

6. A RUGALMASSÁGTAN 2D FELADATAI

A 2D rövidítés jelentése: két dimenziós.

A 2D feladatok közös jellemzői:

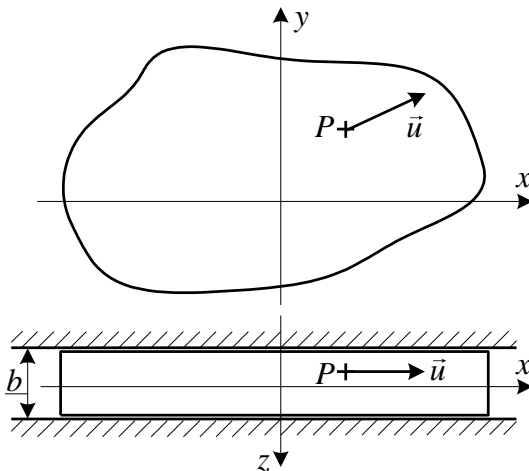
- két skalár elmozdulásmező különbözik nullától,
- minden mechanikai mennyiség két helykoordinátától függ.

A 2D feladatok típusai:

- sík alakváltozási feladatok (SA),
 - általánosított síkfeszültségi feladatok (ÁSF),
- } síkfeladatok,
- forgásszimmetrikus/tengelyszimmetrikus feladatok (FSZ).

6.1. Sík alakváltozási feladat (SA)

Definíció: Sík alakváltozásról beszélünk, ha a vizsgált testnek van egy kitüntetett síkja, amellyel párhuzamos valamennyi sík alakváltozása azonos és a síkok távolsága sem változik.



Az elmozdulásmező:

$$\vec{u}(x, y) = u(x, y)\vec{e}_x + v(x, y)\vec{e}_y.$$

Az elmozdulásmező skaláris koordinátái:

$$u = u(x, y),$$

$$v = v(x, y),$$

$$w \equiv 0.$$

Ilyen alakváltozás akkor alakul ki, ha teljesülnek az alábbi feltételek.

Feltételek:

- A kitüntetett síkra merőleges b méret lényegesen nagyobb, mint a másik kettő.
Például: vastagfalú cső, alagút, a folyó gátja, stb.
- A terhelés párhuzamos a kitüntetett síkkal és a legnagyobb kiterjedés (a z tengely) irányában nem változik.
- A síkok távolságának változatlanságát külső kényszer biztosítja (ezt az ábrán sraffozott a vonal jelöli).

Alakváltozási állapot:

$$[\underline{\underline{A}}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(x, y).$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x(x, y), \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y(x, y), \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma_{xy}(x, y)$$

Feszültségi állapot (az általános Hooke-törvényből):

$$\sigma_x(x, y) = 2G \left[\varepsilon_x + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{1 - 2\nu} \right] \nu, \quad \sigma_y(x, y) = 2G \left[\varepsilon_y + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{1 - 2\nu} \right] \nu,$$

$$\tau_{xy}(x, y) = G \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1 + 2\nu)} \gamma_{xy}, \quad \varepsilon_z = 0 \Rightarrow \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y),$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}(x, y) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

A Hooke-törvény másik alakja:

$$\varepsilon_x(x, y) = \frac{1}{2G} [\sigma_x + \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \quad \varepsilon_y(x, y) = \frac{1}{2G} [\sigma_y + \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \quad \gamma_{xy}(x, y) = \frac{\tau_{xy}}{G}.$$

Egyensúlyi egyenletek:

DDKR

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + q_x = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + q_y = 0.$$

HKR

$$\frac{\partial \sigma_R}{\partial R} + \frac{\sigma_R - \sigma_\varphi}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{R\varphi}}{\partial \varphi} + q_R = 0,$$

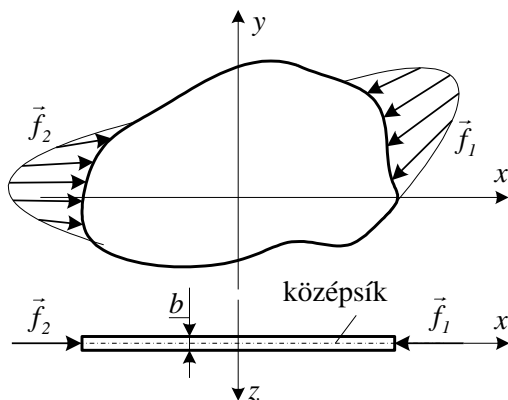
$$\frac{\partial \tau_{\varphi R}}{\partial R} + 2 \frac{\tau_{\varphi R}}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + q_\varphi = 0.$$

A 3. egyensúlyi egyenletből következik, hogy $q_z \equiv 0$.

6.2. Általánosított sík feszültségi feladat (ÁSF)

Elnevezés: Általános sík feszültségi feladat \equiv tárcsa feladat \equiv a saját síkjában terhelte lemez feladata.

Tárcsa: Olyan test, melynek egyik mérete lényegesen kisebb mint a másik kettő, értelmezhető középsík és a terhelés vastagság mentén vett eredője a középsíkba esik.

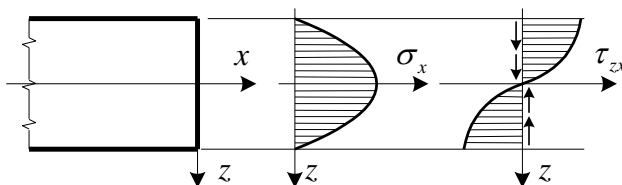


Feltételezések:

- $b \ll$ a test más jellemző méreteinél,
- a $z = 0$ középfelület sík,
- a terhelésben nincsenek z irányú erők,
- az xy síkkal párhuzamos erők vastagság-menti eredője az xy síkba esik,
- a $z = \pm b/2$ felületek terheletlenek.

A feszültségekre vonatkozó feltételezések:

- a $z = \pm b/2$ felületek terheletlenek $\Rightarrow \sigma_z|_{z = \pm b/2} = 0$,
- ha a b méret kicsi, akkor $\sigma_z \approx 0$ nemcsak a felületeken, hanem a többi helyen is fennáll.



- a $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ a z helykoordináta páros függvényei,
- a τ_{zx}, τ_{zy} a z helykoordináta páratlan függvényei.

Átlagos feszültségek bevezetése:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{1}{b} \int_{(b)} \sigma_x dz, \quad \bar{\sigma}_y = \frac{1}{b} \int_{(b)} \sigma_y dz, \quad \bar{\tau}_{xy} = \frac{1}{b} \int_{(b)} \tau_{xy} dz,$$

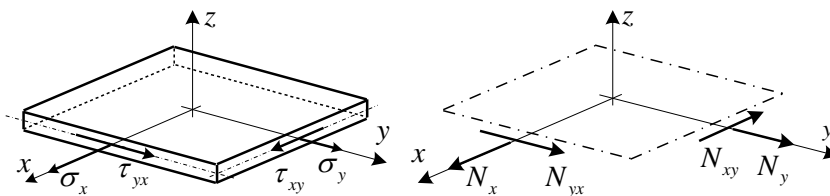
$$\bar{\sigma}_z = \frac{1}{b} \int_{(b)} \sigma_z dz = 0, \quad \bar{\tau}_{xz} = \frac{1}{b} \int_{(b)} \tau_{xz} dz = 0, \quad \bar{\tau}_{yz} = \frac{1}{b} \int_{(b)} \tau_{yz} dz = 0.$$

Az átlagfeszültségi tenzor: $[\underline{\underline{F}}] = [\underline{\underline{F}}(x, y)] = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_x & \bar{\tau}_{xy} & 0 \\ \bar{\tau}_{yx} & \bar{\sigma}_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Felületi feszültségek/élerők bevezetése: $N_x = b\bar{\sigma}_x, N_y = b\bar{\sigma}_y, N_{xy} = b\bar{\tau}_{xy}.$

A felületi feszültségi tenzor: $[\underline{\underline{N}}] = [\underline{\underline{N}}(x, y)] = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} & 0 \\ N_{yx} & N_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

A feszültségi állapot szemléltetése:



Az általános Hooke-törvény:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\bar{\epsilon}_x + \nu \bar{\epsilon}_y), \quad \bar{\sigma}_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\bar{\epsilon}_y + \nu \bar{\epsilon}_x), \quad \bar{\tau}_{xy} = G \bar{\gamma}_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \bar{\gamma}_{xy}.$$

$$\bar{\sigma}_z = 0 \Rightarrow \bar{\epsilon}_z = -\frac{\nu}{1-\nu} (\bar{\epsilon}_x + \bar{\epsilon}_y), \quad \bar{\tau}_{xz} = \bar{\tau}_{yz} = 0.$$

Átlagos alakváltozások:

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{1}{b} \int (b) \varepsilon_x dz, \quad \bar{\varepsilon}_y = \frac{1}{b} \int (b) \varepsilon_y dz, \quad \bar{\gamma}_{xy} = \frac{1}{b} \int (b) \gamma_{xy} dz, \quad \bar{\varepsilon}_z = -\frac{v}{1-\nu} (\bar{\varepsilon}_x + \bar{\varepsilon}_y).$$

Az átlagos alakváltozási tenzor:
$$[\underline{\underline{A}}] = [\underline{\underline{A}}(x, y)] = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_x & \frac{1}{2} \bar{\gamma}_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2} \bar{\gamma}_{yx} & \bar{\varepsilon}_y & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\varepsilon}_z \end{bmatrix}.$$

Átlagos elmozdulások:
$$\bar{u}(x, y) = \frac{1}{b} \int (b) u dz, \quad \bar{v}(x, y) = \frac{1}{b} \int (b) v dz, \quad \bar{w} = 0.$$

Egyensúlyi egyenletek:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial \varphi} + \bar{q}_x = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \bar{q}_y = 0.$$

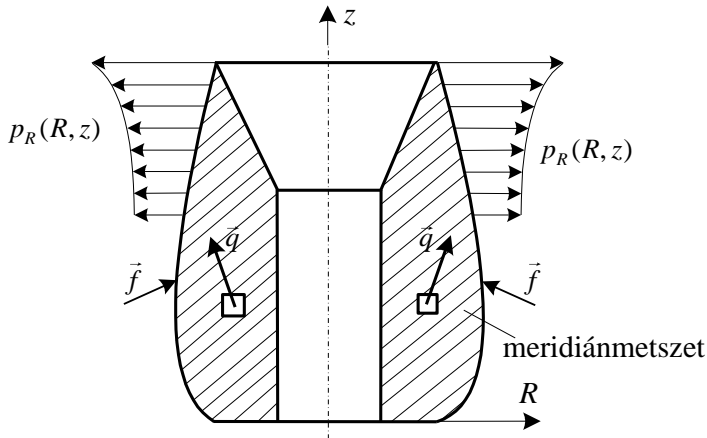
Geometriai egyenletek:

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \quad \bar{\varepsilon}_y = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}, \quad \bar{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}.$$

6.3. Forgásszimmetrikus/tengelyszimmetrikus feladatok (FSZ)

Definíció: a vizsgált test geometriája és terhelése is tengelyszimmetrikus.

Következmény: a test pontjai a test meridián síkjában (Rz metszet) mozognak el.



Az R, z, φ henger koordináta-rendszerben dolgozunk.

Tengelyszimmetria



A mechanikai mennyiségek nem függenek a φ helykoordinátától.

Az elmozdulásmező:
$$\bar{u} = u \bar{e}_R + v \bar{e}_z + w \bar{e}_\varphi, \quad u = u(R, z), \quad v = v(R, z), \quad w = 0.$$

A test minden pontja a saját meridián síkjában mozdul el.

Az alakváltozási állapot:

$$\varepsilon_R(R, z) = \frac{\partial u}{\partial R}, \quad \varepsilon_z(R, z) = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \varepsilon_\varphi(R, z) = \frac{u}{R},$$

$$\gamma_{Rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial R}, \quad \gamma_{\varphi z} = \gamma_{R\varphi} = 0.$$

Az alakváltozási tenzor:
$$\left[\underline{\underline{A}} \right]_{Rz\varphi} = \left[\underline{\underline{A}}(R, z) \right]_{Rz\varphi} = \begin{bmatrix} \varepsilon_R & \frac{1}{2}\gamma_{Rz} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{zR} & \varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\varphi \end{bmatrix}.$$

Feszültségi állapot az általános Hooke-törvényből:

$$\begin{aligned} \sigma_R(R, z) &= 2G \left[\varepsilon_R + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \right], & \sigma_z(R, z) &= 2G \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \right], \\ \sigma_\varphi(R, z) &= 2G \left[\varepsilon_\varphi + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \right], & \tau_{Rz} &= G \gamma_{Rz}, \quad \tau_{\varphi z} = \tau_{R\varphi} = 0, \end{aligned}$$

ahol $A_I = \varepsilon_R + \varepsilon_z + \varepsilon_\varphi$.

