5})} e_{1y} = -\frac{8}{6}.$$

Az így kapott vektor nagysága: $\sqrt{e_{1x}^2 + e_{1y}^2 + e_{1z}^2} = 3,1702$.

Ezzel a számmal kell normálnunk, így az irány egységvektor:

$$\vec{e}_1 = 0,3154\vec{e}_x + 0,8506\vec{e}_y - 0,4206\vec{e}_z.$$

Az ε_2 -höz tartozó főirány meghatározása: $(\underline{\underline{A}} - \varepsilon_2 \underline{\underline{E}})\vec{e}_2 = \vec{0}$.

$$\text{Mátrix-alakban: } \begin{bmatrix} (10-10) & 6 & 0 \\ 6 & (20-10) & -8 \\ 0 & -8 & (10-10) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{2x} \\ e_{2y} \\ e_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Az első és a harmadik egyenletből látható, hogy $e_{2y} = 0$. Válasszuk e_{2x} -t egységnyinek!

Ezt azért tehetjük meg, mert a számítások végén kapott vektort úgyis normáljuk, azaz irány egységvektort állítunk elő.

$$\text{A második egyenletből: } 6 \cdot 1 + 10 \cdot 0 - 8e_{2z} = 0 \Rightarrow e_{2z} = 0,75.$$

Az így kapott vektor nagysága: $\sqrt{e_{2x}^2 + e_{2y}^2 + e_{2z}^2} = 1,25$.

Ezzel a számmal kell normálnunk, így az irány egységvektor: $\vec{e}_2 = 0,8\vec{e}_x + 0,6\vec{e}_z$.

Az ε_3 -hoz tartozó főirány meghatározása: $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = 0,5104\vec{e}_x - 0,5257\vec{e}_y - 0,6805\vec{e}_z$.

d) A főfeszültségek meghatározása:

A nemtriviális megoldás létezésének feltétele: $\det[\underline{\underline{F}} - \sigma_e \underline{\underline{E}}] = 0$.

A determináns meghatározása a kifejtési szabály alkalmazásával:

$$(30 - \sigma_e)[(40 - \sigma_e)(30 - \sigma_e) - (-8)(-8)] - 6[6(30 - \sigma_e) - 0] + 0 = 0.$$

A minden tagban szereplő $(30 - \sigma_e)$ kiemelése után:

$$(30 - \sigma_e)[\sigma_e^2 - 70\sigma_e + 1200 - 64 - 36] = (30 - \sigma_e)(\sigma_e^2 - 70\sigma_e - 1100) = 0.$$

A második tényező gyöktényezős alakra hozása:

$$\sigma_e^2 - 70\sigma_e - 1100 = 0 \Rightarrow \sigma_{1,3} = \frac{70 \pm \sqrt{70^2 + 4 \cdot 1100}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 35 + 5\sqrt{5}, \\ \sigma_3 = 35 - 5\sqrt{5}. \end{cases}$$

$$(\sigma_e - 30)(\sigma_e - 35 - 5\sqrt{5})(\sigma_e - 35 + 5\sqrt{5}) = 0.$$

A főfeszültségek: $\sigma_1 = (35 + 5\sqrt{5})\text{MPa}$, $\sigma_2 = 30\text{MPa}$, $\sigma_3 = (35 - 5\sqrt{5})\text{MPa}$.

e) A feszültségi főirányok meghatározása:

A σ_1 -hez tartozó főirány meghatározása: $(\underline{\underline{A}} - \sigma_1 \underline{\underline{E}})\vec{e}_1 = \vec{0}$.

$$\text{Mátrix-alakban: } \begin{bmatrix} 30 - 35 - 5\sqrt{5} & 6 & 0 \\ 6 & 40 - 35 - 5\sqrt{5} & -8 \\ 0 & -8 & 30 - 35 - 5\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \\ e_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Válasszuk e_{1x} -t egységnyiinek! Ezt azért tehetjük meg, mert a számítások végén kapott vektort úgymint normálnunk kell.

