

### 3. MÉRETEZÉS, ELLENŐRZÉS STATIKUS TERHELÉS ESETÉN

A méretezés, ellenőrzés célkitűzése:

Annak elérése, hogy a szerkezet rendeltetésszerű használat esetén előírt ideig és előírt biztonsággal elviselje az adott terhelést anélkül, hogy benne károsodás lépne fel.

Statikus terhelés: a terhelés időben nem változik.

Méretezés, ellenőrzés statikus terhelésnél:

- Pontbeli jellemző alapján (feszültségcsúcsra).
- Szerkezeti jellemző alapján (teherbírásra, alakváltozásra).

#### 3.1. Méretezés, ellenőrzés feszültségcsúcsra

Feszültségcsúcsra történő méretezés, ellenőrzés esetén a szerkezet veszélyes pontjában kiszámított, a tönkremenetelre jellemző redukált feszültséget hasonlítjuk össze a megengedett feszültséggel, amelynél már károsodás lép fel.

Károsodás:

- maradó (képlékeny) alakváltozás,
- törés, szakadás.

Anyagszilárdsági jellemző:

- $R_{p0,2}$  - folyáshatár,
- $R_m$  - szakítószilárdság.

Ezek az anyagszilárdsági jellemzők szakító kísérletekkel határozhatóak meg.

a) Speciális eset: egytengelyű feszültségi állapot.

A méretezés, ellenőrzés a következő egyenlőtlenség alapján történik:

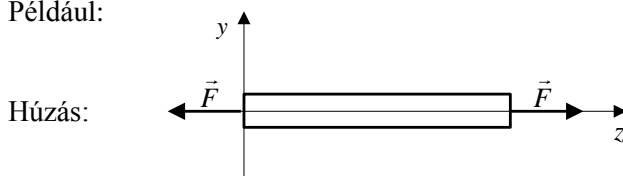
$$\sigma_z \leq \sigma_{meg} = \frac{\sigma_{jell}}{n}, \text{ ahol } n \text{ a biztonsági tényező,}$$

$\sigma_{jell}$  a károsodáshoz tartozó szilárdsági jellemző.

Itt nincs probléma, mert csak egy főfeszültség koordináta nem nulla:  $\sigma_z \neq 0$ .

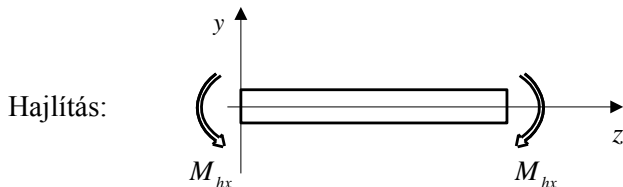
A szilárdsági jellemzők is az egytengelyű feszültségi állapotra állnak rendelkezésre.

Például:



A feszültségi állapot:

$$[\underline{\underline{F}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}.$$



$$[\underline{\underline{F}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

b) Általános eset: tetszőleges térbeli feszültségi állapot.

$$[\underline{\underline{F}}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Probléma: nem tudjuk, hogy melyik feszültség koordinátát hasonlítsuk össze a  $\sigma_{meg}$ -tel!

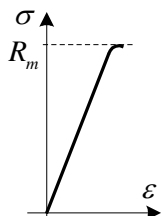
## Redukált feszültség / egyenértékű feszültség / összehasonlító feszültség

**Definíció:** Olyan feszültség, amely a pontbeli feszültségi állapotot a károsodás szempontjából egyértelműen jellemzi.

A redukált feszültség bevezetésével a tetszőleges térbeli feszültségi állapotot egytengelyű feszültségi állapotra vezetjük vissza. A redukált feszültség kiszámítására különböző elméletek vannak.

A redukált feszültség meghatározására több elméletet is kidolgoztak. Az elméletek nem általános érvényűek, vannak olyanok, amelyek rideg anyagok és vannak olyanok, amelyek alakítható anyagok esetén alkalmazhatók előnyösebben, azaz írják le a valósághoz közelállóbban a tönkremenetelt.

### α) Rideg anyagok:



*Rideg anyag:* nem képes képlékeny alakváltozásra.

A rugalmas alakváltozás után hirtelen (képlékeny alakváltozás nélkül) törik/szakad el.

Például az öntött vas, kerámia, üveg, stb.

$R_m \equiv \sigma_B$  az anyag szakítószilárdsága.

Coulomb<sup>1</sup>- elmélet: egy feszültségi állapot akkor nem okoz károsodást, ha a feszültségi állapothoz tartozó legnagyobb normál feszültség kisebb az anyag szakítószilárdságánál.

Főfeszültségek jelölése:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

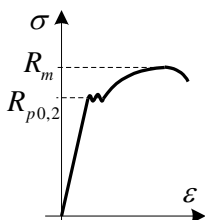
A pontban fellépő legnagyobb normál feszültség:  $\sigma_{\max} = \max(|\sigma_1|, |\sigma_3|)$ .

A Coulomb-féle redukált feszültség:  $\sigma_{red}(Coulomb) = \sigma_{\max} = \max(|\sigma_1|, |\sigma_3|)$ .

### Méretezés, ellenőrzés:

$\sigma_{red}(Coulomb) \leq \sigma_{meg} = \frac{R_m}{n}$ , ahol  $n$  az előírt biztonsági tényező.

### β) Alakítható anyagok



*Alakítható anyag:* képlékeny alakváltozásra képes.

A törés csak a képlékeny alakváltozás után következik be.

Például a fémek, acél, alumínium, stb.

$R_{p0,2} \equiv \sigma_F$  az anyag folyáshatára.

Mohr<sup>2</sup>- elmélet: egy pontbeli feszültségi állapot akkor nem okoz károsodást, ha a feszültségi állapothoz tartozó legnagyobb Mohr-kör átmérője kisebb, mint a megengedett feszültség.

<sup>1</sup> Charles Augustin de Coulomb (1736-1806) francia fizikus és hadmérnök.

<sup>2</sup> Christian Otto Mohr (1835-1918) német mérnök.

A *Mohr*-féle redukált feszültség:  $\sigma_{red}(Mohr) = \sigma_1 - \sigma_3$ .

Méretezés, ellenőrzés:  $\sigma_{red}(Mohr) \leq \sigma_{meg} = \frac{\sigma_{jell}}{n}$ ,

ahol  $\sigma_{jell}$  az anyag tönkremenetelét jellemző szilárdsági érték.

Itt általában  $\sigma_{jell} = R_{p0,2}$ , vagy  $\sigma_{jell} = R_m$  és  $n$  az előírt biztonsági tényező.

Huber<sup>3</sup>-Mises<sup>4</sup>-Hencky<sup>5</sup>-elmélet:

Két feszültségi állapot a károsodás szempontjából akkor azonosan veszélyes, ha a torzulási alakváltozási energiájuk megegyezik:

$$u_{T_1} = u_{T_2}.$$

A *Huber-Mises-Hencky*-féle elmélet szerinti redukált feszültség arányos az  $u_T$  torzulási energiával.

$$\sigma_{red}(HMH) = \sqrt{6 G u_T} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]},$$

$$\sigma_{red}(HMH) = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)]}.$$

Méretezés, ellenőrzés:  $\sigma_{red}(HMH) \leq \sigma_{meg} = \frac{\sigma_{jell}}{n}$ .

Itt  $\sigma_{jell} = R_{p0,2}$ , vagy  $\sigma_{jell} = R_m$  és  $n$  az előírt biztonsági tényező.

A *Mohr* és a *HMH* szerint redukált feszültség csak kis mértékben tér el egymástól.

Általában:  $\sigma_{red}(HMH) < \sigma_{red}(Mohr)$ .

c) Méretezés, ellenőrzés általános gondolatmenete rúdszerkezetek esetén:

- A rúdszerkezet veszélyes keresztmetszetének megkeresése, meghatározása. A veszélyes keresztmetszet az, ahol legnagyobbak az igénybevételek.
- A veszélyes keresztmetszeten a veszélyes pontok megkeresése, meghatározása. A veszélyes pontok azok, ahol legnagyobb a  $\sigma_{red}$  redukált feszültség.
- A veszélyes pontokban a méretezés, ellenőrzés elvégzése:  $\sigma_{red\ max} \leq \sigma_{meg}$ .

### 3.2. Méretezés, ellenőrzés szerkezeti jellemzők alapján

A szerkezeti jellemzőre történő méretezés, ellenőrzés esetén nem egy pontbeli érték, hanem a szerkezet egészére jellemző mennyiség figyelembevételével döntjük el, hogy a szerkezetet mechanikai, szilárdságtani szempontból megfelelőnek tekintjük, vagy nem.

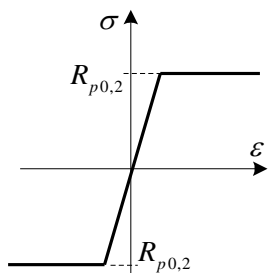
a) Méretezés, ellenőrzés teherbírásra:

<sup>3</sup> Makszimilian Titus Huber (1872-1950) lengyel mérnök.

<sup>4</sup> Richard Edler von Mises (1883-1953) osztrák mérnök.

<sup>5</sup> Heinrich Hencky (1885-1951) német mérnök.

A teherbírásra történő méretezés, ellenőrzés esetén azt az állapotot tekintjük tönkremenetelnek, amikor a szerkezet minden pontjában eléri a feszültség a folyáshatár értékét.



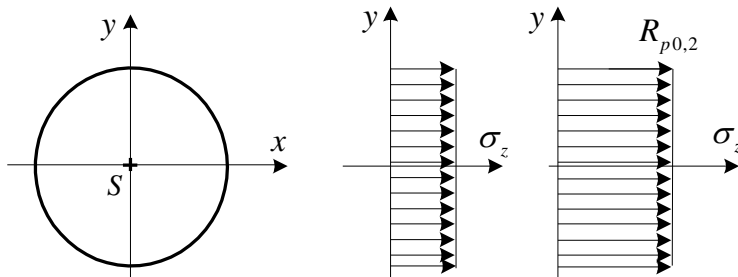
A teherbírásra történő méretezés, ellenőrzés kiinduló feltételezése, hogy:

- az anyag jól alakítható,
- az anyag lineárisan rugalmas, ideálisan képlékeny.

Az ábrán egy ilyen idealizált anyagmodell, a lineárisan rugalmas, ideálisan képlékeny anyag szakító diagramja látható.

- Méretezés-ellenőrzés teherbírásra húzás-nyomás esetén:

Ha húzás-nyomás esetén az  $N$  húzó/nyomó erőt folyamatosan növeljük, akkor a rúdkeresztmetszet minden pontjában egyszerre lép fel  $R_{p0,2}$  nagyságú feszültség. Ehhez az állapothoz tartozó húzó/nyomó igénybevételt  $N_K$  határerőnek nevezzük. Tönkremenetel az  $N_K$  határerőnél lép fel.



$N$  növelése  $\rightarrow$  tönkremenetel .

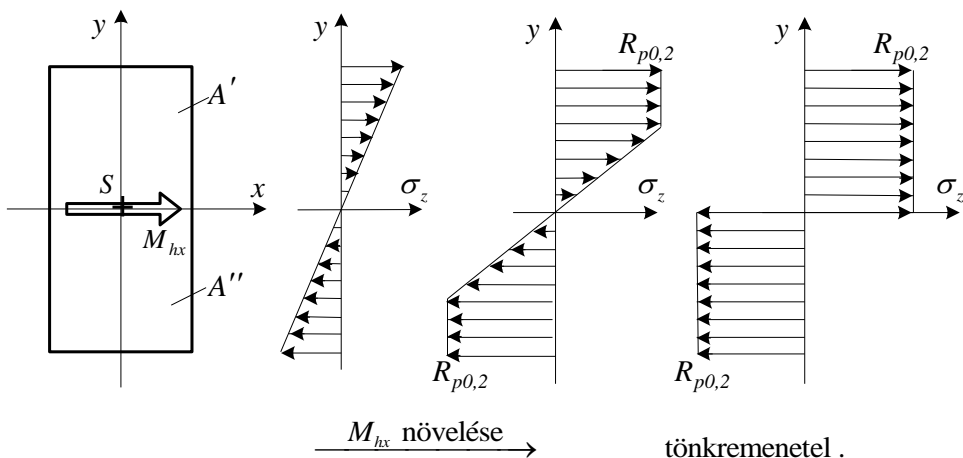
$$N = \sigma_z A, \quad N_K = R_{p0,2} A. \quad (N_K \text{ határerő})$$

Méretezés, ellenőrzés:  $N_{\max} \leq N_{meg} = \frac{N_K}{n_K}$  ,  $N_{\max}$  - a rúdban fellépő legnagyobb rúderő,  $n_K$  - előírt biztonsági tényező.

- Méretezés-ellenőrzés teherbírásra egyenes hajlítás esetén:

Ha tiszta egyenes hajlítás esetén az  $M_{hx}$  hajlító nyomatékot folyamatosan növeljük, akkor a rúdkeresztmetszet szélső pontjaiban lép fel először  $R_{p0,2}$  nagyságú feszültség. Az  $M_{hx}$  hajlító nyomatékot tovább növelve a keresztmetszet egyre nagyobb részén fogja elérni a  $\sigma_z$  feszültség az  $R_{p0,2}$  értéket. Az  $M_{hx}$  hajlító nyomatékot tovább növelve végül olyan állapot alakul ki, hogy a keresztmetszet  $x$  tengely fölötti részén minden pontban  $R_{p0,2}$  , a keresztmetszet  $x$  tengely alatti részén pedig minden pontban  $-R_{p0,2}$  feszültség fog fellépni.

Ehhez az állapothoz tartozó hajlító igénybevételt  $M_K$  határnyomatéknak nevezzük és azt mondjuk, hogy tönkremenetel az  $M_K$  határnyomatéknál lép fel.