A feszültségi tenzor:
$$\left[\underline{\underline{F}} \right]_{Rz\varphi} = \left[\underline{\underline{F}}(R, z) \right]_{Rz\varphi} = \begin{bmatrix} \sigma_R & \tau_{Rz} & 0 \\ \tau_{zR} & \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\varphi \end{bmatrix}.$$

6.4. Síkfeladatok (SA, ÁSF feladat) megoldása feszültségfüggvény bevezetésével

Hasonlóság az SA és az ÁSF feladatok között:

- a két skaláris elmozdulásmező jellemzi a feladatot: $u(x, y), v(x, y) / u(R, \varphi), v(R, \varphi)$,
- a három független alakváltozási jellemző különbözik nullától:

$$\varepsilon_x(x, y), \varepsilon_y(x, y), \gamma_{xy}(x, y) / \varepsilon_R(R, \varphi), \varepsilon_\varphi(R, \varphi), \gamma_{R,\varphi}(R, \varphi),$$
- a három független feszültségi jellemző különbözik nullától:

$$\sigma_x(x, y), \sigma_y(x, y), \tau_{xy}(x, y) / \sigma_R(R, \varphi), \sigma_\varphi(R, \varphi), \tau_{R,\varphi}(R, \varphi),$$
- minden mennyiség csak az $x, y / R, \varphi$ helykoordináták függvénye,
- a geometriai és egyensúlyi egyenletek alakja.

Különbözőség az SA és az ÁSF feladatok között:

- az SA-nál a pontbeli, az ÁSF-nél a vastagság menti (átlagos) jellemzők szerepelnek,
- $\left. \begin{array}{l} \text{SA: } \sigma_z \neq 0 \\ \text{ÁSF: } \varepsilon_z \neq 0 \end{array} \right\}$ nem független jellemzők,
- az anyagegyenletek alakja.

A megoldás kiinduló feltételezései: $q_x = q_y = 0$ (SA), $\bar{q}_x = \bar{q}_y = 0$ (ÁSF).

Jelölés: a továbbiakban a felülvonás jelölést elhagyjuk.

Feszültségfüggvény bevezetése:

Airy¹-féle feszültségfüggvény: $U = U(x, y) / U = U(R, \varphi)$.

¹ George Bidell Airy (1801-1892) angol matematikus és fizikus

A feszültségfüggvényt úgy vesszük fel, hogy a belőle számított feszültségek kielégítsék az egyensúlyi egyenleteket.

A feszültségek származtatása:

DDKR	HKR
$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2},$	$\sigma_R = \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2},$
$\sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$	$\sigma_\varphi = \frac{\partial^2 U}{\partial R^2},$
$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}.$	$\tau_{R\varphi} = -\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right).$

Ezek az összefüggések az SA-ra és az ÁSF-re is érvényesek.

A megoldás gondolatmenete:

Feszültségek \Rightarrow Anyagegyenletek \Rightarrow Alakváltozások \Rightarrow Kompatibilitási egyenlet.

A kompatibilitási egyenletből a feszültségfüggvényre nézve a biharmonikus differenciálegyenletet kapjuk:

$$\Delta \Delta U = 0.$$

$U(x, y) / U(R, \varphi)$ - biharmonikus függvény.

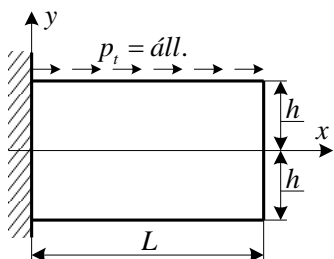
A biharmonikus függvénynek ki kell elégítenie a biharmonikus differenciálegyenletet.

A Laplace-féle differenciál operátor kétváltozós (síkbeli) esetben: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$

A biharmonikus differenciál egyenlet alakja a DDKR-ben: $\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0.$

6.5. Gyakorló feladatok a feszültségfüggvény alkalmazására

6.5.1. feladat: Általánosított síkfeszültségi állapot



Adott:

Az ábrán látható, síkfeszültségi állapotban lévő téglalap tartomány, p_t terhelése és az Airy-féle feszültségfüggvény a következő alakban:

$$U(x, y) = \frac{p_t}{4} \left(xy - \frac{xy^2}{h} - \frac{xy^3}{h^2} + \frac{Ly^2}{h} + \frac{Ly^3}{h^2} \right).$$

Feladat:

Annak eldöntése, hogy az így előállított Airy-féle feszültségfüggvény az egzakt megoldást szolgáltatja-e.

Kidolgozás:

Az Airy-féle feszültségfüggvénynek ki kell elégítenie:

- a) az $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$ egyensúlyi egyenletet,
 b) a $\Delta\Delta U(x, y) = 0$ kinematikai egyenletet és
 c) a dinamikai peremfeltételeket.

a) Az egyensúlyi egyenlet teljesülésének ellenőrzése:

Az $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$ egyensúlyi egyenlet skaláris egyenletei sík feszültségi állapot esetén *Des-cartes*-féle derékszögű koordináta-rendszerben:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + q_x = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + q_y = 0, \quad q_z = 0.$$

A feszültségi tenzor koordinátái:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{p_t}{2} \left[\frac{L-x}{h} + \frac{3(L-x)y}{h^2} \right], \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0,$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = -\frac{p_t}{4} \left[1 - \frac{2y}{h} - \frac{3y^2}{h^2} \right].$$

Az egyensúlyi egyenletek teljesülnek:

$$\underbrace{\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}}_{= \frac{p_t}{2} \left(-\frac{1}{h} - \frac{3y}{h^2} \right)} + \underbrace{\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}}_{= -\frac{p_t}{4} \left(-\frac{2}{h} - \frac{6y}{h^2} \right)} + q_x = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + q_y = 0.$$

$$= 0 \quad = 0 \quad = 0$$

b) A $\Delta\Delta U(x, y) = 0$ kinematikai egyenlet teljesülésének ellenőrzése:

$$\Delta\Delta U(x, y) = \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2 \underbrace{\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2}}_{= 0} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0.$$

A kinematikai egyenlet teljesül.

c) A dinamikai peremfeltételek teljesülésének ellenőrzése:

Az $x = L$ vonalon

$$\vec{p}_x = \underline{\underline{F}}(x=L) \cdot \vec{e}_x = \sigma_x(x=L) \vec{e}_x + \tau_{xy}(x=L) \vec{e}_y = -\frac{p_t}{4} \left[1 - \frac{2y}{h} - \frac{3y^2}{h^2} \right] \vec{e}_y = 0.$$

A dinamikai peremfeltétel csak $y = -h$ és $y = h/3$ esetén, vagyis az $(L, -h)$ és $(L, h/3)$ pontokban teljesül.

Az $y = h$ vonalon:

$$\vec{p}_{(+y)} = \underline{\underline{F}}_{(y=h)} \cdot \vec{e}_y = \tau_{xy(y=h)} \vec{e}_x + \underbrace{\sigma_{y(y=h)}}_{= 0} \vec{e}_y = -\frac{p_t}{4} \left[1 - \frac{2y}{h} - \frac{3y^2}{h^2} \right]_{y=h} \vec{e}_x = p_t \vec{e}_x.$$

A dinamikai peremfeltétel teljesül.

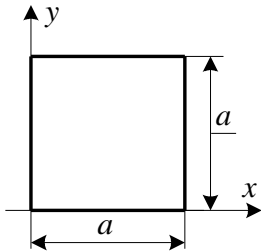
Az $y = -h$ vonalon:

$$\vec{P}_{(-y)} = \underline{F}_{(y=-h)} \cdot (-\vec{e}_y) = \underbrace{-\tau_{xy}(y=-h)}_{=0} \vec{e}_x - \underbrace{\sigma_y(y=-h)}_{=0} \vec{e}_y = \vec{0}.$$

A dinamikai peremfeltétel teljesül.

A megadott feszültségfüggvény nem szolgáltat egzakt megoldást, mert a dinamikai peremfeltételek nem elégülnek ki a teljes peremen.

6.5.2. feladat: Általánosított síkfeszültségi állapot



Adott:

Az ábrán látható négyzet alakú tárcsa és a tárcsa $U(x, y)$

$$\text{Airy-féle feszültségfüggvénye: } U(x, y) = \frac{p}{a^2} \left(\frac{x^2 y^2}{2} - \frac{y^4}{6} \right).$$

Feladat:

- A feszültségi állapot meghatározása.
- A tárcsa peremét terhelő erőrendszer meghatározása és szemléltetése.

Kidolgozás:

a) A feszültségi állapot meghatározása:

$$\text{Az átlagos feszültségi tenzor: } \underline{F} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A feszültségkoordináták kiszámítása a feszültségfüggvényből:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{p}{a^2} (x^2 - 2y^2), \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{p}{a^2} y^2, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = -\frac{p}{a^2} 2xy,$$

b) A tárcsa peremét terhelő erőrendszer meghatározása és szemléltetése:

Az erőrendszer dinamikai peremfeltételekből határozható meg.

Az $x=0$ egyenletű oldalén:

$$\vec{P}_{(x=0)} = \underline{F}_{(x=0)} \cdot (-\vec{e}_x) = -\sigma_x \Big|_{(x=0)} \vec{e}_x - \underbrace{\tau_{xy} \Big|_{(x=0)}}_{=0} \vec{e}_y = \left(\frac{p}{a^2} 2y^2 \right) \vec{e}_x.$$

Az $x=a$ egyenletű oldalén:

$$\vec{P}_{(x=a)} = \underline{F}_{(x=a)} \cdot \vec{e}_x = \sigma_x \Big|_{(x=a)} \vec{e}_x + \underbrace{\tau_{xy} \Big|_{(x=a)}}_{=0} \vec{e}_y = \frac{p}{a^2} (a^2 - 2y^2) \vec{e}_x - \left(\frac{p}{a} 2y \right) \vec{e}_y.$$

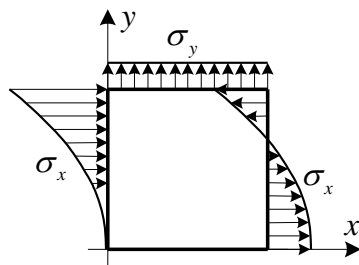
Az $y=0$ egyenletű oldalén:

$$\vec{P}_{(y=0)} = \underline{F}_{(y=0)} \cdot (-\vec{e}_y) = \underbrace{-\sigma_y \Big|_{(y=0)}}_{=0} \vec{e}_y - \underbrace{\tau_{yx} \Big|_{(y=0)}}_{=0} \vec{e}_x = \vec{0}.$$

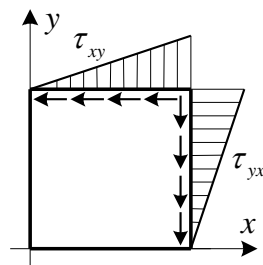
Az $y=a$ egyenletű oldalén:

$$\vec{P}|_{(y=a)} = \underline{\underline{F}}|_{(y=a)} \cdot (\vec{e}_y) = \sigma_y|_{(y=a)} \vec{e}_y + \tau_{yx}|_{(y=a)} \vec{e}_x = -\left(\frac{p}{a} 2x\right) \vec{e}_x + (p) \vec{e}_y.$$

A vonal mentén megoszló erőrendszer szemléltetése:

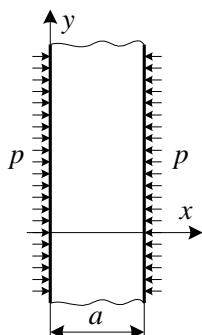


Normális irányú terhelés



Érintő irányú terhelés

6.5.3. feladat: Általánosított síkfeszültségi állapot



Adott:

Az ábrán látható, y irányban végtelen hosszúságú lemezszáv és terhelése. A terhelés a lemez középsíkjaiba esik, ezért ez a feladat mechanikai szempontból tárcsafeladatnak tekinthető.

Feladat:

- Az *Airy*-féle feszültségfüggvény felírása.
- A tárcsa feszültségi állapotának meghatározása.
- Az alakváltozási állapot meghatározása.

Kidolgozás:

a) Az *Airy*-féle feszültségfüggvény felírása:

A feszültségfüggvénynek három követelményt kell kielégítenie:

- Teljesítse a $\Delta\Delta U = 0$ biharmonikus differenciálegyenletet (ez a kompatibilitási egyenlet következménye).
- A belőle származtatott feszültségkoordináták teljesítsék az egyensúlyi egyenletet.
- A belőle származtatott feszültségkoordináták feleljenek meg a peremfeltételeknek.