$$\text{Első egyenletből: } (10 - 15 - 5\sqrt{5})e_{1x} + 6e_{1y} = 0 \Rightarrow e_{1y} = \frac{5(1 + \sqrt{5})}{6} \approx 2,6967.$$

$$\text{Harmadik egyenletből: } -8e_{1y} + (10 - 15 - 5\sqrt{5})e_{1z} = 0 \Rightarrow e_{1z} = \frac{8}{-5(1 + \sqrt{5})}e_{1y} = -\frac{8}{6}.$$

$$\text{Az így kapott vektor nagysága: } \sqrt{e_{1x}^2 + e_{1y}^2 + e_{1z}^2} = 3,1702.$$

$$\text{Ezzel a számmal normálva: } \vec{e}_1 = 0,3154\vec{e}_x + 0,8506\vec{e}_y - 0,4206\vec{e}_z.$$

A σ_2 -hoz tartozó főirány meghatározása: $(\underline{\underline{A}} - \sigma_2 \underline{\underline{E}})\vec{e}_2 = \vec{0}$.

$$\text{Mátrix-alakban: } \begin{bmatrix} 30 - 30 & 6 & 0 \\ 6 & 40 - 30 & -8 \\ 0 & -8 & 30 - 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{2x} \\ e_{2y} \\ e_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Az első és a harmadik egyenletből látható, hogy $e_{2y} = 0$. Válasszuk e_{2x} -t egységnyiinek! Ezt azért tehetjük meg, mert a számítások végén kapott vektort úgymint normálnunk kell.

$$\text{A második egyenletből: } 6e_{2x} + 10e_{2y} - 8z = 0 \Rightarrow z = 0,75.$$

$$\text{Az így kapott vektor nagysága: } \sqrt{e_{2x}^2 + e_{2y}^2 + e_{2z}^2} = 1,25.$$

$$\text{Ezzel a számmal normálva: } \vec{e}_2 = 0,8\vec{e}_x + 0,6\vec{e}_z$$

A σ_3 -hoz tartozó főirány meghatározása: $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = 0,5104\vec{e}_x - 0,5257\vec{e}_y - 0,6805\vec{e}_z$.

Megjegyzések:

a) A főirányok megegyeznek!

Belátható, hogy a sajátvektorok azonossága minden olyan $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{F}}$ tenzorpárra teljesül, amelyekre igaz, hogy $\underline{\underline{F}} = \alpha(\underline{\underline{A}} + \beta \underline{\underline{E}})$ (α, β tetszőleges együtthatók). A *Hooke*-törvény ilyen összefüggést valósít meg egy pont alakváltozási állapotát leíró alakváltozási tenzor és feszültségi állapotát leíró feszültségi tenzor között.

Ebből következik, hogy a nyúlási főirányok és a feszültségi főirányok mindig megegyeznek (egy adott pont esetén). A fenti két tenzor között a *Hooke*-törvény $E = 1,25 \cdot 10^5$ MPa, $\nu = 0,25$ anyagállandók esetén teljesül.

b) A főfeszültségek és a főnyúlások közti összefüggés a következő:

$$\sigma_i = 2G \left[\varepsilon_i + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \right], \quad (i = 1, 2, 3).$$

c) Fentiek bizonyítása a következő:

Tegyük fel, hogy ismerjük az ε_i főnyúlásokat és az \vec{e}_i nyúlási főirányokat. Vizsgáljuk meg az a)-ban meghatározott $\underline{\underline{F}} = \alpha(\underline{\underline{A}} + \beta \underline{\underline{E}})$ tenzor hatását a nyúlási főirányok irányegységvektorára!

$$\underline{\underline{F}} \underline{\underline{e}}_i = \alpha (\underline{\underline{A}} \underline{\underline{e}}_i + \beta \underline{\underline{E}} \underline{\underline{e}}_i) = \alpha (\varepsilon_i \underline{\underline{e}}_i + \beta \underline{\underline{e}}_i) = \alpha (\varepsilon_i + \beta) \underline{\underline{e}}_i$$

Láthatjuk, hogy $\underline{\underline{e}}_i$ az $\underline{\underline{F}} = \alpha (\underline{\underline{A}} + \beta \underline{\underline{E}})$ tenzornak is sajátvektora, a hozzá tartozó sajátérték pedig: $\sigma_i = \alpha (\varepsilon_i + \beta)$.