Hajlító nyomaték: 
$$M_{hx} = \int_{(A)} y \sigma_z dA.$$

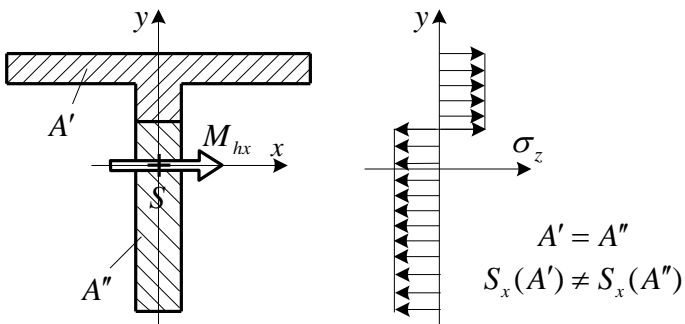
A tönkrementelhez tartozó határ hajlító nyomaték:

$$M_K = \int_{(A)} y \sigma_z dA = R_{p0,2} \underbrace{\int_{(A')} y dA}_{S_x(A')} + (-R_{p0,2}) \underbrace{\int_{(A'')} y dA}_{S_x(A'')}.$$

$$M_K = R_{p0,2} [S_x(A') - S_x(A'')].$$

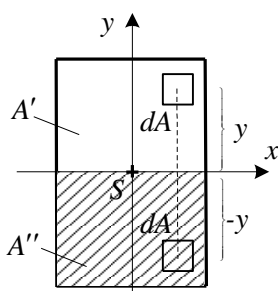
Tiszta hajlítás  $\Rightarrow$  a feszültségeloszlásból nem származhat eredő erő  $\Rightarrow A' = A''$ .

Például:



Kétszeres szimmetrikus keresztmetszet:

A keresztmetszetnek két egymásra merőleges szimmetria tengelye van.



$$S_x = \int_{(A)} y dA, \quad A' = A'' = \frac{A}{2},$$

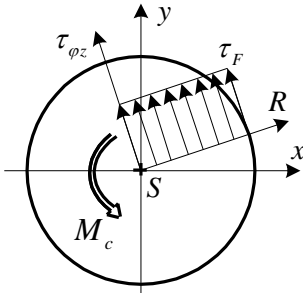
$$S_x(A'') = -S_x(A').$$

$$M_K = R_{p0,2} S_x \left( \frac{A}{2} \right).$$

Méretezés, ellenőrzés:  $M_{hx \max} \leq M_{hmegeg} = \frac{M_K}{n_K}$ ,

$M_{hx \max}$  - a rúdszerkezetben fellépő legnagyobb hajlító nyomaték,  
 $n_K$  - az előírt biztonsági tényező.

- Méretezés-ellenőrzés teherbírásra csavarás (kör, körgyűrű) esetén:



Határnyomaték:

$$M_{cK} = \int (A) R \tau_F dA = \tau_F \underbrace{\int (A) R dA}_{S_p}$$

$S_p$  – poláris statikai nyomaték.

$$M_{cK} = \tau_F S_p.$$

Méretezés, ellenőrzés:  $M_{c \max} \leq M_{cmegeg} = \frac{M_{cK}}{n_K}$ ,

-  $M_{c \max}$  - a rúdban fellépő legnagyobb csavaró nyomaték,  
 -  $n_K$  - előírt biztonsági tényező.

b) Méretezés, ellenőrzés alakváltozásra

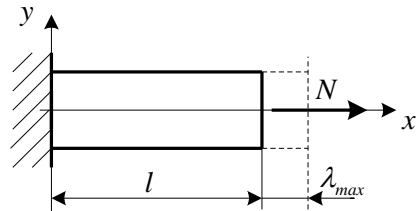
Alakváltozásra történő méretezés esetén a vizsgált szerkezetet akkor tekintjük normál üzemszerű működésre alkalmatlannak, ha a szerkezet alakváltozása egy előírt mértéket túllép.

Például, ha egy megmunkáló gép állványában a megmunkálás során túl nagy deformációk lépnek fel, akkor a gép pontos megmunkálásra alkalmatlan lesz.

Például húzás – nyomás esetén:

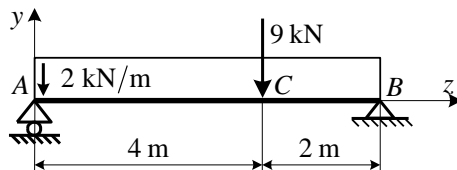
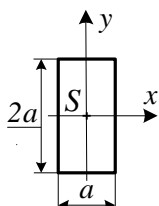
$$\lambda_{\max} = \frac{N}{A E} l, \quad \lambda_{\max} \leq \lambda_{\text{meg}}$$

Alakváltozásra kell méretezni például: megmunkáló gépeket, hidakat, zsilipeket, nagyméretű cső-elzárókat, stb.



### 3.3. Gyakorló feladatok méretezésre, ellenőrzésre statikus terhelés esetén

#### 3.3.1. feladat: Méretezés teherbírásra és feszültségcsúcsra



Adott:

A tartó méretei, téglalap keresztmetszetének oldalaránya és terhelése, valamint:

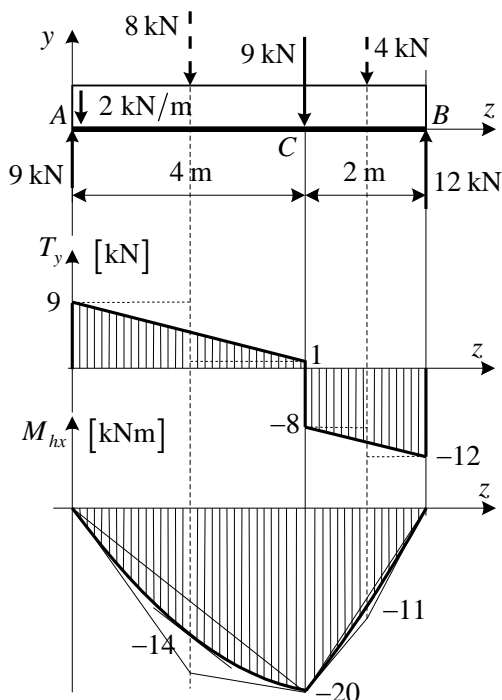
$$\sigma_F = R_{p0,2} = 330 \text{ MPa}, \quad n_F = 2.$$

Feladat:

- A tartó igénybevételi ábráinak megrajzolása.
- A tartó méretezése teherbírásra.
- A tartó méretezése feszültségcsúcsra.

Kidolgozás:

- A tartó igénybevételi ábráinak megrajzolása:



Támasztó erőrendszer meghatározása:

$$M_a = 8 \cdot 2 + 9 \cdot 4 + 4 \cdot 5 - F_{By} \cdot 6 = 0,$$

$$F_{By} = 12 \text{ kN}.$$

$$M_b = F_{Ay} \cdot 6 - 8 \cdot 4 - 9 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 0,$$

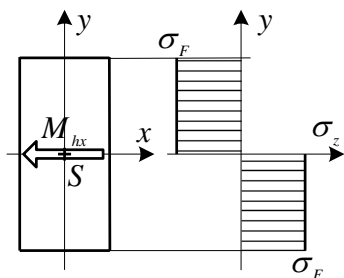
$$F_{Ay} = 9 \text{ kN}.$$

Az igénybevételi ábrák megrajzolása a szokásos módon történik.

Veszélyes keresztmetszet: C

$$|M_{hx \max}| = 20 \text{ kNm}.$$

- A tartó méretezése teherbírásra:



Határnyomaték:

$$M_K = 2 \int_{(A/2)} \sigma_F y dA = 2 \sigma_F \int_{(A/2)} y dA = 2 \sigma_F \underbrace{S_x}_{(A/2)}$$

$S_x$  - a fél keresztmetszet  $x$  tengelyre számított statikai nyomatéka.

$$S_x(A/2) = \int_{(A/2)} y dA = a^2 \frac{a}{2} = \frac{a^3}{2}.$$

$$\text{Hajlítási határnyomaték: } M_K = 2 \int_{(A/2)} \sigma_F y dA = 2 \sigma_F S_x(A/2) = \sigma_F a^3.$$

A tartó megfelel, ha az  $M_{hx \max} \leq \frac{M_K}{n_F}$ , azaz  $M_{hx \max} \leq \frac{\sigma_F a^3}{n_F}$  feltétel teljesül.

$$a \geq \sqrt[3]{\frac{n_F M_{hx \max}}{\sigma_F}} = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 20 \cdot 10^6}{330}} = 49,49 \text{ mm}.$$

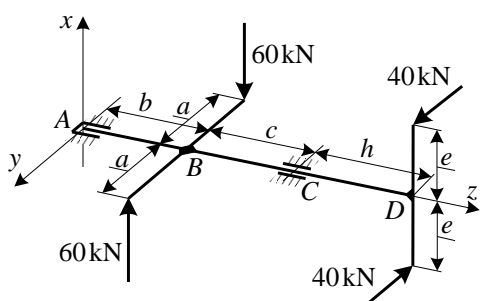
c) A tartó méretezése feszültségcsúcsra:

A tartó megfelel, ha a  $\sigma_{z \max} \leq \frac{\sigma_F}{n_F}$  egyenlőtlenség teljesül:

$$\sigma_{z \max} = \frac{M_{hx \max}}{K_x}, \quad K_x = \frac{a(2a)^2}{6} = \frac{4}{6}a^3 \Rightarrow \frac{6M_{hx \max}}{4a^3} \leq \frac{\sigma_F}{n_F}.$$

$$a \geq \sqrt[3]{\frac{6n_F M_{hx \max}}{4\sigma_F}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 2 \cdot 20 \cdot 10^6}{4 \cdot 330}} = 56,65 \text{ mm}.$$

3.3.2. feladat: Méretezés teherbírásra és feszültségcsúcsra



Adott: A kör keresztmetszetű  $ABCD$  tartószerkezet, melynek jellemző méretei  $a = h = 0,2 \text{ m}$ ,  $b = 0,4 \text{ m}$ ,  $c = 0,5 \text{ m}$ ,  $e = 0,3 \text{ m}$  és  $n_F = 2$ ,  $\tau_F = 160 \text{ MPa}$ .

Feladat:

- Az  $ABCD$  rúdszakasz igénybevételének meghatározása.
- Az  $ABCD$  rúdszakasz méretezése teherbírásra.

c) Az  $ABCD$  rúdszakasz méretezése feszültségcsúcsra.

Kidolgozás:

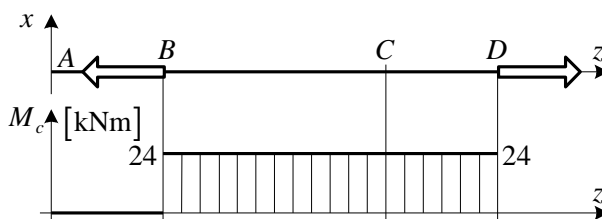
a) Az  $ABCD$  rúdszakasz igénybevételének meghatározása.

A  $B$  pontba redukált nyomaték:  $\vec{M}_B = -(60 \cdot 0,4)\vec{e}_z = (-24\vec{e}_z) \text{ kNm}$ .

A  $D$  pontba redukált nyomaték:  $\vec{M}_D = (40 \cdot 0,6)\vec{e}_z = (24\vec{e}_z) \text{ kNm}$ .

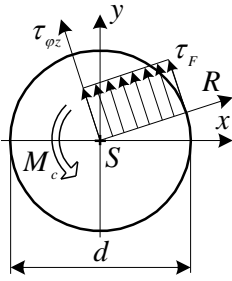
Az  $ABCD$  rúdszakasz tisztán csavarva van!

Veszélyes keresztmetszetek: a  $B-D$  rúdszakasz valamennyi keresztmetszete.  $M_{c \max} = 24 \text{ kNm}$ .



a) Az  $ABCD$  rúdszakasz méretezése teherbírásra:





Feszültségeloszlás határállapotban.

$$\text{Határnyomaték: } M_{cK} = \int (A) R \tau_F dA = \tau_F \underbrace{\int (A) R dA}_{S_P} = \tau_F S_P.$$

$S_P$  - a keresztmetszet  $S$  pontra számított poláris statikai nyomatéka.

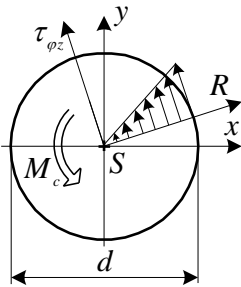
$$S_P = \int (A) r dA = \int_{r=0}^{d/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r r d\varphi dr = 2\pi \int_{r=0}^{d/2} r^2 dr = 2\pi \left[ \frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{d/2} = \frac{d^3 \pi}{12}.$$

$$\text{Csavarási határnyomaték: } M_{cK} = \tau_F S_P = \tau_F \frac{d^3 \pi}{12}.$$

A tartó megfelel, ha az  $M_{c\max} \leq \frac{M_{cK}}{n_F}$ , azaz, ha az  $M_{c\max} \leq \frac{\tau_F d^3 \pi}{12 n_F}$  feltétel teljesül.

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{12 n_F M_{c\max}}{\pi \tau_F}} = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 2 \cdot 24 \cdot 10^6}{\pi 160}} = 104,6 \text{ mm}.$$

c) Az ABCD rúdszakasz méretezése feszültségcsúcsra:



Feszültségeloszlás rugalmas alakváltozás esetén.

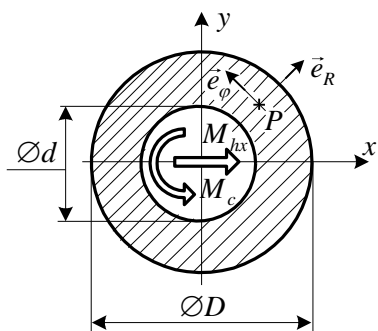
A tartó megfelel, ha a  $\tau_{\max} \leq \frac{\tau_F}{n_F}$  egyenlőtlenség teljesül:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{c\max}}{K_p},$$

$$K_p = \frac{d^3 \pi}{16} \Rightarrow \frac{16 M_{c\max}}{\pi d^3} \leq \frac{\tau_F}{n_F}.$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 n_F M_{c\max}}{\pi \tau_F}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2 \cdot 24 \cdot 10^6}{\pi 160}} = 115,2 \text{ mm}.$$

3.3.3. feladat: Csőtengely méretezése feszültségcsúcsra



Adott: egy körgyűrű keresztmetszetű tartó veszélyes keresztmetszetének igénybevétele:

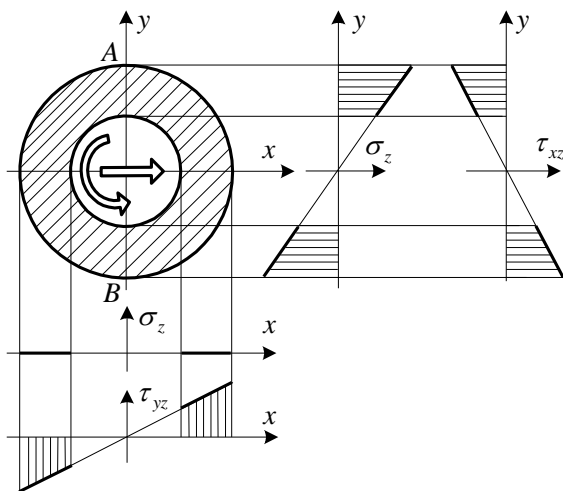
$$\vec{M}_S = (600\vec{e}_x + 800\vec{e}_z) \text{ Nm}, \quad \sigma_{\text{meg}} = 80 \text{ MPa}, \quad D = 2d.$$

Feladat:

- Feszültségeloszlás rajzolása a keresztmetszet  $x$  és  $y$  tengelye mentén, a veszélyes pont(ok) meghatározása.
- A redukált feszültség meghatározása *Coulomb*, *Mohr* és *Huber-Mises-Hencky* szerint.
- A keresztmetszet méretezése *Mohr*-elmélet szerint.