Az első követelmény biztosan teljesül, amennyiben legfeljebb harmadfokú polinomokat használunk.

A második követelmény automatikusan teljesül, ha a feszültségkoordinátákat a

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

összefüggésekkel definiáljuk.

A harmadik követelmény teljesítése:

A peremfeltételek: $\sigma_x(x=0) = \sigma_x(x=a) = -p$ és $\tau_{xy}(x=0) = \tau_{xy}(x=a) = 0$.

Mivel σ_x a feszültségfüggvény y szerinti második deriváltja, a peremfeltételt kielégítő legegyszerűbb függvény az $U(x, y) = -py^2$.

Az ebből képzett $\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \equiv 0$ megfelel a peremfeltételek szerinti

$$\tau_{xy}(x=0) = \tau_{xy}(x=a) = 0 \text{ követelménynek.}$$

Az Airy-féle feszültségfüggvény: $U(x, y) = -py^2$.

b) A tárcsa feszültségi állapotának meghatározása:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -p, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{[F]}} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

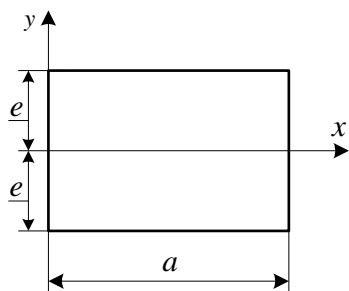
c) Az alakváltozási állapot meghatározása:

Egytengelyű feszültségállapot esetén használhatjuk az egyszerű Hooke-törvényt.

$$\underline{\underline{[A]}} = \begin{bmatrix} -p/E & 0 & 0 \\ 0 & \nu p/E & 0 \\ 0 & 0 & \nu p/E \end{bmatrix}.$$

Megjegyzés: A feszültségfüggvényből számított feszültségkoordinátáknak a perem többi részén is ki kell elégíteniük a peremfeltételeket. A feladatban szereplő lemez (tárcsa) x tengellyel párhuzamos oldalai mentén a peremfeltételt nem vizsgáltuk. Ezt a közelítést az indokolja, hogy a lemez alakja miatt a vizsgálatból kivont szakasz elhanyagolható hosszúságú. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a lemez y irányban „végtelen kiterjedésű”.

6.5.4. feladat: Sík alakváltozási állapot



Adott:

Az ábrán látható téglalap tartomány sík alakváltozási állapotban van.

Ismert az $U(x, y) = Ax^5 + Bx^3y^2$ függvény.

Feladat:

- Az A és B állandók közötti kapcsolat meghatározása, ha az U függvény biharmonikus.
- A $\sigma_x(x, y)$; $\sigma_y(x, y)$; $\sigma_z(x, y)$ és $\tau_{yx}(x, y)$ függvények meghatározása, ha a megadott függvény a test rugalmas sík-alakváltozására vonatkozó Airy-féle feszültség-függvénye.
- A $z=0$, $y=-e$, illetve a $z=0$, $x=a$ élek mentén a σ_y és τ_{xy} , illetve σ_x és τ_{yx} feszültségeloszlások szemléltetése, ha $A > 0$.
- A felületi terhelés sűrűségének meghatározása a $Q_1\left(\frac{a}{2}, -e, 0\right)$ és $Q_2\left(a, \frac{e}{2}, 0\right)$ pontokban.

Kidolgozás:

a) Az A és B állandók közötti kapcsolat meghatározása, ha az U függvény biharmonikus:

Biharmonikus függvény: eleget tesz a biharmonikus differenciál egyenletnek.

$$\Delta\Delta U = 0.$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)U = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)U = 0.$$

A kijelölt deriválások elvégzése:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= 5Ax^4 + 3By^2x^2, & \frac{\partial U}{\partial y} &= 2Bx^3y, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= 20Ax^3 + 6By^2x, & \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} &= 0, \\ \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} &= 60Ax^2 + 6By^2, & \frac{\partial^3 U}{\partial x^2\partial y} &= 12Byx, \\ \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} &= 120Ax, & \frac{\partial^4 U}{\partial x^2\partial y^2} &= 12Bx. \end{aligned}$$

Behelyettesítve: $120Ax + 2 \cdot 12Bx + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -5A.$

b) A $\sigma_x(x, y)$; $\sigma_y(x, y)$; $\sigma_z(x, y)$ és $\tau_{xy}(x, y)$ függvények meghatározása, ha a megadott függvény a test rugalmas sík-alakváltozására vonatkozó *Airy*-féle feszültség-függvénye:

Feltételezés: $U(x, y)$ - *Airy*-féle feszültségfüggvény.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 2Bx^3, & \sigma_y &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 20Ax^3 + 6By^2x, \\ \sigma_z &= \nu(\sigma_x + \sigma_y) = \nu[(20A + 2B)x^3 + 6By^2x], & \tau_{xy} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} = -6Bx^2y. \end{aligned}$$

c) A $z=0$, $y=-e$, illetve a $z=0$, $x=a$ élek mentén a σ_y és τ_{xy} , illetve σ_x és τ_{yx} feszültségeloszlások szemléltetése, ha $A > 0$:

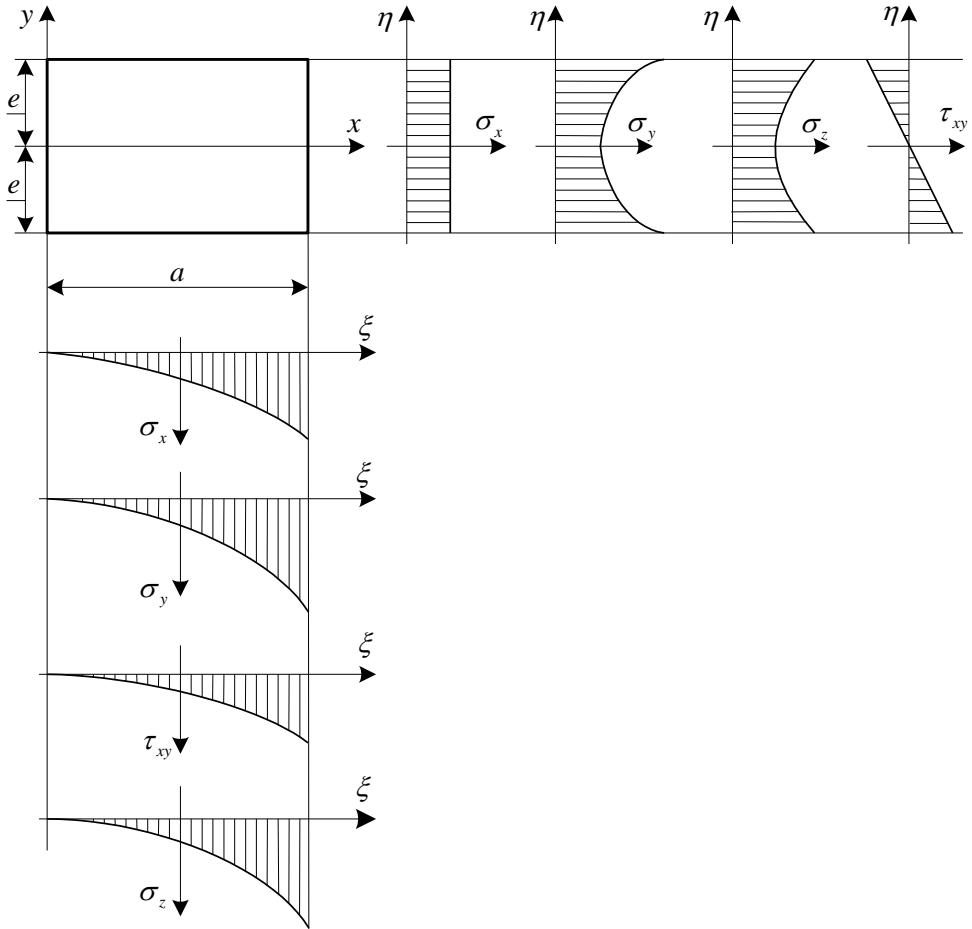
- $y = -e$ perem:

$$\sigma_y = 20Ax^3 + 6Be^2x, \quad \tau_{xy} = 6Bex^2, \quad \sigma_z = \nu[(20A + 2B)x^3 + 6Be^2x].$$

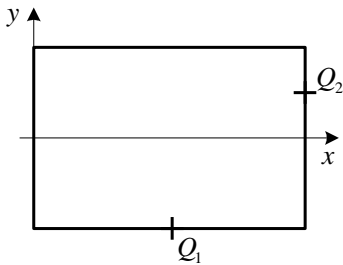
- $x = a$ perem:

$$\sigma_x = 2Ba^3, \quad \sigma_y = 20Aa^3 + 6Bay^2, \quad \tau_{xy} = -6Ba^2y, \quad \sigma_z = \nu[(20A + 2B)a^3 + 6Bay^2].$$

A feszültségeloszlás szemléltetése:



d) A felületi terhelés sűrűségének meghatározása a $Q_1\left(\frac{a}{2}, -e, 0\right)$ és $Q_2\left(a, \frac{e}{2}, 0\right)$ pontokban:



A feszültségi tenzor:
$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

- A $Q_1\left(\frac{a}{2}, -e, 0\right)$ pontban: $\vec{n} = -\vec{e}_y$.

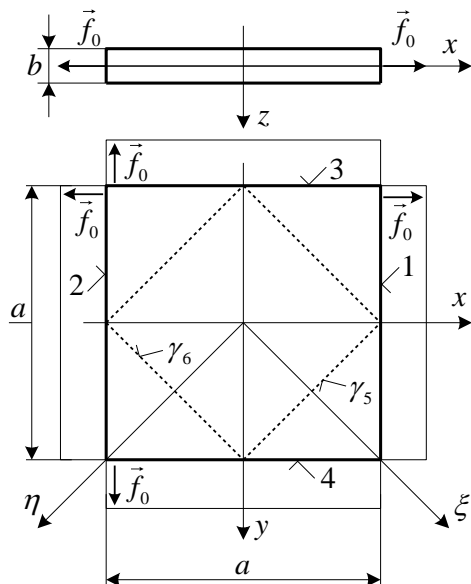
$$\vec{p}_1 = \underline{\underline{F}}|_{Q_1} \vec{n} = -\tau_{xy} \vec{e}_x - \sigma_y \vec{e}_y,$$

$$\tau_{xy} = 6Be \frac{a^2}{4} = \frac{3}{2} Bea^2, \quad \sigma_y = 20A \frac{a^3}{8} \frac{3}{2} + 6Be^2 \frac{a}{2} = \frac{5}{2} Aa^3 + 3Be^2 a.$$

- A $Q_2\left(a, \frac{e}{2}, 0\right)$ pontban: $\vec{n} = \vec{e}_x$.

$$\vec{p}_2 = \underline{\underline{F}} \Big|_{Q_2} \vec{n} = \sigma_x \vec{e}_x + \tau_{xy} \vec{e}_y, \quad \sigma_x = 2Ba^3, \quad \tau_{xy} = -6Ba^2 \frac{e}{2} = -3Ba^2 e.$$

6.5.5. feladat: Általánosított síkfeszültségi állapot



Adott:

Az ábrán vázolt tárcsa méretei, terhelése és felületi feszültségi állapotára vonatkozó Airy-féle feszültségfüggvény:

$$U = \frac{f_0}{2}(x^2 + y^2).$$

A tárcsa középfelületének kerületét állandó, f_0 [N/m] sűrűségű külső, megoszló erőrendszer terheli.

Feladat:

- A felületi feszültségek értelmezésének felírása.
- A tárcsa egy tetszőleges pontjában az $\underline{\underline{N}}$ felületi feszültségi tenzor mátrixának meghatározása.

c) A peremfeltételek kielégülésének ellenőrzése.

d) Az N_ξ , $N_{\eta\xi}$, illetve N_η , $N_{\xi\eta}$ felületi feszültségek meghatározása a bejelölt γ_5 , illetve γ_6 éle mentén.