Figyelembe véve a *Hooke-törvény* ismert $\underline{\underline{F}} = 2G \left(\underline{\underline{A}} + \frac{\nu}{1-2\nu} A_i \underline{\underline{E}} \right)$ alakját, továbbá felidézve, hogy az első skalár invariáns a sajátértékek összegével egyenlő, kapjuk a

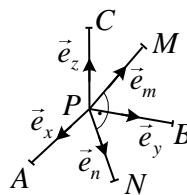
$$\sigma_i = 2G \left[\varepsilon_i + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \right]; \quad (i=1,2,3) \text{ összefüggést.}$$

2.11.8. feladat: A P pont elemi környezetének relatív elmozdulási állapota

Adott: A szilárd test P pontjában a derivált tenzor:

$$\left[\underline{\underline{D}}_{\underline{\underline{P}}} \right] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix} 10^{-3}, \quad \underline{\underline{e}}_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \underline{\underline{e}}_y - \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{\underline{e}}_z \right),$$

$$\underline{\underline{e}}_m = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \underline{\underline{e}}_y + \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{\underline{e}}_z \right), \quad |\underline{\underline{e}}_m| = |\underline{\underline{e}}_n| = 1.$$



Feladat:

- Az A , B és C pontok relatív elmozdulás vektorainak meghatározása.
- Az $\underline{\underline{e}}_n$ egységvektor végpontjában levő N pont relatív elmozdulás vektorának meghatározása.
- Az $\underline{\underline{e}}_m$ egységvektor végpontjában levő M pont relatív elmozdulás vektorának meghatározása.

Kidolgozás:

- Az A , B és C pontok relatív elmozdulás vektorainak meghatározása:

A relatív elmozdulás vektorok a derivált tenzor oszlopaiban álló elemek:

$$\underline{\underline{u}}_A = (2\underline{\underline{e}}_x + 4\underline{\underline{e}}_z) \cdot 10^{-3}, \quad \underline{\underline{u}}_B = (2\underline{\underline{e}}_y - 4\underline{\underline{e}}_z) \cdot 10^{-3}, \quad \underline{\underline{u}}_C = (-2\underline{\underline{e}}_x - 4\underline{\underline{e}}_z) \cdot 10^{-3}.$$

- Az $\underline{\underline{e}}_n$ egységvektor végpontjában levő N pont relatív elmozdulás vektorának meghatározása:

$$\left[\underline{\underline{u}}_N \right] = \left[\underline{\underline{D}}_{\underline{\underline{P}}} \right] \cdot \left[\underline{\underline{e}}_n \right] = 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} 10^{-3}.$$

$$\underline{\underline{u}}_N = (\sqrt{2} \underline{\underline{e}}_x + \sqrt{2} \underline{\underline{e}}_y + \sqrt{2} \underline{\underline{e}}_z) \cdot 10^{-3}.$$

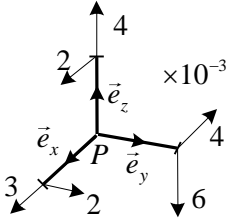
- Az $\underline{\underline{e}}_m$ egységvektor végpontjában levő M pont relatív elmozdulás vektorának meghatározása:

$$[\underline{\underline{u}}_M] = [\underline{\underline{D}}_P] \cdot [\underline{\underline{e}}_m] = 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} \end{bmatrix} 10^{-3},$$

$$\underline{\underline{u}}_M = (-\sqrt{2}\underline{\underline{e}}_x + \sqrt{2}\underline{\underline{e}}_y - 3\sqrt{2}\underline{\underline{e}}_z) \cdot 10^{-3}.$$

2.11.9. feladat: A P pont elemi környezetének relatív elmozdulási állapota

Adott: A P pont környezetének fajlagos relatív elmozdulás állapotának szemléltetése az elemi triéderen.



Feladat:

- A $\underline{\underline{D}}_P$ derivált tenzor felírása szimbolikus és mátrixos alakban.
- A $\underline{\underline{\Psi}}_P$ forgató tenzor felírása szimbolikus és mátrixos alakban.
- Az $\underline{\underline{A}}_P$ alakváltozási tenzor felírása szimbolikus és mátrixos alakban.