Kidolgozás:

- Feszültségeloszlás megrajzolása a keresztmetszet  $x$  és  $y$  tengelye mentén, a veszélyes pont(ok) meghatározása:



Veszélyes pontok:

- hajlításból az  $A$  és  $B$  pont,
- csavarásból a palást minden pontja,
- hajlításból és csavarásból együttesen az  $A$  és  $B$  pont.

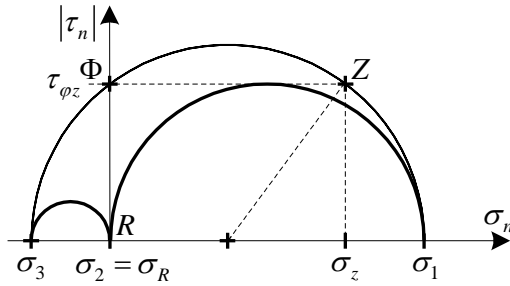
A keresztmetszet méretezését az  $A$ , vagy  $B$  pontbeli redukált feszültség figyelembevételével kell elvégezni.

- A redukált feszültség meghatározása *Coulomb*, *Mohr* és *Huber-Mises-Hencky* szerint:

$$\underline{\underline{F}}_{R,\varphi,z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\varphi z} \\ 0 & \tau_{z\varphi} & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y, \quad \tau_{z\varphi} = \tau_{\varphi z} = \frac{M_c}{I_p} \rho, \quad \text{ahol } I_p = 2I_x.$$

$$\sigma_{z \max} = \frac{M_{hx}}{I_x} \frac{D}{2} = \frac{M_{hx}}{K_x}, \quad \tau_{\varphi z \max} = \frac{M_c}{I_p} \frac{D}{2} = \frac{M_c}{K_p}, \quad K_p = 2K_x.$$

A redukált feszültség *Coulomb* szerint:



$$\sigma_{red}(\text{Coulomb}) = \sigma_1,$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{\varphi z}^2},$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{\varphi z}^2}.$$

$$\sigma_{1\max} = \frac{M_{hx}}{2K_x} + \sqrt{\left(\frac{M_{hx}}{2K_x}\right)^2 + \left(\frac{M_c}{K_p}\right)^2}$$

$$\sigma_{1\max} = \frac{M_{hx}}{2K_x} + \sqrt{\left(\frac{M_{hx}}{2K_x}\right)^2 + \left(\frac{M_c}{K_p}\right)^2} = \frac{1}{2K_x} \left( M_{hx} + \sqrt{M_{hx}^2 + M_c^2} \right) = \frac{M_{red}}{K_p}.$$

A redukált feszültség Mohr és Huber-Mises-Hencky szerint:

$$\sigma_{red}(\text{Mohr}) = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{\varphi z}^2} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{\varphi z}^2}.$$

$$\sigma_{red}(\text{HMH}) = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_3^2 \right]}$$

Behelyettesítés és átalakítás után:  $\sigma_{red}(\text{HMH}) = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_{\varphi z}^2}$

Összefoglalva:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_z^2 + \beta \tau_{\varphi z}^2}, \quad \text{Mohr: } \beta = 4, \quad \text{HMH: } \beta = 3.$$

$$\sigma_{red \max} = \sigma_{red}(A) = \sigma_{red}(B) = \sqrt{\sigma_{z \max}^2 + \beta \tau_{\varphi z \max}^2},$$

$$\sigma_{red \max} = \sqrt{\left(\frac{M_{hx}}{K_x}\right)^2 + \beta \left(\frac{M_c}{K_p}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_{hx}^2 + \frac{\beta}{4} M_c^2}}{K_x} = \frac{M_{red}}{K_x}.$$

Mohr szerint:  $\beta = 4$ :  $M_{red} = \sqrt{M_{hx}^2 + \frac{\beta}{4} M_c^2} = \sqrt{\left(6^2 + \frac{4}{4} 8^2\right)} 10^4 = 1000 \text{ Nm}.$

Huber-Mises-Hencky szerint:  $\beta = 3$ :

$$M_{red} = \sqrt{M_{hx}^2 + \frac{\beta}{4} M_c^2} = \sqrt{\left(6^2 + \frac{3}{4} 8^2\right)} 10^4 = 916,5 \text{ Nm}.$$

c) A keresztmetszet méretezése Mohr-elmélet szerint:

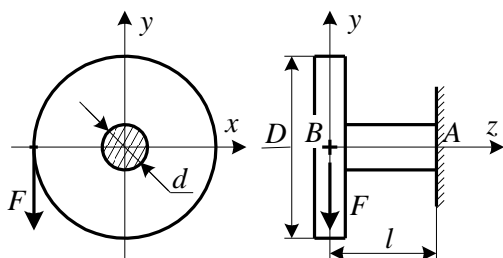
A tartó megfelel, ha  $\sigma_{\text{red max}} \leq \sigma_{\text{meg}}$ ,  $\Rightarrow \frac{M_{\text{red}}}{K_x} \leq \sigma_{\text{meg}} \Rightarrow K_x \geq \frac{M_{\text{red}}}{\sigma_{\text{meg}}}$ .

Mivel  $D = 2d$ , ezért  $K_x = \frac{(D^4 - d^4) \pi}{64} \frac{2}{D} = \frac{(16 - 1) d^4 \pi}{64 d} = \frac{15}{64} d^3 \pi$ .

A méretezési egyenlőtlenségből:  $d \geq \sqrt[3]{\frac{64}{15 \pi} \frac{M_{\text{red}}}{\sigma_{\text{meg}}}} = \sqrt[3]{\frac{64}{15 \pi} \frac{10^6}{80}} = 25,7 \text{ mm}$ ,

Szabványos külső átmérőt választva (MSZ 4337-64):  $D = 60 \text{ mm}$  és  $d = 30 \text{ mm}$ .

### 3.3.4. feladat: Tengely méretezése, ellenőrzése feszültségcsúcsra



Adott:

$F = 800 \text{ N}$ ,  $l = 100 \text{ mm}$ ,

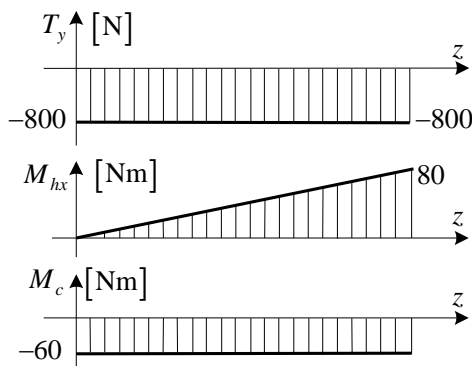
$D = 150 \text{ mm}$ ,  $\sigma_{\text{meg}} = 125 \text{ MPa}$ .

Feladat:

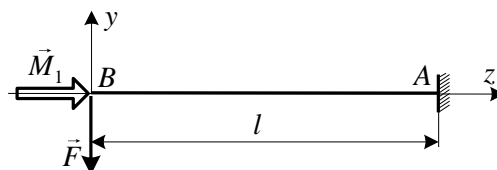
A tengely méretezése feszültségcsúcsra.

Kidolgozás:

Az igénybevételi ábrák megrajzolása:



A terhelés redukciója a tengely középvonalába.

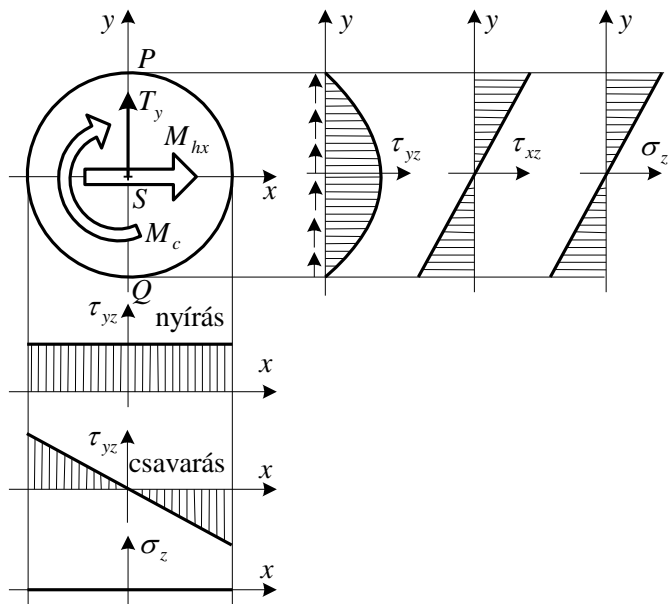


Csavaró nyomaték:

$$M_1 = F \frac{D}{2} = 800 \cdot 0,075 = 60 \text{ Nm}.$$

Veszélyes keresztmetszet: A.

Feszültségeloszlás az A keresztmetszetben:



$$\tau_{yz} = -\frac{T_y S_x(y)}{I_x a(y)},$$

$$\tau_{yz \max} = \frac{4T_y}{3A},$$

$$\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y, \quad \sigma_{z \max} = \frac{M_{hx}}{K_x},$$

$$\tau_{\varphi z} = \frac{M_c}{I_p} \rho, \quad \tau_{\varphi z \max} = \frac{M_c}{K_p},$$

$$I_p = 2I_x, \quad K_p = 2K_x.$$

A veszélyes keresztmetszet veszélyes pontjai a  $P$  és  $Q$  pontok.

Méretezés a  $P$  és  $Q$  pontokban *Mohr* szerint:

A redukált feszültség:  $\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma_z^2 + \beta \tau_{xz}^2}$ , *Mohr*:  $\beta = 4$ .

$$\sigma_{\text{red max}} = \sigma_{\text{red}}(P) = \sigma_{\text{red}}(Q) = \sqrt{\sigma_{z \max}^2 + \beta \tau_{xz \max}^2},$$

$$\sigma_{\text{red max}} = \sqrt{\left(\frac{M_{hx}}{K_x}\right)^2 + \beta \left(\frac{M_c}{K_p}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_{hx}^2 + \frac{\beta}{4} M_c^2}}{K_x} = \frac{M_{\text{red}}}{K_x}.$$

$$\text{Mohr szerint } \beta = 4: \quad M_{\text{red}} = \sqrt{M_{hx}^2 + \frac{\beta}{4} M_c^2} = \sqrt{\left((8 \cdot 10^4)^2 + (6 \cdot 10^4)^2\right)} = 1000 \text{ Nm}.$$

$$\text{A tartó megfelel, ha } \sigma_{\text{red max}} \leq \sigma_{\text{meg}} \Rightarrow \frac{M_{\text{red}}}{K_x} \leq \sigma_{\text{meg}},$$

$$K_x \geq \frac{M_{\text{red}}}{\sigma_{\text{meg}}} = \frac{1000 \cdot 10^3}{125} = 8000 \text{ mm}^3.$$

$$\text{Mivel } K_x \geq \frac{d^3 \pi}{32} \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{32 K_x}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 8000}{\pi}} = \sqrt[3]{8150} = 20,124 \text{ mm}$$

Ellenőrzés az  $S$  pontban *Mohr* szerint:

$$\sigma_{\text{red max}}(S) = \frac{4 T_y}{3 A} \sqrt{4} \leq \sigma_{\text{meg}}, \quad A = \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{20,124^2 \pi}{4} = 318 \text{ mm}^2.$$

$$\sigma_{\text{red max}}(S) = \frac{4 T_y}{3 A} \sqrt{4} = \frac{4 \cdot 800}{3 \cdot 318} \cdot 2 = 6,71 \text{ MPa} \leq \sigma_{\text{meg}} = 125 \text{ MPa}.$$

A tengely szilárdságtani szempontból megfelel!

## 4. RUGALMÁSGTANI EGYENLETEK

Célkitűzés: Olyan rugalmas szerkezeti elemeket, alkatrészeket (azaz a mechanikai szóhasználat szerint testeket) akarunk megvizsgálni szilárdságtani szempontból, méretezni, ellenőrizni, amelyek nem kezelhetők az eddig használt rúdmodellel. A méretezéshez, ellenőrzéshez ismernünk kell a rugalmas test szilárdsági állapotát jellemző mennyiségeket.

Rugalmas test állapotának jellemzői:

- $\vec{u} = \vec{u}(x, y, z)$  elmozdulási vektormező,
- $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(x, y, z)$  alakváltozási tenzormező,
- $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}(x, y, z)$  feszültségi tenzormező,
- $u = u(x, y, z)$  fajlagos alakváltozási energiamező.

Kérdés: milyen általános összefüggések állnak fent ezen állapotjellemzők között?

Válasz: A rugalmasságtani egyenletek.

A rugalmasságtani feladat megfogalmazása:

Adott: - a test alakja és méretei,

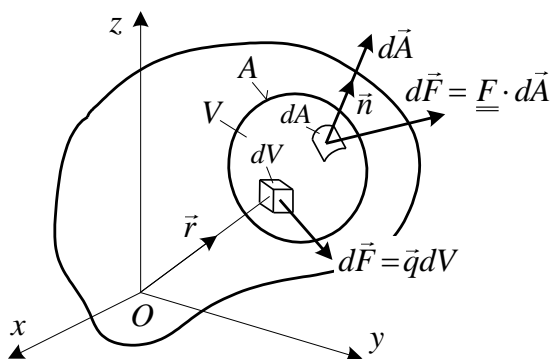
- a test anyagi viselkedését jellemző mennyiségek,

- a terhelés és a megtámasztás.