Kidolgozás:

a) A felületi feszültségek értelmezésének felírása:

$$N_x = \int_{(b)} \sigma_x dz = b \bar{\sigma}_x, \quad N_y = \int_{(b)} \sigma_y dz = b \bar{\sigma}_y, \quad N_{xy} = N_{yx} = \int_{(b)} \tau_{xy} dz = b \bar{\tau}_{xy}.$$

$$\text{A felületi feszültségi tenzor: } \underline{\underline{N}} = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} & 0 \\ N_{yx} & N_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) A tárcsa egy tetszőleges pontjában az $\underline{\underline{N}}$ felületi feszültségi tenzor mátrixának meghatározása:

$$N_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f_0, \quad N_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = f_0, \quad N_{xy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0, \quad \underline{\underline{N}} = \begin{bmatrix} f_0 & 0 & 0 \\ 0 & f_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) A peremfeltételek kielégülésének ellenőrzése:

$$\left. \begin{array}{l} x = \pm \frac{a}{2} \\ y = \pm \frac{a}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \underline{\underline{N}} \cdot (\pm \vec{e}_x) = \pm f_0 \vec{e}_x \\ \underline{\underline{N}} \cdot (\pm \vec{e}_y) = \pm f_0 \vec{e}_y \end{array} \quad \text{A peremfeltételek kielégülnek.}$$

d) Az N_ξ , $N_{\eta\xi}$, illetve N_η , $N_{\xi\eta}$ felületi feszültségek meghatározása a bejelölt γ_5 , illetve γ_6 élek mentén:

Az élek normális egységvektorai: $\vec{e}_\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y$, $\vec{e}_\eta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y$.

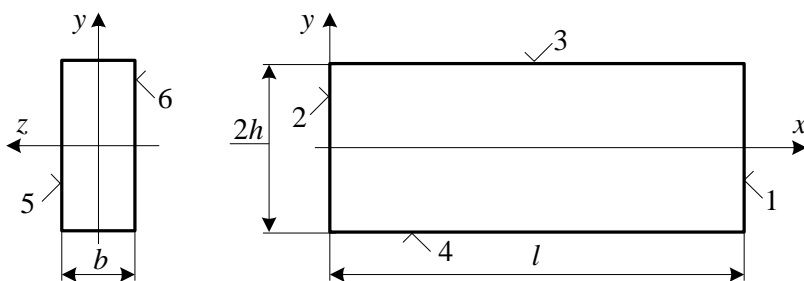
$$\vec{N}_\xi = \underline{\underline{N}} \cdot \vec{e}_\xi = \begin{bmatrix} f_0 & 0 & 0 \\ 0 & f_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} f_0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} f_0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$N_\xi = \vec{e}_\xi \cdot \vec{N}_\xi = \vec{e}_\xi \cdot \underline{\underline{N}} \cdot \vec{e}_\xi = f_0, \quad N_{\eta\xi} = \vec{e}_\eta \cdot \vec{N}_\xi = \vec{e}_\eta \cdot \underline{\underline{N}} \cdot \vec{e}_\xi = -\frac{f_0}{2} + \frac{f_0}{2} = 0.$$

$$\vec{N}_\eta = \underline{\underline{N}} \cdot \vec{e}_\eta = \begin{bmatrix} f_0 & 0 & 0 \\ 0 & f_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} f_0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} f_0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$N_{\eta\xi} = \vec{e}_\xi \cdot \vec{N}_\eta = -\frac{f_0}{2} + \frac{f_0}{2} = 0.$$

6.5.6. feladat: Sík alakváltozás



Adott:

A sík alakváltozási állapotban levő b vastagságú test az ábrán vázolt négyszögtartományának *Airy*-féle feszültségfüggvénye:

$$U = \frac{1}{2} Ax^2 + Bxy + \frac{1}{2} Cy^2.$$

Feladat:

- A tartomány tetszőleges $P(x, y)$ pontjában az $\underline{\underline{F}}$ feszültségi tenzor meghatározása.
- A tartomány hat oldalán lévő peremterhelések meghatározása. (A feladat megoldása során tekintsen el a térfogaton megoszló terheléstől.)

Kidolgozás:

a) A tartomány tetszőleges $P(x, y)$ pontjában az $\underline{\underline{F}}$ feszültségi tenzor meghatározása:

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = C, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = A, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -B.$$

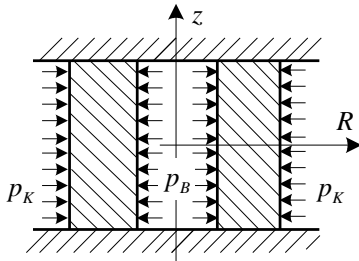
b) A tartomány hat oldallapján lévő peremterhelések meghatározása:

$$\begin{aligned} x=0, l & \quad \bar{n} = \pm \bar{e}_x & \quad \bar{\rho}_x = \pm \sigma_x \bar{e}_x \pm \tau_{xy} \bar{e}_y = \pm C \bar{e}_x \mp B \bar{e}_y, \\ x=0, 2h & \quad \bar{n} = \pm \bar{e}_y & \quad \bar{\rho}_y = \pm \tau_{xy} \bar{e}_x \pm \sigma_y \bar{e}_y = \mp B \bar{e}_x \pm A \bar{e}_y, \\ z = \pm \frac{b}{2} & \quad \bar{n} = \pm \bar{e}_z & \quad \bar{\rho}_z = \pm \sigma_z \bar{e}_z = \pm \nu(A+C) \bar{e}_z. \end{aligned}$$

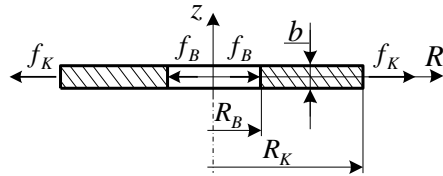
6.6. Forgásszimmetrikus síkbeli feladatok

Forgásszimmetria/tengelyszimmetria: a mechanikai mennyiségek nem függenek a φ -től.
Az elmozdulásmező: $\bar{u} = u(R)\bar{e}_R$, a feszültségfüggvény: $U = U(R)$.

Sík alakváltozási feladat



Általánosított sík feszültségi feladat



Pl. vastagfalú cső

p_B - belső terhelés, p_K külső terhelés

Pl. furatos tárcsa

f_B - belső terhelés, f_K külső terhelés

Alakváltozási jellemzők tengelyszimmetrikus esetben: $\varepsilon_R = \frac{du}{dR}$, $\varepsilon_\varphi = \frac{u}{R}$, $\gamma_{R\varphi} = 0$.

Az alakváltozási tenzor tengelyszimmetrikus esetben:

Sík alakváltozási feladat

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(R) = \begin{bmatrix} \varepsilon_R & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Általánosított sík feszültségi feladat

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(R) = \begin{bmatrix} \varepsilon_R & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_R + \varepsilon_\varphi)$$

A Hooke-törvény:

$$\begin{aligned} \text{Sík alakváltozási feladat} \\ \varepsilon_R &= \frac{1}{2G} [\sigma_R - \nu(\sigma_R + \sigma_\varphi)], \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{2G} [\sigma_\varphi - \nu(\sigma_R + \sigma_\varphi)], \\ \varepsilon_z &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Általánosított sík feszültségi feladat} \\ \varepsilon_R &= \frac{1}{E} (\sigma_R - \nu\sigma_\varphi), \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{E} (\sigma_\varphi - \nu\sigma_R), \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E} (\sigma_\varphi + \sigma_R). \end{aligned}$$

A biharmonikus differenciálegyenlet tengelyszimmetrikus esetben:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left\{ R \frac{d}{dR} \left[\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{dU(R)}{dR} \right) \right] \right\} = 0.$$

A kijelölt differenciálási műveletek elvégzése után látható, hogy ez egy homogén, közönséges negyedrendű Euler² típusú differenciálegyenlet.

Az Euler típusú differenciálegyenlet matematikából ismert alakja (I. Függelék):

$$x^4 y^{IV} + x^3 y''' + x^2 y'' + x y' = 0.$$

A megoldás keresése: $y_k(x) = x^n$.

A biharmonikus (Euler típusú) differenciálegyenlet megoldása:

$$U(R) = \frac{A}{2} R^2 + B \ln R + C + DR^2 \ln R$$

Az $R^2 \ln R$ -es tag nem ad egyértékű elmozdulásmezőt kör és körgyűrű tartományban, ezért ezt a tagot a megoldásból elhagyjuk:

$$U(R) = \frac{A}{2} R^2 + B \ln R + C.$$

Feszültségek:

$$\begin{aligned} \sigma_R(R) &= \frac{1}{R} \frac{dU}{dR} = A + \frac{B}{R^2}, \\ \sigma_\varphi(R) &= \frac{d^2U}{dR^2} = A - \frac{B}{R^2}, \end{aligned} \quad \sigma_z = \begin{cases} \nu(\sigma_R + \sigma_\varphi) & \text{SA} \\ 0 & \text{ÁSF} \end{cases} \text{ esetén.}$$

A megoldásban szereplő A , B állandók dinamikai peremfeltételekből határozhatóak meg.

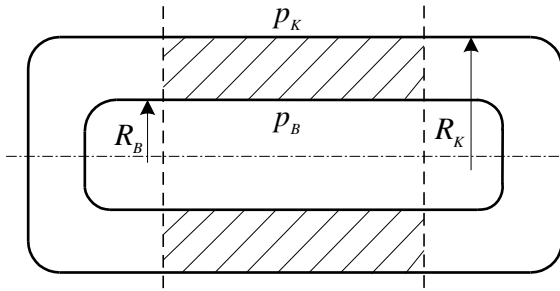
6.7. Vastagfalú csövek

6.7.1. Egyszerű vastagfalú cső

Az R_B belső sugarú és R_K külső sugarú csövet p_B belső nyomás és p_K külső nyomás terheli. Feladat a cső szilárdsági állapotainak, elsősorban a feszültségi állapotnak a meghatározása.

Megoldás: a sík-alakváltozás és a húzás-nyomás szuperpozíciója.

² Leonhard Euler (1707-1783) svájci matematikus és fizikus



A vastagfalú csőnek a csővégektől elég távol levő szakaszát vizsgáljuk.

Feltételezzük, hogy a vizsgált szakaszon a véglap zavaró hatása már nem érvényesül.

Szuperpozíció:
$$\underset{R\varphi z}{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \sigma_R & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma'_R & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_z \end{bmatrix}}_{\text{SA}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma''_z \end{bmatrix}}_{\text{húzás-nyomás}}.$$

A csőben kialakuló feszültségi állapot:

$$\sigma_R = \sigma'_R = A + \frac{B}{R^2},$$

$$\sigma_\varphi = \sigma'_\varphi = A - \frac{B}{R^2},$$

$$\sigma_z = \sigma'_z + \sigma''_z.$$

A tengely irányú normál feszültségek: - sík-alakváltozából: $\sigma'_z = \nu(\sigma'_R + \sigma'_\varphi) = \nu 2A$,
 - húzás-nyomásból: $\sigma''_z = \text{állandó}$.

A csőben ténylegesen fellépő tengely irányú normál feszültségek:

- nyitott cső esetén: $\sigma_z = \sigma'_z + \sigma''_z = 0 \Rightarrow \sigma''_z = -\sigma'_z$,
 - zárt cső esetén: $\sigma_z = \frac{F}{A} = \frac{p_B R_B^2 \pi - p_K R_K^2 \pi}{R_K^2 \pi - R_B^2 \pi} = \sigma'_z + \sigma''_z$.

A húzás-nyomásból származó σ''_z -nek mindig akkorának kell lennie, hogy a σ'_z -hez hozzáadva a fenti értékek adódjanak:

- nyitott cső esetén: $\sigma_z = 0 \Rightarrow \sigma''_z = -\sigma'_z = -2A\nu$,
 - zárt cső esetén: $\sigma''_z = \sigma_z - \sigma'_z = \text{állandó}$.

Csődiagram: a csőben kialakuló feszültségi állapotot szemlélteti.

Új változó bevezetése: $\psi = \frac{R_B^2}{R^2}$, $\psi_K = \frac{R_B^2}{R_K^2}$, $\psi_K < \psi < 1$.

Az új változónak a cső külső és belső felületén felvett értékei: $\psi_K = \frac{R_B^2}{R_K^2}$, $\psi_B = 1$.

A feszültségek az új változó bevezetésével:
$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= a - b\psi \\ \sigma_\varphi &= a + b\psi \end{aligned} \right\}$$

A ψ változó bevezetésével a feszültségekre két egyenest kaptunk.

A fenti összefüggésekben a és b új állandók, amelyek dinamikai peremfeltételekből határozhatók meg.

Az új állandók meghatározása a peremfeltételekből: $\sigma_R(R=R_B) = \sigma_R(\psi=1) = -p_B$,
 $\sigma_R(R=R_K) = \sigma_R(\psi=\psi_K) = -p_K$.

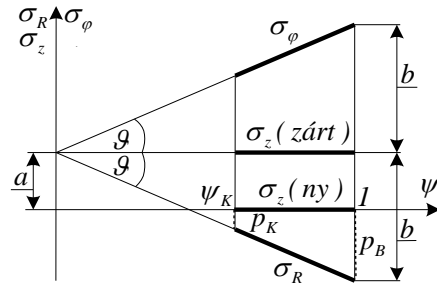
A behelyettesítést elvégezve:
$$\left. \begin{aligned} a-b &= -p_B \\ a-b\psi_K &= -p_K \end{aligned} \right\} \Rightarrow b = \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K} = tg\vartheta, \quad a = \frac{p_B\psi_K - p_K}{1 - \psi_K}.$$

A csődiagram:

Nyitott cső: $\sigma_z = 0 = \text{állandó}$.