Kidolgozás:

- a) A $\underline{\underline{D}}_P$ derivált tenzor felírása szimbolikus és mátrixos alakban:

Szimbolikus alak: $\underline{\underline{D}}_P = \underline{\underline{u}}_x \circ \underline{\underline{e}}_x + \underline{\underline{u}}_y \circ \underline{\underline{e}}_y + \underline{\underline{u}}_z \circ \underline{\underline{e}}_z,$

$$\underline{\underline{D}}_P = [(3\underline{\underline{e}}_x + 2\underline{\underline{e}}_y) \circ \underline{\underline{e}}_x + (-4\underline{\underline{e}}_x - 6\underline{\underline{e}}_z) \circ \underline{\underline{e}}_y + (2\underline{\underline{e}}_x + 4\underline{\underline{e}}_z) \circ \underline{\underline{e}}_z] \cdot 10^{-3}.$$

Mátrixos alak: $[\underline{\underline{D}}_P] = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 4 \end{bmatrix} 10^{-3}.$

A derivált tenzor transzponáltja, szimbolikus alak: $\underline{\underline{D}}_P^T = \underline{\underline{e}}_x \circ \underline{\underline{u}}_x + \underline{\underline{e}}_y \circ \underline{\underline{u}}_y + \underline{\underline{e}}_z \circ \underline{\underline{u}}_z,$

$$\underline{\underline{D}}_P^T = [\underline{\underline{e}}_x \circ (3\underline{\underline{e}}_x + 2\underline{\underline{e}}_y) + \underline{\underline{e}}_y \circ (-4\underline{\underline{e}}_x - 6\underline{\underline{e}}_z) + \underline{\underline{e}}_z \circ (2\underline{\underline{e}}_x + 4\underline{\underline{e}}_z)] \cdot 10^{-3}.$$

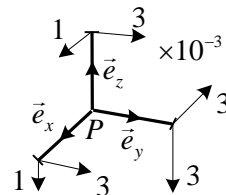
Mátrixos alak: $[\underline{\underline{D}}_P^T] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} 10^{-3}.$

- b) A $\underline{\underline{\Psi}}_P$ forgató tenzor felírása szimbolikus és mátrixos alakban:

Szimbolikus alak: $\underline{\underline{\Psi}}_P = \frac{1}{2}(\underline{\underline{D}}_P - \underline{\underline{D}}_P^T),$

$$\underline{\underline{\Psi}}_P = [(3\underline{\underline{e}}_y - \underline{\underline{e}}_z) \circ \underline{\underline{e}}_x + (-3\underline{\underline{e}}_x + 3\underline{\underline{e}}_z) \circ \underline{\underline{e}}_y + (\underline{\underline{e}}_x - 3\underline{\underline{e}}_y) \circ \underline{\underline{e}}_z] \cdot 10^{-3}$$

Mátrixos alak: $[\underline{\underline{\Psi}}_P] = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} 10^{-3}.$

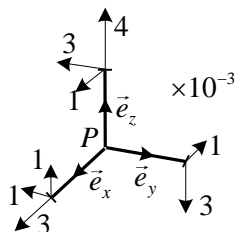


c) Az $\underline{\underline{A}}_P$ alakváltozási tenzor felírása szimbolikus és mátrixos alakban:

Szimbolikus alak: $\underline{\underline{A}}_P = \frac{1}{2}(\underline{\underline{D}}_P + \underline{\underline{D}}_P^T),$

$$\underline{\underline{A}}_P = \left[(3\vec{e}_x - \vec{e}_y - \vec{e}_z) \circ \vec{e}_x + (-\vec{e}_y - 3\vec{e}_z) \circ \vec{e}_y + (\vec{e}_x - 3\vec{e}_y + 4\vec{e}_z) \circ \vec{e}_z \right] \cdot 10^{-3}.$$

Mátrixos alak:
$$\left[\underline{\underline{A}}_P \right] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} 10^{-3}.$$



2.11.10. feladat: Feszültségi főirányok, főfeszültségek, Mohr-féle feszültségi kördiagram

Adott: A szilárd test P pontjában az $\underline{\underline{F}}$ feszültségi tenzor mátrixának elemei: $\sigma_x = -20 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 30 \text{ MPa}$, $\sigma_z = 90 \text{ MPa}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy} = -40 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0 \text{ MPa}$.

Feladat:

- A főfeszültségek és a feszültségi főirányok meghatározása sajátérték feladat megoldásával, és Mohr-féle feszültségi kördiagram felhasználásával.
- Az $\underline{\underline{F}}$ feszültségi tenzor F_I, F_{II} és F_{III} skalár invariánsainak kiszámítása.
- A feszültségi deviátor tenzor mátrixának meghatározása.