Keresett:  $\vec{u}$ ,  $\underline{\underline{F}}$ ,  $\underline{\underline{A}}$ ,  $u$ .

Feladat: a rugalmasságtani egyenletek megoldása.

### 4.1. Egyensúlyi egyenletek – feszültségi állapot



A testből kiragadunk egy olyan  $V$  térfogatot, mely teljes egészében a test belsejében van.

A  $V$  térfogat környezetének mechanikai hatásait erőkkel vesszük figyelembe:

- a térfogaton megoszló elemi erő:  $d\vec{F} = \vec{q} dV$ ,

- a felületen megoszló elemi erő:  $d\vec{F} = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} dA$ .

A  $V$  testrész egyensúlyban van.

Az egyensúly feltétele: a)  $\vec{F} = \vec{0}$

b)  $\vec{M}_0 = \vec{0}$ .

a) Egyensúlyi egyenletek:

Az első vektoregyenlet: 
$$\vec{F} = \vec{0} = \int_{(V)} \vec{q} dV + \int_{(A)} \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} dA.$$

*Gauss*<sup>6</sup>-*Osztrogradszkij*<sup>7</sup>-féle integrál átalakítási tétel: 
$$\int_{(A)} \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} dA = \int_{(V)} \underline{\underline{F}} \cdot \nabla dV.$$

A *Hamilton*<sup>8</sup>-féle (vagy nábla) differenciál operátor:

- derékszögű descartesi koordináta-rendszerben (DDKR-ben): 
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z,$$

- henger koordináta-rendszerben (HKR-ben): 
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial R} \vec{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z.$$

Alkalmazva a *Gauss-Osztrogradszkij* tételt: 
$$\vec{F} = \vec{0} = \int_{(V)} (\vec{q} + \underline{\underline{F}} \cdot \nabla) dV.$$

Az integrálnak bármely  $V$  választás esetén el kell tűnnie  $\Rightarrow$  az integrandusz zérus.

*Egyensúlyi egyenlet(ek):* 
$$\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}. \quad (1 \text{ vektor egyenlet} \equiv 3 \text{ darab skalár egyenlet})$$

Az egyensúlyi egyenletben szereplő mennyiségek:

A feszültségi tenzor (diadikus alakja): 
$$\underline{\underline{F}} = \vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z.$$

A térfogaton megoszló terhelés sűrűségvektora: 
$$\vec{q} = q_x \vec{e}_x + q_y \vec{e}_y + q_z \vec{e}_z.$$

A skalár egyensúlyi egyenletek előállítására a DDKR-ben:

$$(\vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) + \vec{q} = \vec{0},$$

$$\frac{\partial \vec{\rho}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\rho}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\rho}_z}{\partial z} + \vec{q} = \vec{0}.$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + q_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + q_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z &= 0 \end{aligned} \right\} \text{az egyensúlyi egyenletek skaláris alakja.}$$

b) A feszültségi tenzor szimmetriája:

<sup>6</sup> Carl Friedrich Gauss (1777-1855) német matematikus.

<sup>7</sup> Mihail Vasziljevics Osztrogradszkij (1801-1862) orosz matematikus.

<sup>8</sup> William Rowan Hamilton (1805-1865) ír matematikus, fizikus és csillagász.

A második vektoregyenlet: 
$$\vec{M}_0 = \vec{0} = \int_{(V)} \vec{r} \times \vec{q} dV + \int_{(A)} \vec{r} \times \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} dA.$$

Átalakítás a Gauss-Osztrogradszkij féle integrál átalakítási tétellel:

$$\vec{0} = \int_{(V)} \left( \vec{r} \times \vec{q} + \vec{r} \times \underline{\underline{F}} \cdot \nabla \right) dV.$$

Az  $\vec{r} \times \underline{\underline{F}}$  kifejezés fölötti  $\downarrow$  nyíl arra utal, hogy a nábla operátor erre a szorzatra hat.

Az integrálnak bármely  $V$  választása esetén el kell tűnnie  $\Rightarrow$  az integrandusz zérus.

A szorzat differenciálását elvégezve: 
$$\vec{0} = \vec{r} \times \underbrace{\left( \vec{q} + \underline{\underline{F}} \cdot \nabla \right)}_{=\vec{0}} + \underline{\underline{F}} \cdot \nabla.$$

A második tag részletezése:

$$\underline{\underline{F}} \cdot \nabla = \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \underline{\underline{F}} \right) \cdot \vec{e}_x + \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \times \underline{\underline{F}} \right) \cdot \vec{e}_y + \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \times \underline{\underline{F}} \right) \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_x \times \vec{\rho}_x + \vec{e}_y \times \vec{\rho}_y + \vec{e}_z \times \vec{\rho}_z = \vec{0}.$$

A feszültségi tenzor vektorinvariánsa: 
$$\vec{F}_x = -\frac{1}{2} (\vec{\rho}_x \times \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \times \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \times \vec{e}_z).$$

*Invariáns:* koordináta-rendszerrel független (koordináta transzformációval szemben változatlan, állandó).

Például az  $\vec{F}_x$  vektor  $x$  irányú koordinátája:

$$\begin{aligned} 0 &= -\vec{F}_x \cdot \vec{e}_x = \frac{1}{2} \left[ \underbrace{(\vec{\rho}_x \times \vec{e}_x) \cdot \vec{e}_x}_{=0 \text{ vegyes szorzat}} + (\vec{\rho}_y \times \vec{e}_y) \cdot \vec{e}_x + (\vec{\rho}_z \times \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_x \right] \\ 0 &= \vec{\rho}_y \cdot \vec{e}_z + \vec{\rho}_z \cdot \vec{e}_y \\ 0 &= -\tau_{zy} + \tau_{yz} \quad \Rightarrow \quad \tau_{zy} = \tau_{yz}. \end{aligned}$$

Ugyanezzel a gondolatmenettel elő lehet állítani az  $\vec{F}_x$  többi koordinátáját is:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

Ezzel bizonyítottuk, hogy az  $\underline{\underline{F}}$  feszültségi tenzor szimmetrikus.

Tétel: Minden szimmetrikus tenzor vektorinvariánsa zérus.

c) Az eredmények összefoglalása:

$$\vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0} \quad - \text{egyensúlyi egyenlet.}$$

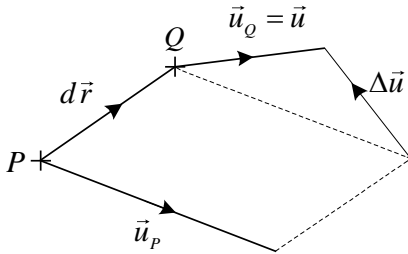
$$\vec{M}_0 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}^T \quad - \text{a feszültségi tenzor szimmetrikus.}$$

*Egyensúlyi egyenletek:* kapcsolat a térfogati terhelés és a belső erőrendszer között.



## 4.2. Kinematikai /geometriai/ kompatibilitási egyenletek

### 4.2.1. Az elmozdulásmező derivált tenzora



A test egy tetszőleges  $P$  pontjának elemi környezetét vizsgáljuk meg.

A  $Q$  a  $P$  pont elemi környezetében helyezkedik el.

$$d\vec{r} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z.$$

Az elmozdulásmező:  $\vec{u} = \vec{u}(x, y, z) = u(x, y, z)\vec{e}_x + v(x, y, z)\vec{e}_y + w(x, y, z)\vec{e}_z.$

$$\Delta\vec{u} = \vec{u}_Q - \vec{u}_P = \vec{u} - \vec{u}_P.$$

Sorfejtés:

$$\vec{u} = \vec{u}_P + \underbrace{\left. \frac{\partial\vec{u}}{\partial x}\right|_P dx + \frac{\partial\vec{u}}{\partial y}\bigg|_P dy + \frac{\partial\vec{u}}{\partial z}\bigg|_P dz}_{\substack{\text{lineáris rész} \\ \vec{u}_x \quad \vec{u}_y \quad \vec{u}_z}} + \underbrace{\left( ( \dots ) \right)}_{\text{magasabb rendű tagok}}$$

Lineáris közelítés esetén a sorfejtésben a magasabb rendű tagokat elhanyagoljuk:  $\Delta\vec{u} \approx d\vec{u}.$

Ha  $dy = dz = 0 \Rightarrow \Delta\vec{u} = \vec{u}_x dx,$

Ha  $dx = dz = 0 \Rightarrow \Delta\vec{u} = \vec{u}_y dy,$

Ha  $dx = dy = 0 \Rightarrow \Delta\vec{u} = \vec{u}_z dz.$

Relatív elmozdulás vektorok:

$$\vec{u}_x = \frac{\partial\vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial v}{\partial x}\vec{e}_y + \frac{\partial w}{\partial x}\vec{e}_z,$$

$$\vec{u}_y = \frac{\partial\vec{u}}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\vec{e}_x + \frac{\partial v}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial w}{\partial y}\vec{e}_z,$$

$$\vec{u}_z = \frac{\partial\vec{u}}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_x + \frac{\partial v}{\partial z}\vec{e}_y + \frac{\partial w}{\partial z}\vec{e}_z.$$

Az elmozdulásmező hely szerinti megváltozása lineáris közelítés esetén:

$$\Delta\vec{u} \approx d\vec{u} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial x}\bigg|_P dx + \frac{\partial\vec{u}}{\partial y}\bigg|_P dy + \frac{\partial\vec{u}}{\partial z}\bigg|_P dz$$

$$= \underbrace{\vec{e}_x \cdot d\vec{r}}_{(\vec{u}_x \circ \vec{e}_x) \cdot d\vec{r}} + \underbrace{\vec{e}_y \cdot d\vec{r}}_{(\vec{u}_y \circ \vec{e}_y) \cdot d\vec{r}} + \underbrace{\vec{e}_z \cdot d\vec{r}}_{(\vec{u}_z \circ \vec{e}_z) \cdot d\vec{r}}$$

$$d\vec{u} = (\vec{u}_x \circ \vec{e}_x + \vec{u}_y \circ \vec{e}_y + \vec{u}_z \circ \vec{e}_z) \cdot d\vec{r} = \left( \frac{\partial\vec{u}}{\partial x} \circ \vec{e}_x + \frac{\partial\vec{u}}{\partial y} \circ \vec{e}_y + \frac{\partial\vec{u}}{\partial z} \circ \vec{e}_z \right) \cdot d\vec{r} = \underline{\underline{D}} \cdot d\vec{r},$$

$$d\vec{u} = \underline{\underline{D}} \cdot d\vec{r}.$$

Az elmozdulásmező derivált tenzora:

$$\underline{\underline{D}} = (\vec{u}_x \circ \vec{e}_x + \vec{u}_y \circ \vec{e}_y + \vec{u}_z \circ \vec{e}_z), \quad \underline{\underline{D}} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \circ \vec{e}_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \circ \vec{e}_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \circ \vec{e}_z.$$

$\underline{\underline{D}} = \vec{u} \circ \nabla$ . Nem szimmetrikus tenzor!

A derivált tenzor mátrixa az  $xyz$  koordináta-rendszerben:

$$[\underline{\underline{D}}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$\vec{u}_x \quad \vec{u}_y \quad \vec{u}_z$

Az elmozdulásmező skaláris koordinátái:

$$u = u(x, y, z),$$

$$v = v(x, y, z),$$

$$w = w(x, y, z).$$

A derivált tenzor felbontása:  $\underline{\underline{D}} = \underbrace{\frac{1}{2}(\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^T)}_{\text{szimmetrikus rész}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}^T)}_{\text{ferdeszimmetrikus rész}}.$

#### 4.2.2. Az alakváltozási tenzor

Az alakváltozási tenzor a derivált tenzor szimmetrikus része:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^T) = \frac{1}{2}(\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u}).$$

Kis alakváltozások esetén ez a tenzoregyenlet a kinematikai/geometriai egyenlet.

Ez az egyenlet az  $\vec{u}$  elmozdulásmező és az  $\underline{\underline{A}}$  alakváltozási (tenzor) mező kapcsolatát adja meg.

Az alakváltozási tenzor elemeinek jelölése:

$$[\underline{\underline{A}}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$\vec{\alpha}_x \quad \vec{\alpha}_y \quad \vec{\alpha}_z$

Szimmetrikus tenzor:  $\gamma_{xy} = \gamma_{yx},$   
 $\gamma_{yz} = \gamma_{zy},$   
 $\gamma_{xz} = \gamma_{zx}.$

Az alakváltozási tenzor koordinátái az értelmezés (a derivált tenzor koordinátái) felhasználásával:

$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

A kinematikai/geometriai egyenletek skaláris alakja:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{xz} &= \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned}$$

#### 4.2.3. A forgató tenzor

A forgató tenzor a derivált tenzor ferdeszimmetrikus része:

$$\underline{\Psi} = \frac{1}{2} (\underline{D} - \underline{D}^T) = \frac{1}{2} (\vec{u} \circ \nabla - \nabla \circ \vec{u}).$$

A forgató tenzor mátrixa: 
$$[\underline{\Psi}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix}.$$

A forgató tenzor az elemi környezet merevtestszerű szögelfordulását jellemzi.

A forgató tenzornak a szilárdságtanban/rugalmasságtanban nincs további szerepe, nem használjuk.

### 4.3. Anyagegyenletek – lineárisan rugalmas anyag

*Anyagegyenlet:* összefüggés az alakváltozási és a feszültségi állapot között.

#### 4.3.1. Az általános Hooke<sup>9</sup>-törvény izotróp anyagra

$$\begin{aligned} \alpha) \underline{A} &= \frac{1}{2G} \left( \underline{F} - \frac{\nu F_I}{1 + \nu} \underline{E} \right), \\ \beta) \underline{F} &= 2G \left( \underline{A} + \frac{\nu A_I}{1 - 2\nu} \underline{E} \right), \end{aligned} \quad \text{ahol } \left. \begin{array}{l} G - \text{csúsztató rugalmassági modulus} \\ \nu - \text{Poisson tényező} \end{array} \right\} \text{anyagjellemzők.}$$

<sup>9</sup> Robert Hooke (1635-1703) angol természettudós.

A feszültségi/alakváltozási tenzor első skalár invariánsai:

$$F_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad A_I = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

*Invariáns* egy mennyiség, ha a koordináta-transzformációval szemben változatlan, állandó.