Zárt cső:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{F}{A} = \frac{p_B R_B^2 \pi - p_K R_K^2 \pi}{R_K^2 \pi - R_B^2 \pi} \\ &= \frac{p_B \psi_K - p_K}{1 - \psi_K} = a = \text{állandó}. \end{aligned}$$

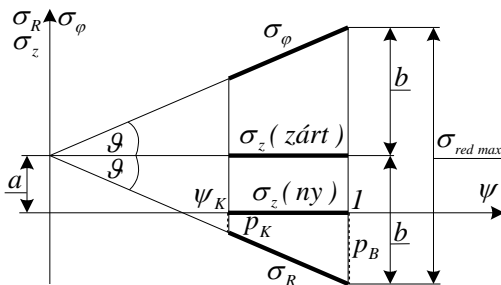


A diagram megrajzolásának lépései:

- A dinamikai peremfeltételekből a $\psi=1$ és a $\psi=\psi_K$ helyen ismert a σ_R értéke, ezért a $\psi=1$ helyre $-p_B$ -t, a $\psi=\psi_K$ helyre pedig $-p_K$ -t mérünk fel.
- A két pont összekötésével kapjuk a $\sigma_R(\psi)$ egyenest.
- A $\sigma_R(\psi)$ egyenes irántangense $-b = -tg\vartheta$, az egyenes a függőleges tengelyt az a helyen metszi.
- A $\sigma_\varphi(\psi)$ egyenest a $\sigma_R(\psi)$ egyenesnek a $\sigma = a$ vízszintes egyenesre történő tükrözésével kapjuk.
- A $\sigma_z = \text{állandó}$ egyenesek értékei a diagram melletti összefüggésekből számíthatók.

Vastagfalú cső szilárdságtani méretezése, ellenőrzése

- Ha $p_B > p_K$:



A σ_R , σ_φ , σ_z főfeszültségek:

$$\sigma_1 = \sigma_\varphi, \quad \sigma_2 = \sigma_z, \quad \sigma_3 = \sigma_R.$$

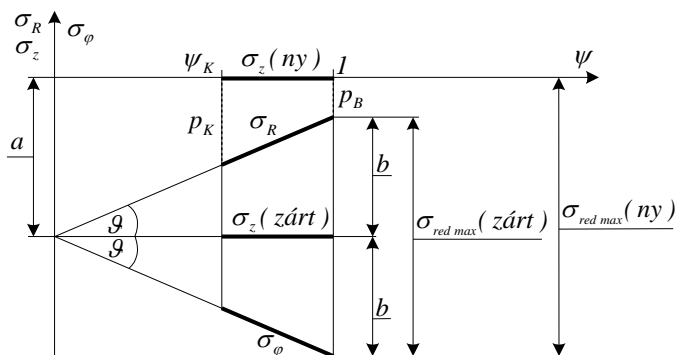
A Mohr szerint számított redukált feszültség:

$$\sigma_{red} (Mohr) = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_\varphi - \sigma_R.$$

A redukált feszültség maximuma: $\sigma_{red\ max} (Mohr) = (\sigma_\varphi - \sigma_R)_{max} = (\sigma_\varphi - \sigma_R) \Big|_{\psi=1} = 2b$.

A csődiagramból: $\sigma_{red\ max} (Mohr) = 2b = 2 \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K}$.

- Ha $p_K > p_B$:



A σ_R , σ_φ , σ_z főfeszültségek:

Nyitott cső:

$$\sigma_1 = \sigma_z, \quad \sigma_2 = \sigma_R, \quad \sigma_3 = \sigma_\varphi.$$

Zárt cső:

$$\sigma_1 = \sigma_R, \quad \sigma_2 = \sigma_z, \quad \sigma_3 = \sigma_\varphi.$$

A Mohr szerint számított redukált feszültség:

$$\sigma_{red} (Mohr) = \sigma_1 - \sigma_3.$$

Nyitott cső:

$$\text{A redukált feszültség maximuma: } \sigma_{red\ max} (Mohr) = |\sigma_{\varphi\ max}| = |\sigma_\varphi|_{\psi=1} = 2b + p_B.$$

$$\text{A csődiagramból: } \sigma_{red\ max} (Mohr) = 2b + p_B = 2 \frac{p_K - p_B}{1 - \psi_K} + p_B.$$

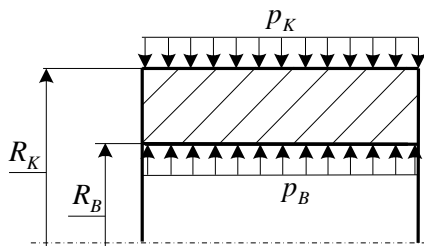
Zárt cső:

$$\text{A redukált feszültség maximuma: } \sigma_{red\ max} (Mohr) = (\sigma_R - \sigma_\varphi)_{max} = (\sigma_R - \sigma_\varphi) \Big|_{\psi=1} = 2b.$$

$$\text{A csődiagramból: } \sigma_{red\ max} (Mohr) = 2b = 2 \frac{p_K - p_B}{1 - \psi_K}.$$

$$\text{Méretezés, ellenőrzés: } \sigma_{red\ max} \leq \sigma_{meg}.$$

Példa: egyszerű nyitott, vagy zárt vastagfalú cső méretezése



Adott: $p_B, p_K, R_B, \sigma_{meg}$.

Keresett: R_K .

$$\text{Méretezés: } \sigma_{red\ max} = 2 \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K} \leq \sigma_{meg}, \quad \Rightarrow \quad 2 \frac{p_B - p_K}{\sigma_{meg}} \leq 1 - \psi_K, \quad \Rightarrow$$

$$\psi_K = \frac{R_B^2}{R_K^2} \leq 1 - 2 \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K}, \quad \Rightarrow \quad R_K \geq \frac{R_B}{\sqrt{1 - 2 \frac{p_B - p_K}{1 - \sigma_{meg}}}}.$$

Megjegyzés: a nyomáskülönbség nem növelhető minden határon túl.

$$\text{Ha } 1 - 2 \frac{p_B - p_K}{\sigma_{meg}} = 0, \text{ akkor } R_K \rightarrow \infty$$

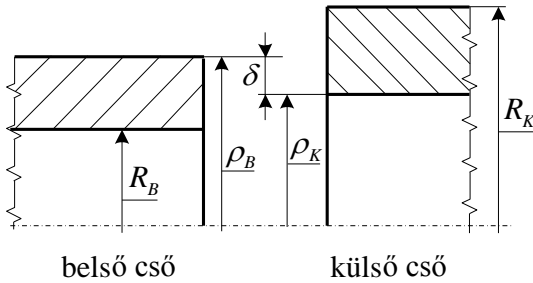
⇓

$$p_B - p_K < \frac{\sigma_{meg}}{2}.$$

Megoldás: csökkenteni kell a nyomáskülönbséget, például a p_K növelésével.

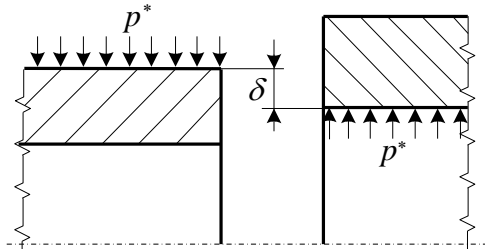
6.7.2. Összetett vastagfalú cső

A két cső mindig túlfedéssel illesztett. Ezzel a belső cső külső felületén nyomásnövekedést hozunk létre.



Túlfedés: $\delta = \rho_B - \rho_K.$

Megvalósítás: a külső csövet felmelegítve ráhúzzuk a belső csőre, majd lehűtjük.



p^* - a lehűtés után fellépő nyomás,

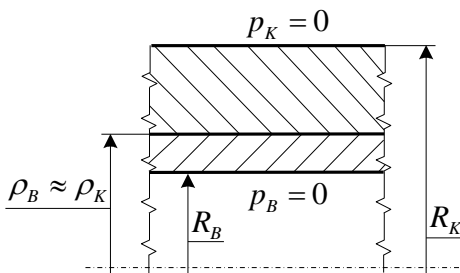
$$p^* = p^*(\delta).$$

A p^* nyomás nagysága a δ túlfedéstől függ.

Feltételezés: $\delta \ll \rho_B, \rho_K \Rightarrow \rho_B \approx \rho_K.$

Új változó bevezetése: $\psi = \frac{R_B^2}{R^2}, \quad \bar{\psi}_K = \frac{R_B^2}{\rho_B^2} = \frac{R_B^2}{\rho_K^2}, \quad \psi_K = \frac{R_B^2}{R_K^2}, \quad \psi_K < \bar{\psi}_K < 1.$

6.7.2.1. A túlfedés következtében kialakuló állapot



A csővön nincs külső/belső nyomási terhelés.

p^* - a túlfedés következtében fellépő nyomás.

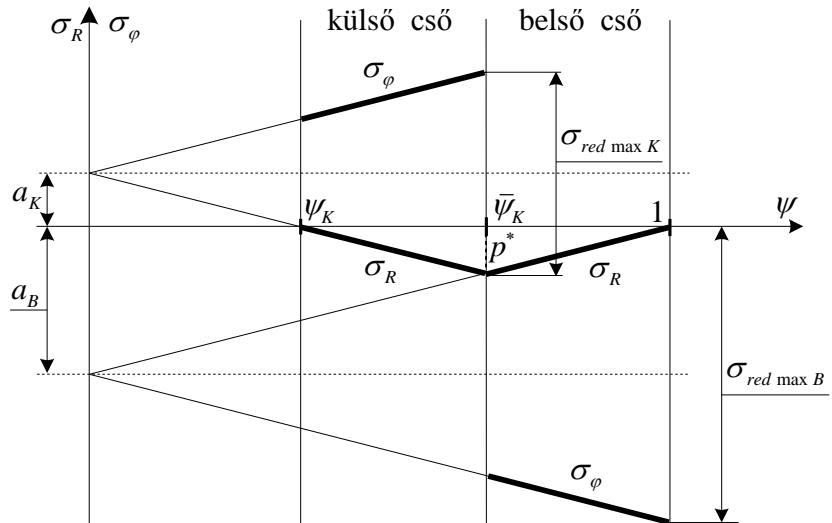
„Peremfeltételek” (ismert értékek):

$$\sigma_R(R_B) = \sigma_R(\psi = 1) = 0,$$

$$\sigma_R(\rho_B \approx \rho_K) = \sigma_R(\bar{\psi}_K) = -p^*,$$

$$\sigma_R(R_K) = \sigma_R(\psi_K) = 0.$$

Csődiagram:



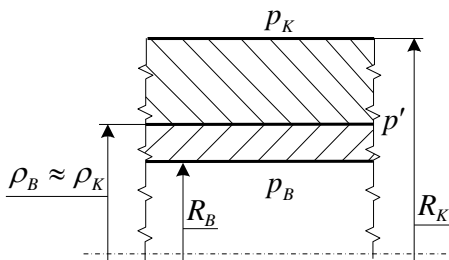
A csődiagram megrajzolásának gondolatmenete:

- A peremfeltételek figyelembevételével felmérjük a $\sigma_R(\psi)$ függvény ismert értékeit:
A $\psi = \psi_K$ helyen $p_K = 0$ -át, a $\psi = \bar{\psi}_K$ helyen $-p^*$ -ot és a $\psi = 1$ helyen $p_B = 0$ -át.
- Az így kapott pontokat összekötve kapjuk meg külön-külön a belső, illetve a külső csőre a $\sigma_R(\psi)$ egyeneseket.
- Ezek az egyenesek a függőleges tengelyt az a_B , illetve az a_K helyen metszik.
- A $\sigma_\phi(\psi)$ függvényeket (egyeneseket) úgy kapjuk, hogy a $\sigma_R(\psi)$ egyeneseket tükrözzük a $\sigma = a_B$, illetve a $\sigma = a_K$ vízszintes egyenesekre.

A maximális redukált feszültségek:

Hasonló háromszögekből:
$$\frac{\sigma_{red\ max\ B}}{2} = \frac{p^*}{1 - \bar{\psi}_K} l, \quad \frac{\sigma_{red\ max\ K}}{2} = \frac{p^*}{\bar{\psi}_K - \psi_K} \bar{\psi}_K.$$

6.7.2.2. Összetett vastagfalú cső külső és belső terheléssel



Feltételezés: $p_B > p_K \neq 0$.