Kidolgozás:

- A főfeszültségek és a feszültségi főirányok meghatározása sajátérték feladat megoldásával, és Mohr-féle feszültségi kördiagram felhasználásával:

Az $\underline{\underline{F}}$ feszültségi tenzor mátrixa:
$$\left[\underline{\underline{F}} \right] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & -40 \\ 0 & -40 & 90 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

- A sajátérték feladat megoldása:

$$(\underline{\underline{F}} - \sigma \underline{\underline{E}})\vec{e} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (-20 - \sigma)e_x + 0 + 0 = 0, \\ 0 + (30 - \sigma)e_y - 40e_z = 0, \\ 0 - 40e_y + (90 - \sigma)e_z = 0. \end{cases}$$

A karakterisztikus egyenlet: $\det[\underline{\underline{F}} - \sigma \underline{\underline{E}}] = 0,$

$$(-20 - \sigma)[(30 - \sigma)(90 - \sigma) - 40^2] = 0 \Rightarrow \sigma_e = -20 \text{ MPa}.$$

$$2700 - 90\sigma - 30\sigma + \sigma^2 - 1600 = 0,$$

$$\sigma^2 - 120\sigma + 1100 = 0,$$

A karakterisztikus egyenlet megoldása: $\sigma_{1,2} = \frac{120 \pm \sqrt{14400 - 4400}}{2} = \frac{120 \pm 100}{2} = \begin{cases} 110, \\ 10. \end{cases}$

A főfeszültségek: $\sigma_1 = 110 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 10 \text{ MPa}$, $\sigma_3 = \sigma_x = -20 \text{ MPa}$.

- Főirányok meghatározása:

Mivel $\sigma_x = \sigma_3 = -20 \text{ MPa}$ főfeszültség, ezért $\vec{e}_3 = \vec{e}_x$,

A σ_1 főfeszültség visszahelyettesítése a lineáris algebrai egyenletrendszerbe:

$$\begin{aligned} (-20 - \sigma_1)e_{1x} + 0 + 0 = 0 & \quad (-20 - 110)e_{1x} + 0 + 0 = 0 \\ (\underline{F} - \sigma_1 \underline{E})\vec{e}_1 = 0 \Rightarrow 0 + (30 - \sigma_1)e_{1y} - 40e_{1z} = 0 & \Rightarrow 0 + (30 - 110)e_{1y} - 40e_{1z} = 0 \Rightarrow \\ 0 - 40e_{1y} + (90 - \sigma_1)e_{1z} = 0 & \quad 0 - 40e_{1y} + (90 - 110)e_{1z} = 0 \\ -130e_{1x} + 0 + 0 = 0 & \quad e_{1x} = 0 \\ \Rightarrow 0 + -80e_{1y} - 40e_{1z} = 0 & \Rightarrow e_{1z} = -2e_{1y}, \\ 0 - 40e_{1y} + -20e_{1z} = 0 & \quad e_{1z} = -2e_{1y} \end{aligned}$$

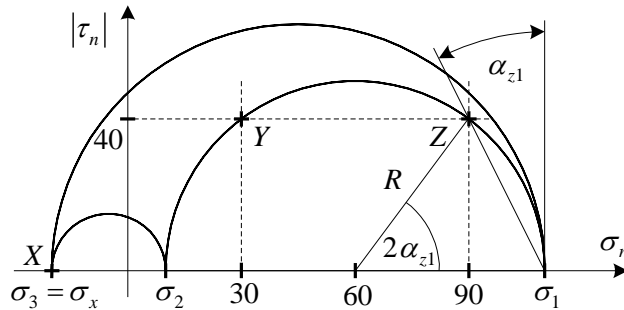
$$|\vec{e}_1| = 1 = \sqrt{e_{1x}^2 + e_{1y}^2 + e_{1z}^2} = \sqrt{e_{1y}^2 + 4e_{1y}^2} = \sqrt{5}e_{1y} \quad \Rightarrow \quad e_{1y} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Az első főirány irány egységvektora: $\vec{e}_1 = \left(0\vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_y - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_z \right) = (0, 447\vec{e}_y - 0, 894\vec{e}_z)$.