Az  $\alpha$ ) alak skaláris egyenletei:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2G} \left[ \sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right], & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{yx}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2G} \left[ \sigma_y - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{2G} \left[ \sigma_z - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right], & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G}. \end{aligned}$$

A  $\beta$ ) alak skaláris egyenletei:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left[ \varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right], & \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= 2G \left[ \varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right], & \tau_{yz} &= G \gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= 2G \left[ \varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right], & \tau_{xz} &= G \gamma_{xz}. \end{aligned}$$

Más anyagállandók bevezetése:

a) Egyszerű *Hooke*- törvény – egytengelyű feszültségi állapot (húzás-nyomás/hajlítás):

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \quad \text{ahol } \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_z.$$



Egyszerű *Hooke*-törvény:  $\sigma_z = E \varepsilon_z$ .

Általános *Hooke*-törvény:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= 2G \left[ \varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] = \\ &= 2G \left[ \varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (-\nu\varepsilon_z - \nu\varepsilon_z + \varepsilon_z) \right] = 2G [\varepsilon_z + \nu\varepsilon_z] = 2G[1+\nu]\varepsilon_z. \end{aligned}$$

A két alakot összevetve:  $2G = \frac{E}{1+\nu}$ , vagy  $E = 2G(1+\nu)$ ,

ahol  $E$  a *Young*<sup>10</sup>-féle rugalmassági modulus.

<sup>10</sup> Thomas Young (1773-1829) angol természettudós.

b) Összefüggés az első skalár invariánsok között:

$$A_I = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{2G} \left[ \underbrace{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}_{F_I} - 3 \frac{\nu}{1+\nu} F_I \right] \Rightarrow A_I = \frac{1}{2G} \frac{1-2\nu}{1+\nu} F_I = \frac{1}{3K} F_I.$$

$K$  – térfogati rugalmassági modulus (nem független anyagállandó).

$$3K = 2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} = \frac{E}{1-2\nu}.$$

c) Fajlagos térfogatváltozás:

$$\frac{dV}{V} = \frac{(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z) - 1 \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot 1} \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = A_I.$$

( $\approx$  jelentése: lineáris közelítés esetén)

Lineárisan rugalmas, izotróp anyag anyagállandói:  $E, \nu, G, K$  – ezek közül kettő független.

*Megjegyzés:*  $A_{di} = 0, F_{di} = 0$ , mert a deviátor tenzorok a test tiszta torzulását jellemzik.

Az izotróp anyagra vonatkozó általános Hooke-törvény felírása mátrix alakban:

Kiindulva a Hooke-törvény  $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2G} \left[ \underline{\underline{F}} - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \underline{\underline{E}} \right]$  alakjából és felhasználva az  $\frac{1}{2G} = \frac{1+\nu}{E}$

összefüggést:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1+\nu}{E} \left[ \sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right] = \frac{1}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma_y - \frac{\nu}{E} \sigma_z, & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1+\nu}{E} \left[ \sigma_y - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right] = \frac{1}{E} \sigma_y - \frac{\nu}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma_z, & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1+\nu}{E} \left[ \sigma_z - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right] = \frac{1}{E} \sigma_z - \frac{\nu}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma_y, & \gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \tau_{xz}. \end{aligned}$$

Az alakváltozási és a feszültségi tenzor független koordinátáit oszlopmátrixba rendezve kapjuk a törvény mátrixos alakját.

Az általános Hooke-törvény mátrixos alakban:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & & & \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & & & \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & & & \\ & & & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix}$$

Tömören:  $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\sigma}}$ , ahol  $\underline{\underline{C}}$  az anyagi jellemzők/anyagállandók mátrixa.

#### 4.3.2. Az általános Hooke-törvény ortotróp anyagra

Anizotróp anyag: az anyagi tulajdonságok (viselkedés) iránytól függő.

*Pl.*: faanyag, hosszú szálaszással erősített műanyag, stb.

Ortotróp anyag: az anizotróp anyag speciális esete, az anyagi viselkedés egymásra merőleges irányokban vett anyagi jellemzőkkel leírható.

*Pl.*: egy irányban futó, párhuzamos hosszú szákkal erősített műanyag.

Azért foglalkozunk ezzel az esettel, mert a gyakorlatban elterjedt szálerősítésű műanyag kompozitok közül sok ezzel az anyagmodellel leírható.

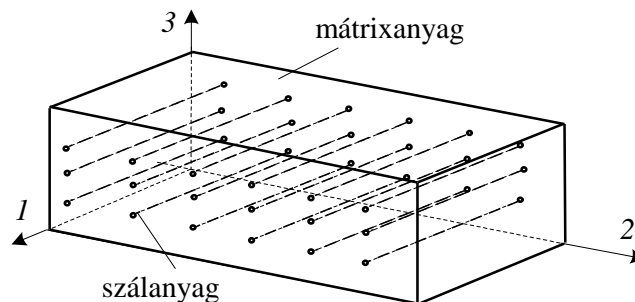
Kompozit anyag: többféle, eltérő tulajdonságú anyagból összetett anyag.

Részei: - erősítés (üvegszál, szénszál, aramid szál, stb.),

- mátrix (ágyazó anyag: epoxi, poliészter, poliamid, stb.)

Tapasztalat: a kompozit anyag sok esetben jobb mechanikai tulajdonságokkal rendelkezik, mint az alkotórészei.

Fő előnyök: nagy szilárdság, kis tömegsűrűség (önsúly), korrózió állóság, stb.



1, 2, 3 a kompozit anyagi főirányai (az anyag természetes/anyagi koordináta-rendszere).

Valóság: az anyag nem homogén (a szálak és a mátrix anyaga eltérő tulajdonságú).

Mechanikai modell: Egy olyan homogén, ortotróp anyag, amely nem alkalmas a szálakban, vagy a mátrixban fellépő mechanikai jellemzők (alakváltozások, feszültségek) meghatározására, hanem csak a kompozit anyag egy olyan kisebb tartományának átlagos jellemzői határozhatók meg vele, amelyben eleghetően sok szál van.

Áltános Hooke-törvény ortotróp anyagra:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & & & \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & & & \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & & & \\ & & & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{bmatrix}$$

$E_1, E_2, E_3$  – az 1, 2, 3 irányú húzáshoz tartozó rugalmassági modulus,   
 $G_{12}, G_{23}, G_{31}$  – a csúsztató rugalmassági modulusok,   
 $\nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{31}$  – a Poisson – tényezők.

*Például:*  $\nu_{12}$  – az 1 irányú húzáshoz tartozó 2 irányú kontrakció :  $\varepsilon_2 = -\nu_{12} \varepsilon_1$ .

$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\sigma}}$ . Az ortotróp Hooke-törvény mátrixos felírás esetén formailag ugyanolyan alakban írható fel, mint az izotróp Hooke-törvény.

Az anyag törvény izotróp és ortotróp esetre formailag azonos, különbség a  $\underline{\underline{C}}$  anyag-állandó mátrix tartalmában van.

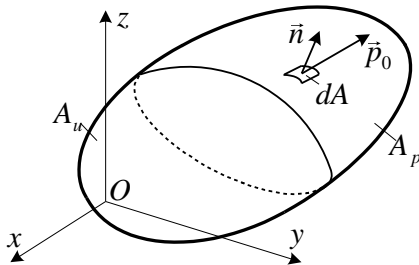
Közös tulajdonság:  $\underline{\underline{C}}$  szimmetrikus mátrix (energetikai okokból következően).

Szimmetria:  $\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}$ ,  $\frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2}$ ,  $\frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1}$ .

A lineárisan rugalmas ortotróp anyag viselkedése 9 független anyagállandóval írható le:

$E_1, E_2, E_3 \mid \nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{13} \mid G_{12}, G_{23}, G_{13}$ .

#### 4.4. Peremfeltételek



Dinamikai peremfeltétel:  $\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{p}}_0$  az  $A_p$  - n.

Kinematikai peremfeltétel:  $\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}}_0$  az  $A_u$  -n.

A  $\underline{\underline{p}}_0$  ismert felületi terhelés.

$A_p$  - a test felületének az a része, ahol a felületi terhelés ismert.

Az  $\underline{\underline{u}}_0$  ismert elmozdulás.

$A_u$  - a test felületének az a része, ahol az elmozdulás ismert.

#### 4.5. A rugalmasságtan egyenletrendszere

$$\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \underline{\underline{q}} = \underline{\underline{0}} \quad \text{egyensúlyi egyenlet (3 db).}$$

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{u}} \circ \nabla + \nabla \circ \underline{\underline{u}}) \quad \text{kompatibilitási egyenlet (6 db).}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\sigma}} \quad \text{anyagegyenlet (6 db).}$$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{n}}|_{A_p} = \underline{\underline{p}}_0 \quad \text{dinamikai} \\ \underline{\underline{u}}|_{A_u} = \underline{\underline{u}}_0 \quad \text{kinematikai} \end{array} \right\} \text{peremfeltételek} \quad \begin{array}{l} (3 \text{ db}), \\ (3 \text{ db}). \end{array}$$

Ismeretlenek:  $\underline{\underline{u}}(x, y, z)$ ,  $\underline{\underline{A}}(x, y, z)$ ,  $\underline{\underline{F}}(x, y, z)$ .

Bebizonyítható: a rugalmasságtan egyenletrendszerének adott peremfeltételek mellett egy és csakis egy megoldása létezik (egzisztencia és unicitás).

Egzakt megoldás: A keresett  $\underline{\underline{u}}$ ,  $\underline{\underline{A}}$ ,  $\underline{\underline{F}}$  mezők az egyenletrendszer és a peremfeltételek minden egyenletét kielégítik.

Közelítő megoldás: A keresett  $\underline{\underline{u}}$ ,  $\underline{\underline{A}}$ ,  $\underline{\underline{F}}$  mezők az egyenletrendszer és a peremfeltételek nem minden egyenletét elégítik ki.

#### 4.6. A kompatibilitási egyenlet más alakjai

Az  $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{u}} \circ \nabla + \nabla \circ \underline{\underline{u}})$  geometriai egyenletből indulunk ki.

Átalakítás: szorzás jobbról és balról vektoriálisan  $\nabla$ -val  $\Rightarrow$  *Saint-Venant*-féle kompatibilitási egyenlet.

##### 4.6.1. A Saint-Venant – féle kompatibilitási egyenlet

$$\nabla \times \underline{\underline{A}} \times \nabla = \underline{\underline{0}} \quad (\text{tenzor egyenlet}).$$

A skalár egyenletek levezetése DDKR-ben:

a) Az  $\underline{\underline{A}} \times \nabla$  kifejezés előállítás:

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{\alpha}}_x \circ \underline{\underline{e}}_x + \underline{\underline{\alpha}}_y \circ \underline{\underline{e}}_y + \underline{\underline{\alpha}}_z \circ \underline{\underline{e}}_z, \text{ és } \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \underline{\underline{e}}_x + \frac{\partial}{\partial y} \underline{\underline{e}}_y + \frac{\partial}{\partial z} \underline{\underline{e}}_z.$$

A levezetésnél felhasználjuk az  $(\vec{a} \circ \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})$  azonosságot.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}} \times \nabla &= (\underline{\underline{\alpha}}_x \circ \underline{\underline{e}}_x + \underline{\underline{\alpha}}_y \circ \underline{\underline{e}}_y + \underline{\underline{\alpha}}_z \circ \underline{\underline{e}}_z) \times \left( \frac{\partial}{\partial x} \underline{\underline{e}}_x + \frac{\partial}{\partial y} \underline{\underline{e}}_y + \frac{\partial}{\partial z} \underline{\underline{e}}_z \right) = \\ &= \left[ \frac{\partial \underline{\underline{\alpha}}_x}{\partial y} \circ \underline{\underline{e}}_z + \frac{\partial \underline{\underline{\alpha}}_x}{\partial z} \circ (-\underline{\underline{e}}_y) \right] + \left[ \frac{\partial \underline{\underline{\alpha}}_y}{\partial x} \circ (-\underline{\underline{e}}_z) + \frac{\partial \underline{\underline{\alpha}}_y}{\partial z} \circ \underline{\underline{e}}_x \right] + \left[ \frac{\partial \underline{\underline{\alpha}}_z}{\partial x} \circ \underline{\underline{e}}_y + \frac{\partial \underline{\underline{\alpha}}_z}{\partial y} \circ (-\underline{\underline{e}}_x) \right]. \end{aligned}$$

A kifejezést átrendezve:



$$\underline{\underline{A}} \times \nabla = \left( \frac{\partial \vec{\alpha}_y}{\partial z} - \frac{\partial \vec{\alpha}_z}{\partial y} \right) \circ \vec{e}_x + \left( \frac{\partial \vec{\alpha}_z}{\partial x} - \frac{\partial \vec{\alpha}_x}{\partial z} \right) \circ \vec{e}_y + \left( \frac{\partial \vec{\alpha}_x}{\partial y} - \frac{\partial \vec{\alpha}_y}{\partial x} \right) \circ \vec{e}_z.$$

b) Szorzás vektoriálisan balról  $\nabla$ -val.

A *Saint-Venant* tenzor-egyenlet bal oldalán álló kifejezés mínusz egyszerűsítését jelöljük  $\underline{\underline{\eta}}$ -val.

Az  $\underline{\underline{\eta}} = -\nabla \times \underline{\underline{A}} \times \nabla$  tenzor mátrixának első oszlopába az  $\underline{\underline{\eta}} \cdot \vec{e}_x = -\nabla \times \left( \frac{\partial \vec{\alpha}_y}{\partial z} - \frac{\partial \vec{\alpha}_z}{\partial y} \right)$  vektor

koordinátái kerülnek. Az oszlopmátrix előállítás:

$$\begin{aligned} -\nabla \times \left( \frac{\partial \vec{\alpha}_y}{\partial z} - \frac{\partial \vec{\alpha}_z}{\partial y} \right) &= \left( \frac{\partial^2 \vec{\alpha}_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \vec{\alpha}_z}{\partial y \partial x} \right) \times \vec{e}_x + \left( \frac{\partial^2 \vec{\alpha}_y}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \vec{\alpha}_z}{\partial y^2} \right) \times \vec{e}_y + \left( \frac{\partial^2 \vec{\alpha}_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \vec{\alpha}_z}{\partial y \partial z} \right) \times \vec{e}_z = \\ &= \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial x} \right) \underbrace{(\vec{e}_y \times \vec{e}_x)}_{-\vec{e}_z} + \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y \partial x} \right) \underbrace{(\vec{e}_z \times \vec{e}_x)}_{\vec{e}_y} + \\ &+ \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} \right) \underbrace{(\vec{e}_x \times \vec{e}_y)}_{\vec{e}_z} + \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} \right) \underbrace{(\vec{e}_z \times \vec{e}_y)}_{-\vec{e}_x} + \\ &+ \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial z} \right) \underbrace{(\vec{e}_x \times \vec{e}_z)}_{-\vec{e}_y} + \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \right) \underbrace{(\vec{e}_y \times \vec{e}_z)}_{\vec{e}_x}. \end{aligned}$$

Az átalakítások során felhasználtuk az  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$  azonosságot.