A szuperpozíció elvét alkalmazzuk.

p^* - a túlfedésből származó nyomás,

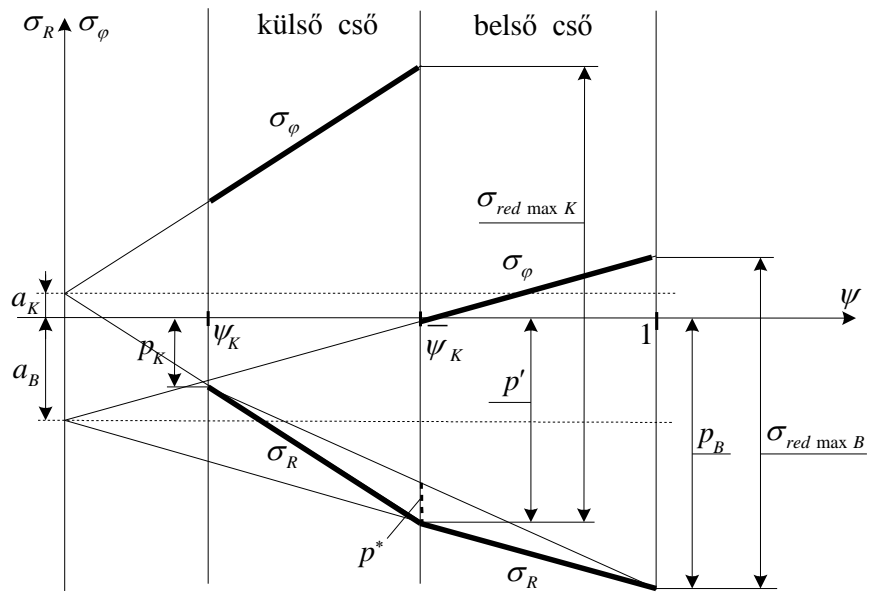
p' - a túlfedés helyén fellépő tényleges nyomás.

$$p' = p^* + \left[p_K + \frac{p_B - p_K}{1 - \bar{\psi}_K} (\bar{\psi}_K - \psi_K) \right]$$

„Peremfeltételek” (ismert értékek):

$$\sigma_R(R_B) = \sigma_R(\psi = 1) = -p_B, \quad \sigma_R(\rho_B \approx \rho_K) = \sigma_R(\bar{\psi}_K) = -p', \quad \sigma_R(R_K) = \sigma_R(\psi_K) = -p_K.$$

Csődiagram:



A diagram megrajzolása az előző pontban részletesen leírt gondolatmenettel történik.

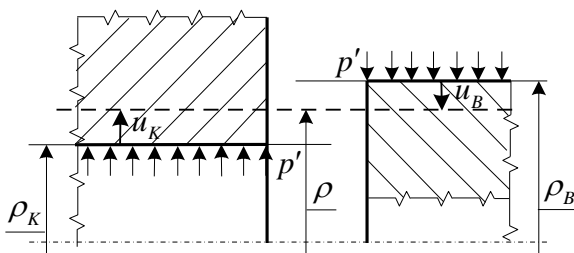
A maximális redukált feszültségek:

Hasonló háromszögekből:
$$\frac{\sigma_{red\ max\ B}}{2} = \frac{p_B - p'}{1 - \bar{\psi}_K}, \quad \frac{\sigma_{red\ max\ K}}{2} = \frac{p' - p_K}{\bar{\psi}_K - \psi_K} \bar{\psi}_K.$$

Méretezés:

Ha például adottak az $R_B, \rho_B \approx \rho_K, p_B, p_K$ paraméterek, akkor a fenti összefüggésekből meghatározhatóak a p' és a ψ_K értékek (azaz R_K).

6.7.2.3. A túlfedés meghatározása



A sugár irányú elmozdulás: $\vec{u} = u \vec{e}_R$.

Az u előjeles skalár koordináta.

Túlfedés: $\delta = \rho_B - \rho_K$.

A zsigorkötés következtében a belső cső külső sugara csökken, a külső cső belső sugara pedig növekedni fog és így áll elő a ρ sugár.

$$\rho = \rho_K + u_K = \rho_B + u_B.$$

A túlfedés: $\delta = \rho_B - \rho_K = u_K - u_B = \rho_K \varepsilon_{\phi K} - \rho_B \varepsilon_{\phi B}$

Felhasználva a $\rho_K \approx \rho_B$ közelítést, a túlfedés:

$$\delta = \rho_B (\varepsilon_{\phi K} - \varepsilon_{\phi B}) \Big|_{R=\rho_B=\rho_K}.$$

$$\text{Hooke-törvény: } \varepsilon_\varphi = \frac{1}{2G} \left[\begin{array}{c} \sigma_\varphi - \nu (\sigma_R + \sigma_\varphi) \\ = -p' \end{array} \right].$$

$$\text{Ezt behelyettesítve a túlfedés összefüggésébe: } \delta = \rho_B \frac{1}{2G} \left[\sigma_{\varphi K} - \sigma_{\varphi B} - \nu (\sigma_{\varphi K} - \sigma_{\varphi B}) \right] \Big|_{R=\rho_B}.$$

6.7.2.4. Optimális csőméretek

Adott: $R_B, R_K, p_K, \sigma_{meg B}, \sigma_{meg K}$.

Kérdés: hogyan kell $\rho_K \approx \rho_B$ közbülső sugarat (vagyis $\bar{\psi}_K$ -t) megválasztani úgy, hogy p_B maximális legyen.

Az összetett vastagfalú cső méretezésére szolgáló összefüggések:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{p_B - p'}{1 - \bar{\psi}_K} = \frac{\sigma_{red max B}}{2} \leq \frac{\sigma_{meg B}}{2} \\ \frac{p' - p_K}{\bar{\psi}_K - \psi_K} \bar{\psi}_K = \frac{\sigma_{red max K}}{2} \leq \frac{\sigma_{meg K}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} p_B = \frac{\sigma_{meg B}}{2} (1 - \bar{\psi}_K) + p' \\ p' = \frac{\bar{\psi}_K - \psi_K}{2 \bar{\psi}_K} \sigma_{meg K} + p_K \end{array}$$

A második egyenletet az elsőbe helyettesítve:

$$p_B = \frac{\sigma_{meg B}}{2} (1 - \bar{\psi}_K) + \frac{\bar{\psi}_K - \psi_K}{2 \bar{\psi}_K} \sigma_{meg K} + p_K = p_B(\bar{\psi}_K).$$

Keressük a p_B szélsőértékét (maximumát):

$$\frac{dp_B}{d\bar{\psi}_K} = 0 = -\frac{\sigma_{meg B}}{2} + \frac{\sigma_{meg K}}{2} \frac{\psi_K}{\bar{\psi}_K^2},$$

Ebből a szélsőérték helye:
$$\bar{\psi}_K = \sqrt{\frac{\sigma_{meg K}}{\sigma_{meg B}} \psi_K}.$$

$$\frac{d^2 p_B}{d\bar{\psi}_K^2} = -\sigma_{meg K} \frac{\psi_K}{\bar{\psi}_K^3} < 0. \quad \text{Tehát a szélsőérték maximum.}$$

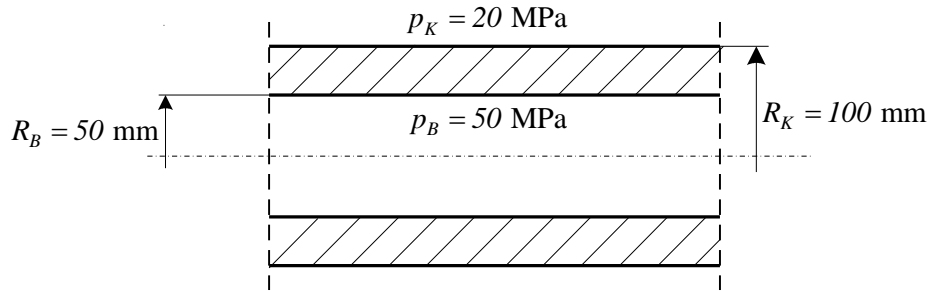
Különböző anyag esetén az optimális közbülső sugár:

$$\bar{\psi}_K^2 = \frac{R_B^4}{\rho_B^4} = \frac{\sigma_{meg K}}{\sigma_{meg B}} \frac{R_B^2}{R_K^2} \quad \Rightarrow \quad \rho_B \approx \rho_K = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{meg K}}{\sigma_{meg B}} \right)^{\frac{1}{2}} R_B R_K}.$$

Azonos anyag esetén az optimális közbülső sugár: $\rho_K \approx \rho_B = \sqrt{R_B R_K}$.

6.7.3. Gyakorló feladatok vastagfalú csövekre

6.7.3.1. feladat: Zárt vastagfalú cső



Adott: Az ábrán látható zárt vastagfalú cső geometriája és terhelése:

$$p_B = 50 \text{ MPa}, p_K = 20 \text{ MPa}, R_B = 50 \text{ mm}, R_K = 100 \text{ mm}.$$

Feladat: a) A ψ_K értékének meghatározása.

b) A csődiagram megrajzolása.

c) A cső szilárdságtani ellenőrzése a *Mohr*-elmélet szerint, ha $\sigma_{meg} = 100 \text{ MPa}$.

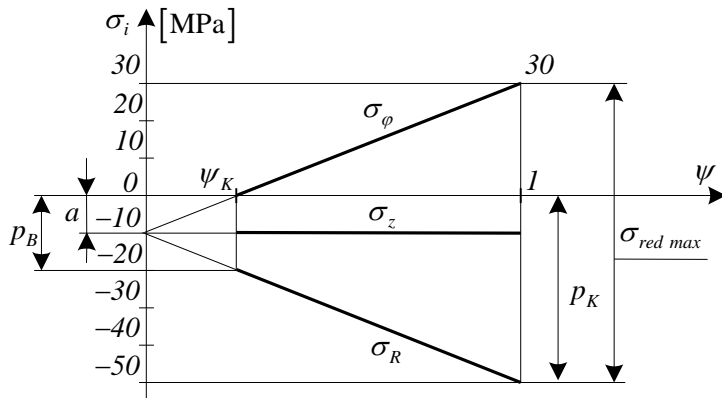
d) Az $R = R_K$ helyen lévő pontokban a feszültségi tenzor mátrixának felírása az R, φ, z koordináta-rendszerben.

Kidolgozás:

a) A ψ_K értékének meghatározása:

$$\psi = \frac{R_B^2}{R^2} \Rightarrow \psi_K = \frac{R_B^2}{R_K^2} = \left(\frac{50}{100} \right)^2 = 0,25.$$

b) A csődiagram:



c) Szilárdságtani ellenőrzés:

$$\sigma_{red \max}(\text{Mohr}) = 2 \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K} = 2 \frac{50 - 20}{1 - 0,25} = 2 \frac{30}{0,75} = 80 \text{ MPa}.$$

$$\sigma_{red \max} \leq \sigma_{meg}, \quad 80 \text{ MPa} < 100 \text{ MPa}, \text{ ezért a cső szilárdságtani szempontból megfelel!}$$

d) A feszültségi tenzor mátrixa az R_K , vagy ψ_K helyen:

A csődiagramból:

$$\sigma_R(\psi_K) = -p_K = -20 \text{ MPa},$$

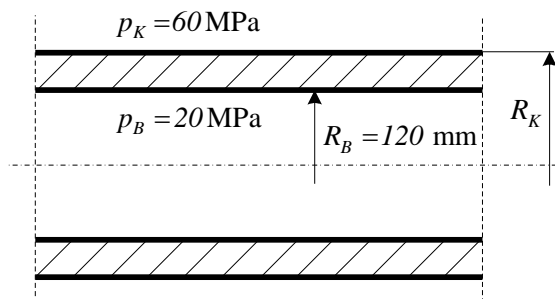
$$\sigma_\varphi(\psi_K) = 2 \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K} \psi_K - p_K = 80 \cdot 0,25 - 20 = 0,$$

$$\sigma_{z \text{ zárt}} = a = \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K} \psi_K - p_K = -10 \text{ MPa}.$$

$$\sigma_{z \text{ zárt}} = \frac{R_B^2 \pi p_B - R_K^2 \pi p_K}{(R_K^2 - R_B^2) \pi} = \frac{R_B^2 p_B - R_K^2 p_K}{R_K^2 - R_B^2} = \frac{\psi_K p_B - p_K}{1 - \psi_K} = \frac{0,25 \cdot 50 - 20}{1 - 0,25} = -10 \text{ MPa}.$$

A feszültségi tenzor mátrixa:
$$\underline{F}(\psi_K) = \begin{bmatrix} \sigma_R & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \Big|_{\psi_K} = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

6.7.3.2. feladat: Zárt és nyitott vastagfalú cső



Adott: az ábrán látható vastagfalú cső anyaga, terhelése és belső sugara:

$$p_B = 20 \text{ MPa}, p_K = 60 \text{ MPa},$$

$$R_B = 120 \text{ mm}, \sigma_{meg} = 125 \text{ MPa}.$$

Feladat:

a) A csődiagram jelleghelyes megrajzolása.

b) A cső szilárdságtani méretezése (az R_K sugár meghatározása), ha a cső zárt.

c) A cső szilárdságtani méretezése (az R_K sugár meghatározása), ha a cső nyitott.