A második főirány:

$$\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_x \times \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_y - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_z \right) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_y + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_z \right) = (0, 894\vec{e}_y + 0, 447\vec{e}_z)$$

- A Mohr-féle feszültségi kördiagram megrajzolása:



A főfeszültségek meghatározása:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{yz}^2}, \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{yz}^2}, \quad \sigma_3 = \sigma_x$$

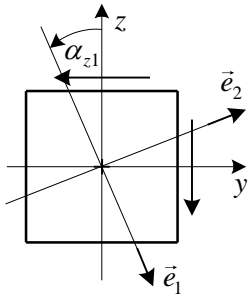
$$R = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \text{ MPa},$$

$$\sigma_1 = 60 + 50 = 110 \text{ MPa},$$

$$\sigma_2 = 60 - 50 = 10 \text{ MPa}.$$

$$\sigma_3 = \sigma_x = -20 \text{ MPa},$$

A főirányok meghatározása:



Az α_{z1} szöveget a τ feszültség növekedésének irányában kell felmérni!

$$\operatorname{tg} \alpha_{z1} = \frac{20}{40} \Rightarrow \alpha_{z1} = 26,57^\circ.$$

$$\vec{e}_1 = (\sin \alpha_{z1} \vec{e}_y - \cos \alpha_{z1} \vec{e}_z) = (0,447 \vec{e}_y - 0,894 \vec{e}_z).$$

$$\vec{e}_2 = (\cos \alpha_{z1} \vec{e}_y + \sin \alpha_{z1} \vec{e}_z) = (0,894 \vec{e}_y + 0,447 \vec{e}_z).$$

b) A skalár invariánsok kiszámítása:

$$F_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 100 \text{ MPa},$$

$$F_{II} = \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} = \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_2 = -1300 \text{ MPa}^2,$$

$$F_{III} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = -22000 \text{ MPa}^3.$$

c) A feszültségi deviátor tenzor mátrixának meghatározása:

$$[\underline{\underline{F}}_d] = [\underline{\underline{F}}] - \frac{F_I}{3} [\underline{\underline{E}}], \text{ ahol } F_I = 100 \text{ MPa}.$$

$$[\underline{\underline{F}}_d] = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & -40 \\ 0 & -40 & 90 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 100/3 & 0 & 0 \\ 0 & 100/3 & 0 \\ 0 & 0 & 100/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -53,3 & 0 & 0 \\ 0 & -3,3 & -40 \\ 0 & -40 & 56,7 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

2.11.11. feladat: Mohr-féle feszültségi kördiagram, általános Hooke törvény

Adott:

A szilárd test P pontjában az $\underline{\underline{F}}$ feszültségi tenzor

$$[\underline{\underline{F}}] = \begin{bmatrix} 70 & 0 & 40 \\ 0 & 50 & 0 \\ 40 & 0 & 10 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

mátrixa, továbbá $\nu = 0,3$, $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

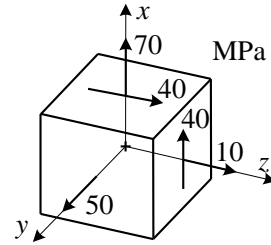
Feladat:

- A P pont feszültségi állapotának szemléltetése az elemi kockán.
- A P pont feszültségi állapotának szemléltetése Mohr-féle feszültségi kördiagrammal.
- A főfeszültségek és a főirányok meghatározása a Mohr-féle feszültségi kördiagramból.
- A P pont alakváltozási állapotának meghatározása és szemléltetése elemi triéderen.

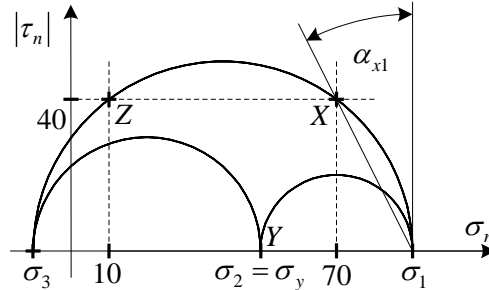
Kidolgozás:

- A P pont feszültségi állapotának szemléltetése az elemi kockán:

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 & 0 & 40 \\ 0 & 50 & 0 \\ 40 & 0 & 10 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$



b) A P pont feszültségi állapotának szemléltetése *Mohr*-féle kördiagrammal:



c) A főfeszültségek és a főirányok meghatározása a *Mohr*-féle kördiagramból:

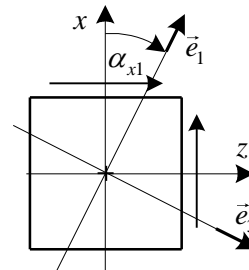
$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = 40 + \sqrt{30^2 + 40^2} = 90 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = \sigma_y = 50 \text{ MPa},$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = 40 - \sqrt{30^2 + 40^2} = -10 \text{ MPa}.$$

A főirányok meghatározása:

$$\operatorname{tg} \alpha_{x1} = \frac{20}{40} = 0,5 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{x1} = 26,57^\circ.$$

Az α_{x1} szöveget a τ feszültség növekedésének irányában kell felmérni!



d) A P pont alakváltozási állapotának meghatározása és szemléltetése az elemi triéderen:

$$\text{Az általános Hooke törvény: } \underline{\underline{A}} = \frac{1}{2G} \left(\underline{\underline{F}} - \frac{\nu}{1+\nu} F_l \underline{\underline{E}} \right),$$

$$F_l = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 70 + 50 + 10 = 130 \text{ MPa}, \quad \frac{\nu}{1+\nu} F_l = \frac{0,3}{1+0,3} 130 = 30 \text{ MPa}.$$

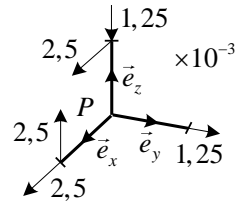
$$\varepsilon_x = \frac{10^{-5}}{1,6} (70 - 30) = 2,5 \cdot 10^{-4}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = 0,$$

$$\varepsilon_y = \frac{10^{-5}}{1,6} (50 - 30) = 1,25 \cdot 10^{-4}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = 0,$$

$$\varepsilon_z = \frac{10^{-5}}{1,6}(10-30) = -1,25 \cdot 10^{-4}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = \frac{40}{0,8 \cdot 10^5} = 5 \cdot 10^{-4}.$$

Az alakváltozási tenzor:

$$[\underline{A}_p] = \begin{bmatrix} 2,5 & 0 & 2,5 \\ 0 & 1,25 & 0 \\ 2,5 & 0 & -1,25 \end{bmatrix} 10^{-4}.$$



2.11.12. feladat: Mohr-féle feszültségi kördiagram

Adott: A szilárd test P pontjában az \underline{F} feszültségi tenzor mátrixa.

$$[\underline{F}] = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 40 \\ 0 & 50 & 0 \\ 40 & 0 & 70 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

Feladat:

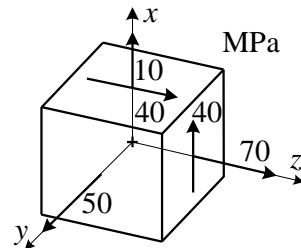
- A P pont feszültségi állapotának szemléltetése az elemi kockán.
- A P pont feszültségi állapotának szemléltetése *Mohr*-féle kördiagrammal.
- A főfeszültségek és a főirányok meghatározása a *Mohr*-féle kördiagramból.

Kidolgozás:

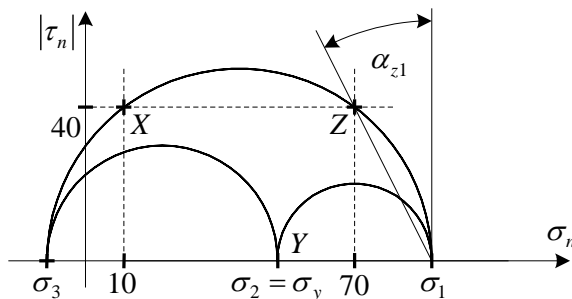
- A P pont feszültségi állapotának szemléltetése elemi kockán:

A feszültségi tenzor:

$$[\underline{F}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 40 \\ 0 & 50 & 0 \\ 40 & 0 & 70 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$



- A pont feszültségi állapotának szemléltetése *Mohr*-féle kördiagrammal:



- A főfeszültségek és a főirányok meghatározása a *Mohr*-féle kördiagramból:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = 40 + \sqrt{30^2 + 40^2} = 90 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = \sigma_y = 50 \text{ MPa},$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = 40 - \sqrt{30^2 + 40^2} = -10 \text{ MPa} .$$

A főirányok meghatározása:

$$\operatorname{tg} \alpha_{z1} = 20 / 40 = 0,5 \Rightarrow \alpha_{z1} = 26,57^\circ .$$

Az α_{z1} szöget a τ feszültség növekedésének irányában kell felmérni!