A kifejezés tagjainak átcsoportosítása után:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\eta}} \cdot \vec{e}_x &= \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y \partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial z} \right) \vec{e}_y + \\ &+ \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial x} \right) \vec{e}_z. \end{aligned}$$

Hasonló számítások eredményeképpen kapjuk az  $\underline{\underline{\eta}} = -\nabla \times \underline{\underline{A}} \times \nabla$  tenzor második és harmadik oszlopát:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\eta}} \cdot \vec{e}_y &= \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y \partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial y} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} \right) \vec{e}_y + \\ &+ \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial x \partial z} \right) \vec{e}_z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta \cdot \vec{e}_z &= \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial y \partial x} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z \partial x} \right) \vec{e}_y + \\ &+ \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} \right) \vec{e}_z. \end{aligned}$$

A *Saint-Venant* féle kompatibilitási tenzor egyenlet szerint a fenti oszlopok minden koordinátája nullával egyenlő. Ez a kilenc egyenlet a *Saint-Venant* féle kompatibilitási tenzor egyenlet skaláris alakja DDKR-ben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y \partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial z} &= 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial x} &= 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y \partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial x \partial z} &= 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial y \partial x} &= 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z \partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned}$$

Az alakváltozási tenzor szimmetriáját figyelembe véve, hat egymástól különböző skaláris-egyenlet marad:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}, & \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}, & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}, \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}, & \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

### Megjegyzés:

Ez hat egyenlet megszorításokat jelent az alakváltozási tenzor koordinátáira nézve. Azt jelenti, hogy az alakváltozási tenzor koordinátái nem függetlenek egymástól.

Ha figyelembe vesszük az  $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}(\nabla \circ \vec{u} + \vec{u} \circ \nabla)$  összefüggést, akkor az egyenletek azonosságá alakulnak. Tehát a *Saint-Venant*-féle kompatibilitási egyenlet fizikai tartalma megegyezik a 4.2.2.pontban felírt geometriai/kinematikai egyenletek tartalmával.

Átalakítás: a *Saint-Venant* egyenlet + izotróp *Hooke*-törvény + egyensúlyi egyenletek  $\Rightarrow$  *Beltrami*<sup>11</sup>-*Michell*<sup>12</sup>-féle kompatibilitási egyenlet.

### 4.6.2. A Beltrami-Michell-féle kompatibilitási egyenlet

$$\Delta \underline{\underline{F}} + \frac{1}{1+\nu} F_I \nabla \circ \nabla + \nabla \circ \vec{q} + \vec{q} \circ \nabla + \frac{\nu}{1-\nu} (\vec{q} \cdot \nabla) \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{0}} \quad (\text{tenzor egyenlet}).$$

*Laplace*<sup>13</sup>-féle differenciál operátor:  $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

A skalár egyenletek levezetése DDKR-ben:

$$\Delta \underline{\underline{F}} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \underline{\underline{F}}, \quad \vec{q} \cdot \nabla = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z},$$

$$\nabla \circ \nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{bmatrix},$$

$$\nabla \circ \vec{q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_x & q_y & q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial q_x}{\partial x} & \frac{\partial q_y}{\partial x} & \frac{\partial q_z}{\partial x} \\ \frac{\partial q_x}{\partial y} & \frac{\partial q_y}{\partial y} & \frac{\partial q_z}{\partial y} \\ \frac{\partial q_x}{\partial z} & \frac{\partial q_y}{\partial z} & \frac{\partial q_z}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (\nabla \circ \vec{q}) = (\vec{q} \circ \nabla)^T.$$

<sup>11</sup> Eugenio Beltrami (1835-1900) olasz matematikus.

<sup>12</sup> John Henry Michell (1863-1940) ausztrál matematikus.

<sup>13</sup> Pierre-Simon de Laplace (1749-1829) francia matematikus, csillagász és fizikus.

$$\vec{q} \circ \nabla = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial q_x}{\partial x} & \frac{\partial q_x}{\partial y} & \frac{\partial q_x}{\partial z} \\ \frac{\partial q_y}{\partial x} & \frac{\partial q_y}{\partial y} & \frac{\partial q_y}{\partial z} \\ \frac{\partial q_z}{\partial x} & \frac{\partial q_z}{\partial y} & \frac{\partial q_z}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

A skaláregyenleteket a kijelölt differenciálások elvégzésével kapjuk.

A feszültségi tenzor diagonális elemeihez kapcsolódó három skaláregyenlet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial q_z}{\partial z} + \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) &= 0. \end{aligned}$$

A feszültségi tenzor főátlón kívüli elemeihez kapcsolódó hat skaláregyenlet valójában csak három különböző egyenlet a feszültségi tenzor szimmetriája miatt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial x \partial y} + \frac{\partial q_y}{\partial x} + \frac{\partial q_x}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial x \partial z} + \frac{\partial q_z}{\partial x} + \frac{\partial q_x}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial y \partial z} + \frac{\partial q_y}{\partial z} + \frac{\partial q_z}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

## 4.7. Gyakorló feladatok a rugalmasságtani egyenletekre

### 4.7.1. feladat: Rugalmas test elmozdulási és alakváltozási állapota

Adott: A rugalmas test elmozdulási állapota az  $\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(x, y, z)$  függvénnyel, továbbá a test  $P$  pontjának  $\vec{r}_p$  helyvektora.

$$\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(x, y, z) = u(x, y, z) \vec{e}_x + v(x, y, z) \vec{e}_y + w(x, y, z) \vec{e}_z,$$

$$u = -\nu xy / R, \quad v = (\nu x^2 - \nu y^2 - z^2) / (2R), \quad w = yz / R,$$

$$R = 10 \text{ m}, \quad \nu = 0,25, \quad \vec{r}_p = (4\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + 5\vec{e}_z) \text{ mm}.$$

Feladat: a) A  $\underline{\underline{D}}(x, y, z)$  derivált, az  $\underline{\underline{A}}(x, y, z)$  alakváltozási és a  $\underline{\underline{\Psi}}(x, y, z)$  forgató tenzor mátrixának meghatározása.

b) A  $P$  pontbeli alakváltozási tenzor mátrixának meghatározása és szemléltetése az elemi triéderen.

c) Az  $\varepsilon_n$  fajlagos nyúlás és a  $\gamma_{mn}$  fajlagos szögváltozás meghatározása, ha

$$\bar{e}_n = \left( 0,5\bar{e}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{e}_y \right) \text{ és } \bar{e}_m = \left( \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{e}_x + 0,5\bar{e}_y \right).$$

Kidolgozás:

a) A  $\underline{\underline{D}}(x, y, z)$  derivált, az  $\underline{\underline{A}}(x, y, z)$  alakváltozási és a  $\underline{\underline{\Psi}}(x, y, z)$  forgató tenzor mátrixának meghatározása:

*Az elmozdulásmező derivált tenzora:*

$$\underline{\underline{D}} = (\bar{u}_x \circ \bar{e}_x + \bar{u}_y \circ \bar{e}_y + \bar{u}_z \circ \bar{e}_z) = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \circ \bar{e}_x + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \circ \bar{e}_y + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \circ \bar{e}_z = \bar{u} \circ \nabla.$$

$$[\underline{\underline{D}}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{v}{R}y & -\frac{v}{R}x & 0 \\ \frac{v}{R}x & -\frac{v}{R}y & -\frac{1}{R}z \\ 0 & \frac{1}{R}z & \frac{1}{R}y \end{bmatrix} \quad \text{- nem szimmetrikus tenzor.}$$

A derivált tenzor a  $P(x, y, z)$  pont elemi környezetének relatív, fajlagos elmozdulási állapotát jellemzi.

*Az alakváltozási tenzor:*

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^T) = \frac{1}{2}(\bar{u} \circ \nabla + \nabla \circ \bar{u}) \quad (\text{a derivált tenzor szimmetrikus része}).$$

$$[\underline{\underline{A}}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix},$$

$$[\underline{\underline{A}}] = \begin{bmatrix} -\frac{v}{R}y & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{v}{R}y & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R}y \end{bmatrix}.$$

Az alakváltozási tenzor a  $P(x, y, z)$  pont elemi környezetének alakváltozását jellemzi.

*A forgató tenzor:*

$$\underline{\underline{\Psi}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}^T) = \frac{1}{2}(\bar{u} \circ \nabla - \nabla \circ \bar{u}) \quad (\text{a derivált tenzor ferde szimmetrikus része}).$$

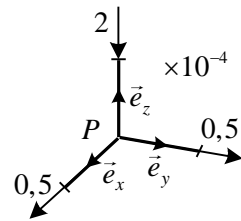
$$\underline{\underline{[\Psi]}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\nu}{R} x & 0 \\ \frac{\nu}{R} x & 0 & -\frac{1}{R} z \\ 0 & \frac{1}{R} z & 0 \end{bmatrix}$$

A forgató tenzor a  $P(x,y,z)$  pont elemi környezetének merevtestszerű szögelfordulását jellemzi.

b) A  $P$  pontbeli alakváltozási tenzor mátrixának meghatározása és szemléltetése az elemi triéderen:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -\frac{\nu}{R} y = -\frac{0,25}{10} (-0,002) = 0,5 \cdot 10^{-4}, & \gamma_{xy} &= \gamma_{yx} = \frac{\tau_{yx}}{G} = 0, \\ \varepsilon_y &= -\frac{\nu}{R} y = -\frac{0,25}{10} (-0,002) = 0,5 \cdot 10^{-4}, & \gamma_{yz} &= \gamma_{zy} = \frac{\tau_{yz}}{G} = 0, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{R} y = \frac{1}{10} (-0,002) = -2 \cdot 10^{-4}, & \gamma_{xz} &= \gamma_{zx} = \frac{\tau_{xz}}{G} = 0. \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{[A_P]}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \tau_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} 10^{-4}.$$



c) Az  $\varepsilon_n$  fajlagos nyúlás és a  $\gamma_{mn}$  fajlagos szögváltozás meghatározása:

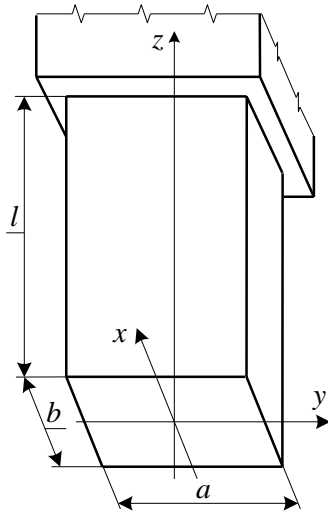
$$\vec{\alpha}_n = \underline{\underline{[A_P]}} \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 0 \end{bmatrix} 10^{-4} = \begin{bmatrix} 0,25 \\ -\sqrt{3}/4 \\ 0 \end{bmatrix} 10^{-4}.$$

A fajlagos nyúlás:

$$\varepsilon_n = \vec{\alpha}_n \cdot \vec{e}_n = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0,25 \\ -\sqrt{3}/4 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 & -\sqrt{3}/2 & 0 \end{bmatrix} = \left( 0,125 + \frac{3}{8} \right) \cdot 10^{-4} = 0,5 \cdot 10^{-4}.$$

$$\text{A fajlagos szögváltozás: } \frac{1}{2} \gamma_{mn} = \vec{\alpha}_n \cdot \vec{e}_m = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0,25 \\ -\sqrt{3}/4 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

4.7.2. feladat: Rugalmasságtani egyenletek – húzott rúd



Adott:

Az ábrán látható hasáb alakú (mechanikai szempontból rúd-  
nak is tekinthető) rugalmas, önsúlyával terhelt test  
elmozdulásmezőjének skaláris koordinátái:

$$u = -\nu \rho g x z / E, \quad v = -\nu \rho g y z / E,$$

$$w = -\frac{\rho g}{2E} [l^2 - z^2 - \nu(x^2 + y^2)].$$

$E$  - az anyag rugalmassági modulusa,  $\nu$  - Poisson tényező,  
 $\rho$  - a test anyagának tömegsűrűsége,  $g$  - gravitációs gyors.,  
 $a, b, l$  - a test méretei.

Ezeket az elmozdulási koordinátákat a rúdelmélet (húzott -  
nyomott prizmatikus rúd) felhasználásával kapjuk.

Feladat: A rugalmasságtani egyenletek teljesülésének ellenőrzése.

Kidolgozás:

a) Az alakváltozási tenzor előállítás:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\nu \rho g z / E, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \rho g z / E, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \rho g z / E.$$

$$\gamma_{xy} = \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, \quad \gamma_{yz} = \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0, \quad \gamma_{xz} = \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0.$$

$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nu \rho g z / E & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \rho g z / E & 0 \\ 0 & 0 & \rho g z / E \end{bmatrix}.$$

A geometriai egyenletek teljesülnek, mert ezek felhasználásával állítottuk elő az alakváltozási tenzort.

b) Az általános Hooke-törvény alkalmazása, a feszültségi tenzor előállítás:

$$A_I = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = (1-2\nu) \frac{\rho g z}{E}, \quad E = 2G(1+\nu).$$

$$\sigma_x = 2G \left[ \varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] = 0, \quad \tau_{xy} = G \gamma_{xy} = 0,$$

$$\sigma_y = 2G \left[ \varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] = 0, \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz} = 0,$$

$$\sigma_z = 2G \left[ \varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] = \rho g z, \quad \tau_{xz} = G \gamma_{xz} = 0.$$

$$\underline{\underline{F}}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho g z \end{bmatrix}.$$

A rúdelméletből:  $\sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{\rho g V}{A} = \frac{\rho g(abz)}{ab} = \rho g z$ .  $\Rightarrow$  Az anyagegyenletek teljesülnek.

c) Egyensúlyi egyenlet teljesülésének ellenőrzése:  $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$ .

$$\vec{q} = q_z \vec{e}_z = -\rho g \vec{e}_z$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + q_x = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + q_y = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z = 0 + 0 + \rho g - \rho g = 0. \Rightarrow \text{Valamennyi egyensúlyi egyenlet teljesül.}$$

d) A kinematikai peremfeltételek teljesülése:

A  $z=l$  egyenletű felületen:  $\vec{u} = \vec{0}$ .

$$u = -\nu \rho g x l / E, \quad v = -\nu \rho g y l / E, \quad w = \frac{\nu \rho g}{2E} (x^2 + y^2),$$

Ez a feltétel csak az  $x = y = 0$  pontban teljesül.