Kidolgozás:

a) A csődiagram jelleghelyes megrajzolása:

$$\psi = \frac{R_B^2}{R^2},$$

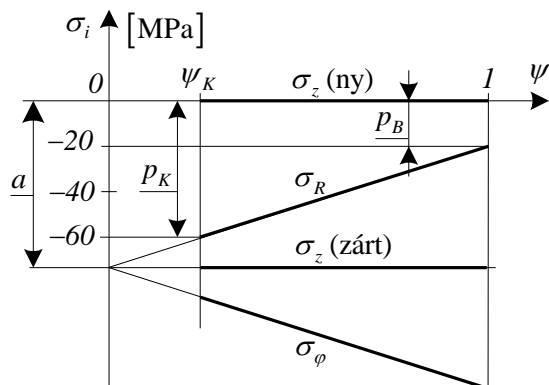
Peremfeltételek:

$$R = R_B (\psi = 1) \quad \sigma_R = -p_B = -20 \text{ MPa},$$

$$R = R_K (\psi = \psi_K) \quad \sigma_R = -p_K = -60 \text{ MPa}$$

.

A ψ_K -t önkényesen veszem fel és rajzolómba a diagramba.



b) A zárt cső szilárdságtani méretezése:

$$\sigma_{red\ max} = (\sigma_\varphi - \sigma_R)_{\psi=1} = 2 \frac{P_K - P_B}{1 - \psi_K} \leq \sigma_{meg} \Rightarrow 2 \frac{P_K - P_B}{\sigma_{meg}} \leq 1 - \psi_K,$$

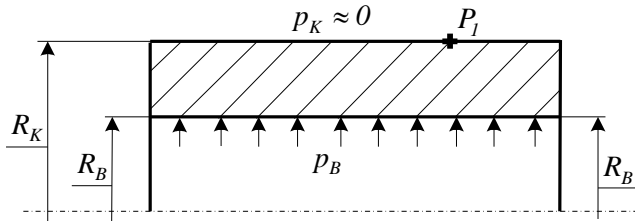
$$\psi_K = \frac{R_B^2}{R_K^2} = 1 - 2 \frac{P_K - P_B}{\sigma_{meg}} = 1 - 2 \frac{40}{125} = 1 - \frac{16}{25} = 0,36, \quad R_K = \frac{R_B}{\sqrt{\psi_K}} = \frac{120 \cdot 5}{3} = 200 \text{ mm}.$$

c) A nyitott cső szilárdságtani méretezése:

$$\sigma_{red\ max} = \sigma_\varphi (\psi = 1) = 2 \frac{P_K - P_B}{1 - \psi_K} + p_B \leq \sigma_{meg},$$

$$\psi_K = \frac{R_B^2}{R_K^2} = 1 - 2 \frac{P_K - P_B}{\sigma_{meg} - p_B} = 1 - 2 \frac{40}{105} = 0,238, \quad R_K = \frac{R_B}{\sqrt{\psi_K}} \cong 246 \text{ mm}.$$

6.7.3.3. feladat: Nyitott vastagfalú cső



Adott: az ábrán látható nyitott vastagfalú cső geometriája és terhelése:

$$R_B = 200 \text{ mm}, \quad R_K = 400 \text{ mm}, \\ p_K \approx 0, \quad p_B = 100 \text{ MPa}.$$

Feladat: a) A csődiagram megrajzolása.

b) A cső szilárdságtani ellenőrzése *Mohr*-elmélet szerint, ha $\sigma_{meg} = 210 \text{ MPa}$.

c) A feszültségi tenzor mátrixának felírása a P_1 pontban.

Kidolgozás:

a) A csődiagram:

$$\psi = \frac{R_B^2}{R^2}, \quad \psi_K = \frac{R_B^2}{R_K^2}, \quad \psi_K = \left(\frac{200}{400} \right)^2 = 0,25.$$

$$\text{A feszültségeloszlás: } \sigma_R = a - b\psi, \quad \sigma_\varphi = a + b\psi, \quad \sigma_z = 0.$$

Peremfeltételek:

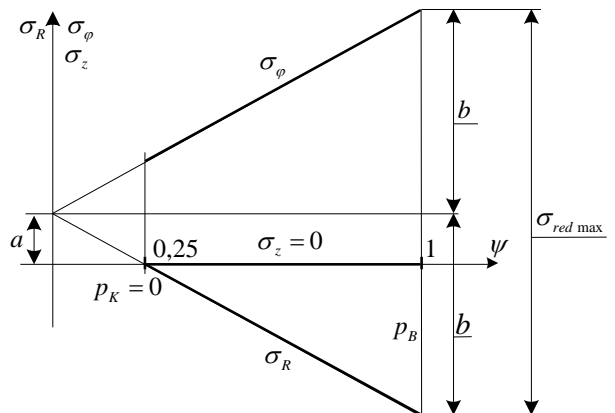
$$\sigma_R(\psi = 1) = -p_B = a - b\psi = a - b,$$

$$\sigma_R(\psi_K = 0,25) = 0 = a - b\psi_K.$$

Az együtthatók:

$$a = \psi_K \frac{p_B}{1 - \psi_K} = 0,25 \frac{100}{1 - 0,25} = 33,3,$$

$$b = \frac{p_B}{1 - \psi_K} = \frac{100}{1 - 0,25} = 133,3$$



b) Szilárdságtani ellenőrzés *Mohr*-elmélet szerint:

$$\sigma_{red\ max} (Mohr) = (\sigma_R - \sigma_\varphi)_{\psi=1}, \quad \sigma_{red\ max} (Mohr) = 2b = 2 \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K} = 2 \frac{100 - 0}{1 - 0,25} = 266,6 \text{ MPa.}$$

$\sigma_{red\ max} (Mohr) = 266,6 \text{ MPa} > \sigma_{meg} = 210 \text{ MPa}$, ezért a cső szilárdságtanilag nem felel meg!

c) A P_I pont feszültségi állapota:

$$\psi_I = \frac{R_B^2}{R_I^2} = \frac{R_B^2}{R_K^2} = 0,25$$

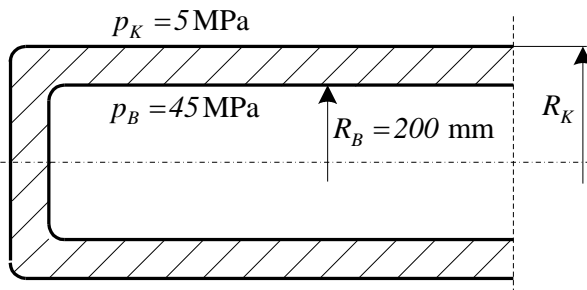
$$\sigma_R(\psi_I) = a - b\psi_I = 33,3 - 133,15 \cdot 0,25 = 0,$$

$$\sigma_\varphi(\psi_I) = a + b\psi_I = 33,3 + 133,15 \cdot 0,25 = 66,6 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_z(\psi_I) = 0.$$

$$\underline{\underline{F}}_{P_I} = \begin{bmatrix} \sigma_R(\psi_I) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi(\psi_I) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 66,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

6.7.3.4. feladat: Zárt vastagfalú cső



Adott: az ábrán látható zárt vastagfalú cső geometriája és terhelése:

$$p_B = 45 \text{ MPa}, \quad p_K = 5 \text{ MPa},$$

$$R_B = 200 \text{ mm}, \quad \psi_K = 0,6.$$

Feladat:

a) A csődiagram megrajzolása.

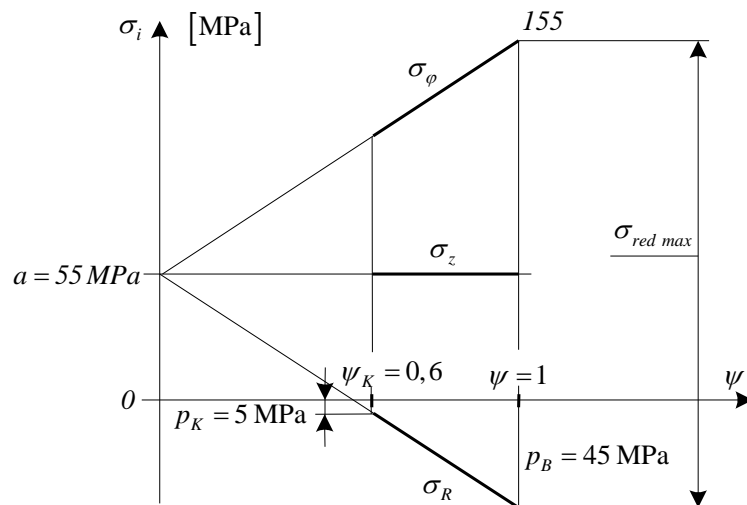
b) Az R_K külső sugár meghatározása.

c) A Mohr szerinti legnagyobb redukált feszültség kiszámítása.

d) A zárt csőben fellépő σ_z feszültség kiszámítása.

Kidolgozás:

a) A csődiagram:



b) Az R_K külső sugár meghatározása: $R_K = \frac{R_B}{\sqrt{\psi_K}}, \quad R_K = \frac{200}{\sqrt{0,6}} = 258,198 \text{ mm}.$

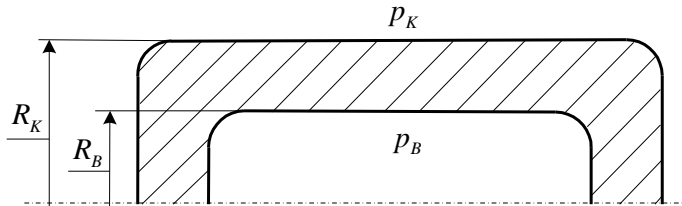
c) A Mohr szerinti legnagyobb redukált feszültség kiszámítása:

$$\sigma_{red\ max} (Mohr) = 2 \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K} = 2 \frac{45 - 5}{1 - 0,6} = 200 \text{ MPa} .$$

d) A zárt csőben fellépő σ_z feszültség kiszámítása:

$$\sigma_z = a = \frac{p_B \psi_K - p_K}{1 - \psi_K} = \frac{45 \cdot 0,6 - 5}{1 - 0,6} = \frac{22}{0,4} = 55 \text{ MPa} .$$

6.7.3.5. feladat: Zárt vastagfalú cső



Adott: az ábrán látható zárt vastagfalú cső geometriája és terhelése:

$$R_B = 200 \text{ mm} , \psi_K = 0,6 , \\ p_K = 5 \text{ MPa} , p_B = 45 \text{ MPa} .$$

Feladat: a) A cső R_K méretének meghatározása.

b) A csődiagram megrajzolása.

c) A σ_z feszültség meghatározása.

d) A Mohr szerinti legnagyobb feszültség kiszámítása.