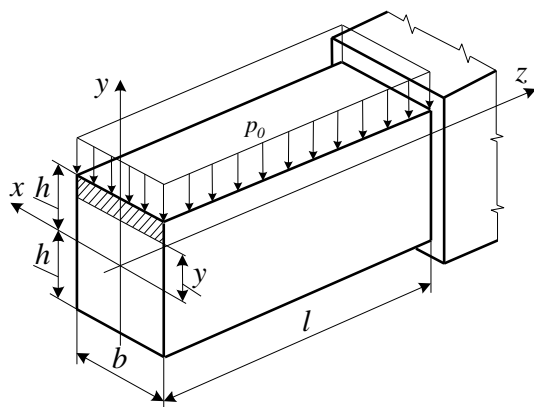
e) Dinamikai peremfeltételek teljesülése:

A  $z=0$  felület terheletlen és  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ ,  $\sigma_z = 0$  teljesül.

Az  $x = \pm \frac{b}{2}$  felületek szintén terheletlenek és  $\underline{\underline{F}} \cdot (\pm \vec{e}_x) = \pm \vec{\rho}_x = \vec{0}$  teljesül.

Az  $y = \pm \frac{a}{2}$  felületek is terheletlenek és  $\underline{\underline{F}} \cdot (\pm \vec{e}_y) = \pm \vec{\rho}_y = \vec{0}$  teljesül.

#### 4.7.3. feladat: Rugalmasságtani egyenletek – hajlított, nyírt rúd



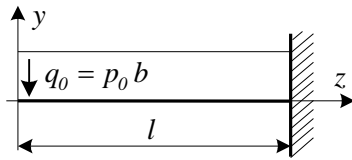
Adott: Az ábrán látható hasáb alakú (mechanikai szempontból rúdnak is tekinthető) rugalmas test geometriai méretei és terhelése:  $h, b, l, p_0$ .

Feladat: Annak ellenőrzése, hogy a rúdelmélettel kapott megoldás kielégíti-e az egyensúlyi egyenletet és a peremfeltételeket.

Kidolgozás:



a) A feszültségi állapot meghatározása a rúd elméletből:



terhelés:  $q_0 = p_0 b$ ,

$$\text{nyíróerő: } T_y(z) = -\int_0^z q_0 d\zeta = -p_0 b z,$$

$$\text{hajlító nyomaték: } M_{hx} = -\int T_y dz = -\frac{1}{2} p_0 b z^2.$$

A feszültségi tenzor:

$$\underline{\underline{F}}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

$$\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y = \frac{3p_0}{4h^3} z^2 y, \quad I_x = \frac{b(2h)^3}{12} = \frac{2bh^3}{3}.$$

$$\tau_{yz} = -\frac{T_y S_x(y)}{I_x b} = \frac{3p_0}{4h^3} (h^2 - y^2) z,$$

$$S_x(y) = b(h-y) \frac{h+y}{2} = \frac{b}{2} (h^2 - y^2).$$

b) Egyensúlyi egyenlet teljesülésének ellenőrzése:  $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$ .

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + q_x = 0 + 0 + 0 + 0 \equiv 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + q_y = 0 + 0 + \frac{3p_0}{4h^3} (h^2 - y^2) + 0 = 0.$$

Ez a skalár egyenlet csak az  $y = \pm h$  egyenletű felületeken teljesül.

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z = 0 - \frac{3p_0 y z}{2h^3} + \frac{3p_0 y z}{2h^3} + 0 \equiv 0.$$

c) Dinamikai peremfeltételek teljesülésének ellenőrzése:

$$\text{Az } x = \pm \frac{b}{2} \text{ felületen } \underline{\underline{F}} \cdot (\pm \vec{e}_x) \Big|_{x=\pm \frac{b}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ - a felületek terheletlen}$$

volta éppen ezt jelenti.

$$\text{A } z=0 \text{ felületen } \underline{\underline{F}} \cdot (-\vec{e}_z) \Big|_{z=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Big|_{z=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau_{yz}(z=0) \\ -\sigma_z(z=0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ - a felület}$$

terheletlen volta éppen ezt jelenti.

$$\text{Az } y = \pm h \text{ felületeken: } \underline{\underline{F}} \cdot (\pm \vec{e}_y) \Big|_{y=\pm h} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \pm \tau_{zy} \Big|_{y=\pm h} \vec{e}_z = \vec{0}.$$

Ez csak  $y = -h$  esetén teljesíti a dinamikai peremfeltételt, amennyiben a tartó alsó felülete valóban terheletlen. A felső felület esetén ( $y = +h$ ) ugyanis  $\underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_y \Big|_{y=h} = -p_0 \vec{e}_y$  esetén teljesülne a dinamikai peremfeltétel.

Mivel egy skaláris egyensúlyi egyenlet és egy skaláris dinamikai peremfeltételi egyenlet nem teljesül, ezért a rúdelmélet alapján előállított megoldás rugalmasságtani szempontból nem egzakt, hanem közelítő.

#### 4.7.4. feladat: Rugalmasságtani egyenletek

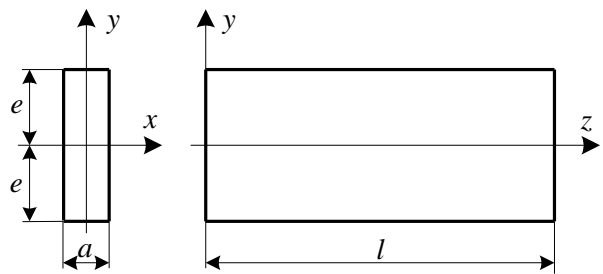
Adott: Az ábrán látható keskeny téglalap keresztmetszetű rúd feszültségmezője:

$$\sigma_y = -\frac{3p_0}{4e^3} \left(1 - \frac{z}{l}\right) \left(e^2 y - \frac{1}{3} y^3 + \frac{2}{3} e^3\right),$$

$$\sigma_z = \frac{3p_0}{4e^3} \left(z^2 - \frac{1}{3} \frac{z^3}{l}\right) y,$$

$$\tau_{yz} = \frac{3p_0}{4e^3} \left(z - \frac{1}{2} \frac{z^2}{l}\right) (e^2 - y^2),$$

$$\sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{zx} = 0.$$



Feladat:

- Az egyensúlyi egyenlet teljesülésének vizsgálata  $\vec{q} = \vec{0}$  esetén.
- A rúd terhelésének, illetve támasztóerő rendszerének meghatározása a dinamikai peremfeltételekből.
- Annak vizsgálata, hogy a megadott feszültségmező lehet-e valamely rugalmasságtani feladat egzakt megoldása, ha  $\vec{q} = \vec{0}$ .

Kidolgozás:

- Az egyensúlyi egyenlet teljesülésének vizsgálata  $\vec{q} = \vec{0}$  esetén:

Ha a térfogati terhelés a rúd minden pontján zérus, akkor az  $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$  egyensúlyi egyenlet az  $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla = \vec{0}$  alakra egyszerűsödik.

A vizsgálandó skaláregyenletek a következők:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0.$$

Az első skaláregyenlet azonnal teljesül, hiszen a benne szereplő feszültségkoordináták azonosan egyenlők nullával.

A második skaláregyenlet is teljesül tetszőleges pontban:

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 - \frac{3p_0}{4e^3} \left(1 - \frac{z}{l}\right) (e^2 - y^2) + \frac{3p_0}{4e^3} \left(1 - \frac{z}{l}\right) (e^2 - y^2) = 0.$$

Ugyanezt láthatjuk a harmadik skaláregyenlet esetén, ugyanis:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 - 2y \frac{3p_0}{4e^3} \left(z - \frac{z^2}{2l}\right) + \frac{3p_0}{4e^3} y \left(2z - \frac{z^2}{l}\right) = 0.$$

Az egyensúlyi egyenlet tehát a rúd minden pontjában teljesül.

- b) A rúd terhelésének, illetve támasztóerő-rendszerének meghatározása a dinamikai peremfeltételekből:

Mivel térfogati erő nem hat és a feszültségeloszlás folytonos függvényekkel leírható, a rúdra ható terhelés és a támasztóerő rendszer is felületen megoszló erőként jelentkezik. Ennek számítása a felületi feszültségállapot vizsgálatával lehetséges. Ki kell számítani a rudat határoló hat téglalap felületen a feszültségeket.

Az  $\pm \vec{e}_x$  normálisú felületek terheletlenek, ugyanis  $\sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{zx} = 0$ , vagyis  $\vec{\rho}_x = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_x = \vec{0}$ .

Az  $\vec{e}_y$  normálisú felület (a rúd „felső lapja”) az  $y = e$  helyettesítéssel áll elő.

$$\sigma_y = -\frac{3p_0}{4e^3} \left(1 - \frac{z}{l}\right) \left(e^3 - \frac{1}{3}e^3 + \frac{2}{3}e^3\right) = -p_0 \left(1 - \frac{z}{l}\right)$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = \frac{3p_0}{4e^3} \left(z - \frac{1}{2} \frac{z^2}{l}\right) (e^2 - e^2) = 0, \quad \tau_{xy} = 0$$

A negatív normál feszültség összenyomást jelent, a felületet tehát  $\vec{p} = -p_0 \left(1 - \frac{z}{l}\right) \vec{e}_y$  sűrűségű, felületen megoszló erő terheli.

A  $-\vec{e}_y$  normálisú felület (a rúd „alsó lapja”) az  $y = -e$  helyettesítéssel áll elő.

$$\sigma_y = -\frac{3p_0}{4e^3} \left(1 - \frac{z}{l}\right) \left(-e^3 + \frac{1}{3}e^3 + \frac{2}{3}e^3\right) = 0$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = \frac{3p_0}{4e^3} \left(z - \frac{1}{2} \frac{z^2}{l}\right) (e^2 - e^2) = 0, \quad \tau_{xy} = 0. \text{ Ez a felület terheletlen.}$$

Az  $\vec{e}_z$  normálisú felület a  $z = l$  helyettesítéssel áll elő.

$$\sigma_z = \frac{3p_0}{4e^3} \left(l^2 - \frac{1}{3} \frac{l^3}{l}\right) y = \frac{p_0 l^2}{2e^3} y$$

$$\tau_{yz} = \frac{3p_0}{4e^3} \left(l - \frac{1}{2} \frac{l^2}{l}\right) (e^2 - y^2) = \frac{3lp_0}{8e^3} (e^2 - y^2), \quad \tau_{xz} = 0.$$

A  $-\vec{e}_z$  normálisú felület a  $z = 0$  helyettesítéssel áll elő.

$\sigma_z = 0, \tau_{yz} = 0, \tau_{xz} = 0$ . A felület terheletlen.

c) Annak vizsgálata, hogy a megadott feszültségmező lehet-e valamely rugalmasságtani feladat egzakt megoldása, ha  $\vec{q} = \vec{0}$ :

Egzakt megoldás esetén a fentiekén kívül teljesülnie kell a *Beltrami–Michell*-féle kompatibilitási egyenleteknek is.

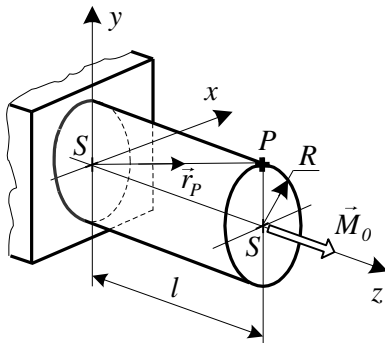
Ezek skaláris alakja  $\vec{q} = \vec{0}$  esetén:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial x^2} &= 0, & \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial y^2} &= 0, & \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial x \partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial z^2} &= 0, & \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial y \partial z} &= 0. \end{aligned}$$

A deriválásokat (fenti sorrendben/elrendezésben) elvégezve a következő egyenletekre jutunk:

$$\begin{aligned} 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ \frac{6yp_0}{4e^3} \left(1 - \frac{z}{l}\right) + \frac{1}{1+\nu} \frac{6yp_0}{4e^3} \left(1 - \frac{z}{l}\right) &= 0, & 0 &= 0, \\ \frac{3p_0}{4e^3} \left(2 - \frac{2z}{l}\right) + \frac{1}{1+\nu} \frac{3p_0}{4e^3} \left(2 - \frac{2z}{l}\right) &= 0, \\ -2 \frac{3p_0}{4e^3} \left(z - \frac{z^2}{2l}\right) - \frac{3p_0}{4e^3 l} (e^2 - y^2) + \frac{1}{1+\nu} \frac{3p_0}{4e^3} \left[ \left(\frac{e^2}{l} + \frac{2}{3l} y^2\right) + \left(2z - \frac{z^2}{l}\right) \right] &= 0. \end{aligned}$$

#### 4.7.5. feladat: Rugalmasságtani egyenletek – elmozdulási, alakváltozási és feszültségi állapot



Adott:

Egy kör keresztmetszetű rúd geometriai méretei és csúsztató rugalmassági modulusa, a csavarásakor az elmozdulás vektormező az  $\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(x, y, z)$  függvénnyel, továbbá a test  $P$  pontjának  $\vec{r}_P$  helyvektora.

$$\vec{u}(x, y, z) = (-\mathcal{G} z y) \vec{e}_x + (\mathcal{G} x z) \vec{e}_y, \quad \mathcal{G} = 0,1 \text{ rad/m},$$

$$R = 0,01 \text{ m}, \quad G = 80 \text{ GPa}, \quad l = 0,1 \text{ m}, \quad \vec{M}_0 = M_0 \vec{e}_z,$$

$$\vec{r}_P = (0,01 \vec{e}_y + 0,1 \vec{e}_z) \text{ m}.$$

Feladat: a) Az  $\underline{\underline{A}}(x, y, z)$  alakváltozási tenzor mátrixának meghatározása.

b) A rúd térfogatváltozásának meghatározása.

- c) Az  $\vec{r}_p$  helyvektorú  $P$  pontban a főnyúlások és az  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  alakváltozási főirányok meghatározása. A  $P$  pontbeli alakváltozási állapot szemléltetése.
- d) A  $P$  pontbeli feszültségi állapot meghatározása.

Kidolgozás:

- a) Az  $\underline{\underline{A}}(x, y, z)$  alakváltozási tenzor mátrixának meghatározása:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^T) = \frac{1}{2}(\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u}),$$

A kijelölt deriválásokat elvégezve:  $[\underline{\underline{A}}] = \frac{1}{2} \mathcal{G} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -y \\ 0 & 0 & x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}.$

A  $P$  pontban:  $[\underline{\underline{A}}_P] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \cdot 10^{-4} \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

- b) A rúd térfogatváltozásának meghatározása:

A relatív térfogatváltozás az alakváltozási tenzor determinánsával egyenlő. (Kis alakváltozások esetén közelíthető az  $A_1$  első skalár invariánsal is.)

$$\frac{\Delta V}{V} = \det[\underline{\underline{A}}] = 0, \text{ tehát az alakváltozás során nincs térfogatváltozás.}$$

- c) Az  $\vec{r}_p$  helyvektorú  $P$  pontban a főnyúlások és az  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  alakváltozási főirányok meghatározása. A  $P$  pontbeli alakváltozási állapot szemléltetése:

A sajátérték feladat kitűzése és a karakterisztikus egyenlet:

$$\begin{bmatrix} -\varepsilon_e & 0 & -5 \cdot 10^{-4} \\ 0 & -\varepsilon_e & 0 \\ -5 \cdot 10^{-4} & 0 & -\varepsilon_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \varepsilon_e^3 - 25 \cdot 10^{-8} \varepsilon_e = 0.$$

A főnyúlások, vagyis a karakterisztikus egyenlet (harmadfokú algebrai egyenlet) megoldásai:  $\varepsilon_1 = 5 \cdot 10^{-4}, \varepsilon_2 = 0, \varepsilon_3 = -5 \cdot 10^{-4}.$

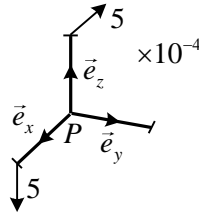
Az  $\vec{e}_1$  főirány meghatározása:

$$10^{-4} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & 0 \\ -5 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \\ e_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -5e_{1x} - 5e_{1z} = 0 \\ -5e_{1y} = 0 \\ -5e_{1x} - 5e_{1z} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} -e_{1z} = e_{1x} \\ e_{1y} = 0 \end{array} \Rightarrow \vec{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_x - \vec{e}_z).$$

Az  $\vec{e}_2$  főirány meghatározása:  $\vec{e}_2 = \vec{e}_y.$

Az  $\vec{e}_3$  főirány meghatározása:  $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_x - \vec{e}_z) \times \vec{e}_y = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_x + \vec{e}_z).$

Szemléltetés az elemi triéderen:



d) A  $P$  pontbeli feszültségi állapot meghatározása:

Az általános *Hooke*-törvény:  $\underline{\underline{F}} = 2G \left( \underline{\underline{A}} + \frac{\nu A_I}{1 - 2\nu} \underline{\underline{E}} \right)$ .

Ebből a feszültségi tenzor nem zérus koordinátái:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = 2G \frac{1}{2} \gamma_{xz} = 2 \cdot 80 \cdot 10^9 \cdot (-5 \cdot 10^{-4}) = -80 \cdot 10^6 = -80 \text{ MPa}$$

A feszültségi tenzor:  $\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -80 \\ 0 & 0 & 0 \\ -80 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$

#### 4.7.6. feladat: Rugalmasságtani egyenletek – az alakváltozási tenzor felírása henger koordináta-rendszerben

Adott: Az  $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} (\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u})$  kinematikai egyenlet.

Feladat: Az  $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} (\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u})$  kinematikai egyenlet skaláris egyenleteinek levezetése az  $R\varphi z$  henger koordináta-rendszerben.

Kidolgozás:

A  $\nabla$  nabla differenciáloperátor henger-koordinátarendszerben:  $\nabla = \frac{\partial}{\partial R} \vec{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$ .

Az  $\vec{u}$  elmozdulásmező henger koordináta-rendszerben  $\vec{u} = u \vec{e}_R + v \vec{e}_\varphi + w \vec{e}_z$ .

A derivált tenzor:  $\underline{\underline{D}} = \vec{u} \circ \nabla = (u \vec{e}_R + v \vec{e}_\varphi + w \vec{e}_z) \circ \left( \frac{\partial}{\partial R} \vec{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right)$ .

A henger-koordinátarendszerben a bázisvektorok egy része nem független a helytől:

$$\vec{e}_R = \vec{e}_R(\varphi), \quad \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi(\varphi), \quad \vec{e}_z = \text{állandó}.$$

Ezért henger-koordinátarendszerben a bázisvektorok helykoordináták szerinti deriváltjai – szemben a *Descartes*-féle derékszögű koordinátarendszerrel – nem mind egyenlők nullával:

$$\frac{\partial \vec{e}_R}{\partial R} = \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial R} = \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial R} = \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \varphi} = \frac{\partial \vec{e}_R}{\partial z} = \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial z} = \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z} = \vec{0}, \text{ de } \frac{\partial \vec{e}_R}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi, \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{e}_R.$$

A kijelölt diadikus szorzás elvégzésénél ezt figyelembe véve:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{D}} &= (u\vec{e}_R + v\vec{e}_\varphi + w\vec{e}_z) \circ \left( \frac{\partial}{\partial R}\vec{e}_R + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z \right) = \\
&= \frac{\partial u}{\partial R}\vec{e}_R \circ \vec{e}_R + \frac{\partial v}{\partial R}\vec{e}_\varphi \circ \vec{e}_R + \frac{\partial w}{\partial R}\vec{e}_z \circ \vec{e}_R + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\vec{e}_R \circ \vec{e}_\varphi + \frac{1}{R}u\frac{\partial\vec{e}_R}{\partial\varphi} \circ \vec{e}_\varphi + \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi \circ \vec{e}_\varphi + \\
&\quad \vec{e}_\varphi \\
&\quad + \frac{1}{R}v\frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\varphi} \circ \vec{e}_\varphi + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\vec{e}_z \circ \vec{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_R \circ \vec{e}_z + \frac{\partial v}{\partial z}\vec{e}_\varphi \circ \vec{e}_z + \frac{\partial w}{\partial z}\vec{e}_z \circ \vec{e}_z. \\
&\quad -\vec{e}_R
\end{aligned}$$

Az azonos diádokat összevonva:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{D}} &= \frac{\partial u}{\partial R}\vec{e}_R \circ \vec{e}_R + \frac{\partial v}{\partial R}\vec{e}_\varphi \circ \vec{e}_R + \frac{\partial w}{\partial R}\vec{e}_z \circ \vec{e}_R + \left( \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\varphi} - \frac{v}{R} \right)\vec{e}_R \circ \vec{e}_\varphi + \left( \frac{u}{R} + \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial\varphi} \right)\vec{e}_\varphi \circ \vec{e}_\varphi + \\
&\quad + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\vec{e}_z \circ \vec{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_R \circ \vec{e}_z + \frac{\partial v}{\partial z}\vec{e}_\varphi \circ \vec{e}_z + \frac{\partial w}{\partial z}\vec{e}_z \circ \vec{e}_z
\end{aligned}$$

Ebből az elmozdulásmező derivált tenzorának mátrixa:

$$[\underline{\underline{D}}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial R} & \left( \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\varphi} - \frac{v}{R} \right) & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial R} & \left( \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial\varphi} + \frac{u}{R} \right) & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial R} & \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\varphi} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad - \text{ nem szimmetrikus tenzor.}$$

Az alakváltozási tenzor:  $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^T)$ , vagyis a derivált tenzor szimmetrikus része:

$$[\underline{\underline{A}}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial R} & \frac{1}{2R}\left( \frac{\partial u}{\partial\varphi} - v + R\frac{\partial v}{\partial R} \right) & \frac{1}{2}\left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial R} \right) \\ \frac{1}{2R}\left( \frac{\partial u}{\partial\varphi} - v + R\frac{\partial v}{\partial R} \right) & \frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial\varphi} & \frac{1}{2R}\left( R\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial\varphi} \right) \\ \frac{1}{2}\left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial R} \right) & \frac{1}{2R}\left( R\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial\varphi} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

4.7.7. feladat: Rugalmasságtani egyenletek – az egyensúlyi egyenletek felírása henger koordináta-rendszerben

**Adott:** Az  $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$  egyensúlyi egyenlet.

**Feladat:** Az  $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$  egyensúlyi egyenlet skaláris egyenleteinek meghatározása az  $R\varphi z$  henger-koordinátarendszerben.

Kidolgozás:

A  $\nabla$  differenciáloperátor henger-koordináta-rendszerben:  $\nabla = \frac{\partial}{\partial R} \vec{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$ ,

A  $\underline{\underline{F}}$  feszültségi tenzor henger-koordináta-rendszerben:  $\underline{\underline{F}} = \vec{\rho}_R \circ \vec{e}_R + \vec{\rho}_\varphi \circ \vec{e}_\varphi + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z$ .

A henger-koordináta-rendszerben a bázisvektorok egy része nem független a helytől:

$$\vec{e}_R = \vec{e}_R(\varphi), \quad \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi(\varphi), \quad \vec{e}_z = \text{állandó}.$$

Ezért henger-koordináta-rendszerben a bázisvektorok helykoordináták szerinti deriváltjai – szemben a *Descartes*-féle derékszögű koordináta-rendszerrel – nem mind egyenlők nullával:

$$\frac{\partial \vec{e}_R}{\partial R} = \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial R} = \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial R} = \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \varphi} = \frac{\partial \vec{e}_R}{\partial z} = \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial z} = \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z} = \vec{0}, \quad \text{de} \quad \frac{\partial \vec{e}_R}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi, \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{e}_R.$$

Az  $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla$  skaláris szorzás elvégzése:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}} \cdot \nabla &= (\vec{\rho}_R \circ \vec{e}_R + \vec{\rho}_\varphi \circ \vec{e}_\varphi + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial R} \vec{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) = \\ &= \frac{\partial \vec{\rho}_R}{\partial R} \circ \vec{e}_R \cdot \vec{e}_R + \frac{\partial \vec{\rho}_\varphi}{\partial R} \circ \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_R + \frac{\partial \vec{\rho}_z}{\partial R} \circ \vec{e}_z \cdot \vec{e}_R + \\ &\quad = 1 \quad = 0 \quad = 0 \\ &+ \frac{1}{R} \frac{\partial \vec{\rho}_R}{\partial \varphi} \circ \vec{e}_R \cdot \vec{e}_\varphi + \frac{1}{R} \vec{\rho}_R \circ \frac{\partial \vec{e}_R}{\partial \varphi} \cdot \vec{e}_\varphi + \frac{1}{R} \frac{\partial \vec{\rho}_\varphi}{\partial \varphi} \circ \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + \frac{1}{R} \vec{\rho}_\varphi \circ \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} \cdot \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \vec{\rho}_z}{\partial \varphi} \circ \vec{e}_z \cdot \vec{e}_\varphi + \\ &\quad = 0 \quad = \underbrace{\vec{e}_\varphi}_{=1} \quad = 1 \quad = \underbrace{-\vec{e}_R}_{=0} \quad = 0 \\ &+ \frac{\partial \vec{\rho}_R}{\partial z} \circ \vec{e}_R \cdot \vec{e}_z + \frac{\partial \vec{\rho}_\varphi}{\partial z} \circ \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_z + \frac{\partial \vec{\rho}_z}{\partial z} \circ \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z. \\ &\quad = 0 \quad = 0 \quad = 1 \end{aligned}$$

A diadikus és a skaláris szorzás asszociativitását és a bázisvektorok merőlegességét figyelembe véve:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}} \cdot \nabla &= \frac{\partial \vec{\rho}_R}{\partial R} + \frac{1}{R} \vec{\rho}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial \vec{\rho}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{\rho}_z}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial \sigma_R}{\partial R} \vec{e}_R + \frac{\partial \tau_{\varphi R}}{\partial R} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \tau_{zR}}{\partial R} \vec{e}_z + \frac{1}{R} \sigma_R \vec{e}_R + \frac{1}{R} \tau_{\varphi R} \vec{e}_\varphi + \frac{1}{R} \tau_{zR} \vec{e}_z + \\ &+ \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{R\varphi}}{\partial \varphi} \vec{e}_R + \frac{1}{R} \tau_{R\varphi} \frac{\partial \vec{e}_R}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{1}{R} \sigma_\varphi \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial \varphi} \vec{e}_z + \\ &\quad = \vec{e}_\varphi \quad = -\vec{e}_R \\ &+ \frac{\partial \tau_{Rz}}{\partial z} \vec{e}_R + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \vec{e}_z. \quad / \cdot \vec{e}_R \quad / \cdot \vec{e}_\varphi \quad / \cdot \vec{e}_z \end{aligned}$$

A bázisvektorokkal való skaláris szorzás eredményeképpen, a  $\vec{q}$  térfogati erőssűrűség megfelelő skaláris koordinátájának figyelembe vételével a következő skaláris egyenleteket kapjuk:



$$\frac{\partial \sigma_R}{\partial R} + \frac{1}{R} \left[ \sigma_R + \frac{\partial \tau_{R\varphi}}{\partial \varphi} - \sigma_\varphi \right] + \frac{\partial \tau_{Rz}}{\partial z} + q_R = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{\varphi R}}{\partial R} + \frac{1}{R} \left[ \tau_{\varphi R} + \tau_{R\varphi} + \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + q_\varphi = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{zR}}{\partial R} + \frac{1}{R} \left[ \tau_{zR} + \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z = 0.$$