Kidolgozás:

a) A cső R_K méretének meghatározása:

$$\psi_K = \frac{R_B^2}{R_K^2} \Rightarrow R_K = \sqrt{\frac{R_B^2}{\psi_K}} , \quad R_K = \sqrt{\frac{200^2}{0,6}} = 258,2 \text{ mm}$$

b) Csődiagram megrajzolása:

A feszültségek:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= a - b\psi \\ \sigma_\varphi &= a + b\psi \\ \sigma_z &= a \end{aligned} \right\} \psi_K = \frac{R_B^2}{R_K^2} , \quad \psi = \frac{R_B^2}{R^2} .$$

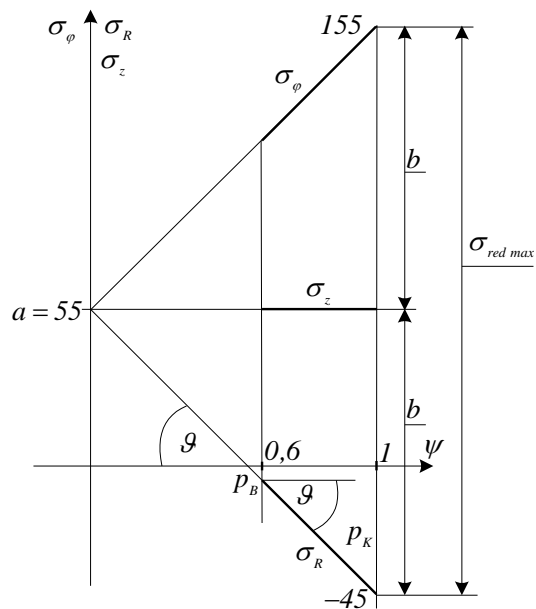
Peremfeltételek:

$$\sigma_R(\psi = 1) = -p_B = -45 \text{ MPa} ,$$

$$\sigma_R(\psi_K) = -p_K = -5 \text{ MPa} .$$

Az ábrából:

$$b = \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K} = \frac{45 - 5}{1 - 0,6} = 100 \text{ MPa} .$$



c) A tengelyirányú feszültség: $\sigma_z = a$

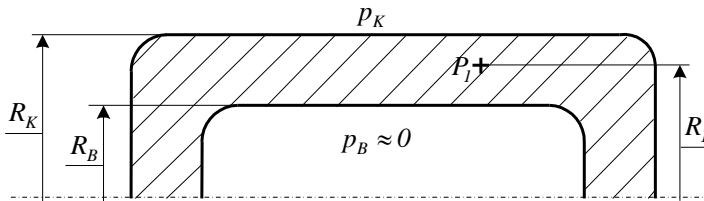
$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{a + p_K}{\psi_K} = \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K} \quad \Rightarrow \quad a = -p_K + \psi_K \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K} = -5 + 0,6 \frac{45 - 5}{1 - 0,6} = 55 \text{ MPa} .$$

$$\sigma_z = a = 55 \text{ MPa} .$$

d) A Mohr szerinti legnagyobb feszültség:

$$\sigma_{red \max}(\text{Mohr}) = 2b = \sigma_\varphi(\psi = 1) - \sigma_R(\psi = 1) = 155 - (-45) = 200 \text{ MPa} .$$

6.7.3.6. feladat: Zárt vastagfalú cső



Adott: az ábrán látható zárt vastagfalú cső geometriája és terhelése:

$$R_B = 200 \text{ mm} ,$$

$$R_I = 220 \text{ mm} ,$$

$$p_K = 120 \text{ MPa} , \quad p_B \approx 0 .$$

Feladat: a) A csődiagram jelleghelyes megrajzolása.

b) A cső R_K sugarának meghatározása, ha $\sigma_{meg} = 250 \text{ MPa}$.

c) A feszültségi tenzor mátrixának felírása a P_I pontban.

Kidolgozás:

a) Csődiagram jelleghelyes megrajzolása:

A feszültségek:

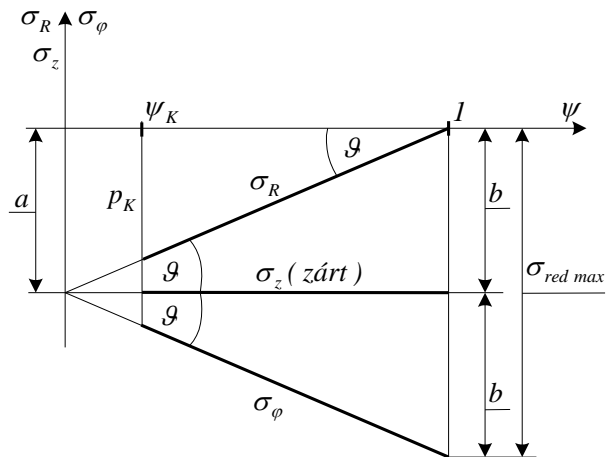
$$\left. \begin{array}{l} \sigma_R = a - b\psi \\ \sigma_\varphi = a + b\psi \\ \sigma_z = a \end{array} \right\} \psi_K = \frac{R_B^2}{R_K^2} , \quad \psi = \frac{R_B^2}{R^2}$$

Peremfeltételek:

$$\sigma_R(\psi = 1) = 0 ,$$

$$\sigma_R(\psi_K) = -p_K .$$

$$\text{Az ábrából: } \operatorname{tg} \vartheta = \frac{p_K}{1 - \psi_K} = b = a .$$



b) A cső R_K sugarának meghatározása, ha $\sigma_{meg} = 250 \text{ MPa}$.

$$\sigma_{red \max}(\text{Mohr}) = (\sigma_R - \sigma_\varphi)_{\psi=1} = 2b = \frac{2 p_K}{1 - \psi_K} ,$$

$$\sigma_{red \max} = \frac{2 p_K}{1 - \psi_K} \leq \sigma_{meg} , \quad \Rightarrow \quad \frac{2 p_K}{\sigma_{meg}} \leq 1 - \frac{R_B^2}{R_K^2} , \quad R_K \geq \frac{R_B}{\sqrt{1 - \frac{2 p_K}{\sigma_{meg}}}} = \frac{200}{\sqrt{1 - \frac{2 \cdot 120}{250}}} = 1000 \text{ mm} .$$

c) A P_I pont feszültségi állapota:
$$\psi_I = \frac{R_B^2}{R_I^2} = \left(\frac{200}{220}\right)^2 = 0,826,$$

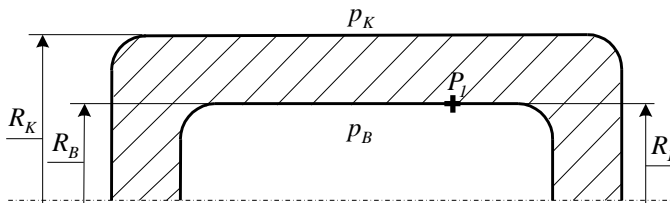
$$\sigma_R(\psi_I) = a(1 - \psi_I) = -\frac{p_K}{1 - \psi_K}(1 - \psi_I) = -\frac{120}{1 - 0,04}(1 - 0,826) = -21,75 \text{ MPa},$$

$$\sigma_\varphi(\psi_I) = a(1 + \psi_I) = -\frac{p_K}{1 - \psi_K}(1 + \psi_I) = -\frac{120}{1 - 0,04}(1 + 0,826) = -228,25 \text{ MPa},$$

$$\sigma_z = a = -\frac{p_K}{1 - \psi_K} = -\frac{120}{1 - 0,04} = -125 \text{ MPa}.$$

$$\underline{F}_{P_I} = \begin{bmatrix} \sigma_R(\psi_I) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi(\psi_I) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21,75 & 0 & 0 \\ 0 & -228,25 & 0 \\ 0 & 0 & -125 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

6.7.3.7. feladat: Zárt vastagfalú cső



Adott:

az ábrán látható zárt vastagfalú cső geometriája és terhelése:

$R_B = 200 \text{ mm}$, $R_K = 300 \text{ mm}$,
 $p_K = 50 \text{ MPa}$, $p_B = 100 \text{ MPa}$.

Feladat: a) A csődiagram megrajzolása.

b) A cső szilárdságtani ellenőrzése *Mohr*-elmélet szerint, ha a cső anyagának megengedett feszültsége $\sigma_{meg} = 100 \text{ MPa}$.

c) A feszültségi tenzor mátrixának felírása a P_I pontban.

Kidolgozás:

a) A csődiagram:

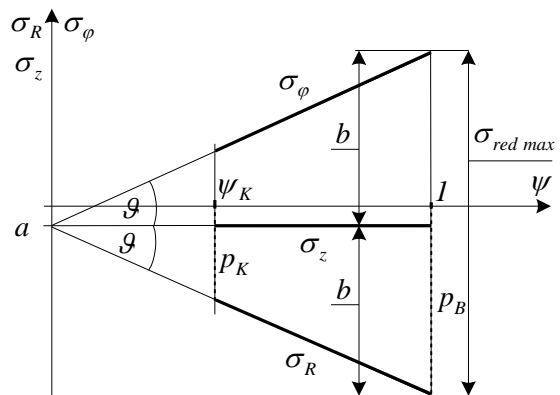
$$\psi = \frac{R_B^2}{R^2}, \quad \psi_K = \frac{R_B^2}{R_K^2},$$

$$\psi_K = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 0,444$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= a - b\psi \\ \text{A feszültségek: } \sigma_\varphi &= a + b\psi \\ \sigma_z &= a \end{aligned} \right\}$$

Peremfeltételek:

$$\sigma_R(\psi = 1) = -p_B, \quad \sigma_R(\psi_K) = -p_K.$$



b) Szilárdságtani ellenőrzés *Mohr* szerint:

$$\sigma_{red \max}(\text{Mohr}) = (\sigma_R - \sigma_\varphi)_{\psi=1},$$

$$\sigma_{red\ max} (Mohr) = 2b = 2 \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K} = 2 \frac{100 - 50}{1 - 0,444} = 180 \text{ MPa}.$$

$\sigma_{red\ max} (Mohr) = 180 \text{ MPa} > \sigma_{meg} = 100 \text{ MPa}$, ezért a cső szilárdságtanilag nem felel meg!

c) A P_I pont feszültségi állapota:

$$\psi_I = \frac{R_B^2}{R_I^2} = \frac{R_B^2}{R_B^2} = 1,$$

$$tg\vartheta = p_B - |a| = \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K} \Rightarrow |a| = p_B - \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K} = \frac{p_K - p_B \psi_K}{1 - \psi_K},$$

$$a = \frac{p_B \psi_K - p_K}{1 - \psi_K} = \frac{100 \cdot 0,4444 - 50}{1 - 0,4444} = -10 \text{ MPa}, \quad b = \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K} = \frac{100 - 50}{1 - 0,444} = 90 \text{ MPa}.$$

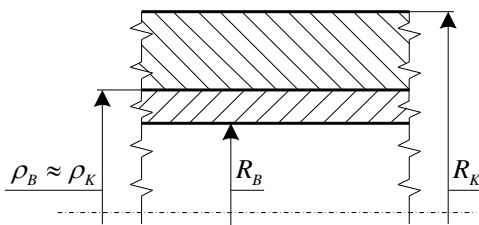
$$\sigma_r(\psi_I) = a - b\psi_I = -10 - 90 = -100 \text{ MPa},$$

$$\sigma_\varphi(\psi_I) = a + b\psi_I = -10 + 90 = 80 \text{ MPa},$$

$$\sigma_z(\psi_I) = a = -10 \text{ MPa}.$$

$$[\underline{F}_{PI}] = \begin{bmatrix} \sigma_r(\psi_I) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi(\psi_I) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

6.7.3.8. feladat: Összetett (kettősfalú) vastagfalú cső



Adott:

Az összetett (kettősfalú) cső terhelése, belső sugara valamint a $\bar{\psi}_K$ értéke, ami a $\rho = \rho_B = \rho_K$ helyet adja meg.

$$p_B = 80 \text{ MPa}, \quad p_K = 0 \text{ MPa}, \quad R_B = 100 \text{ mm},$$

$$\bar{\psi}_K = \frac{R_B^2}{\rho^2} = 0,5.$$

Feladat:

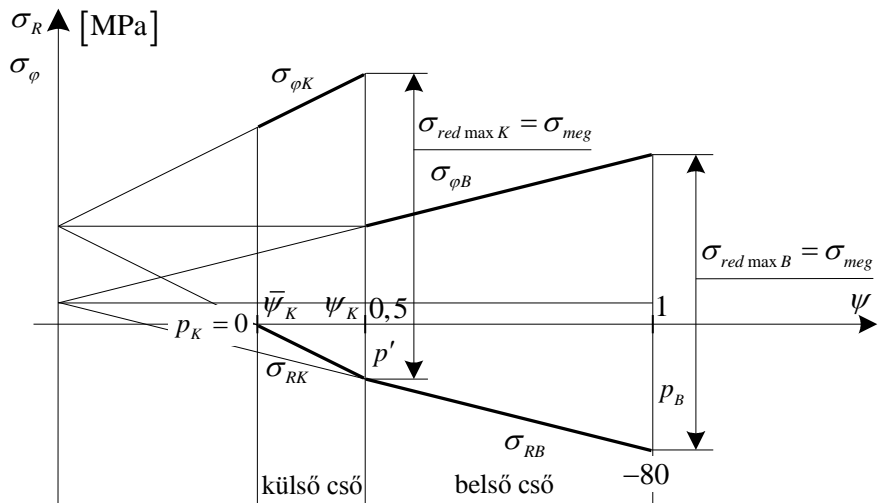
a) A csődiagram megrajzolása, ha előírjuk, hogy a legnagyobb *Mohr* szerinti redukált feszültség mindkét csőben a $\sigma_{meg} = 200 \text{ MPa}$ megengedett feszültséggel egyenlő.

b) Az összetett vastagfalú cső külső sugarának meghatározása.

Kidolgozás:

a) A csődiagram megrajzolása, ha előírjuk, hogy a legnagyobb *Mohr* szerinti redukált feszültség mindkét csőben a $\sigma_{meg} = 200 \text{ MPa}$ megengedett feszültséggel egyenlő:

Csődiagram:



A csődiagramból:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{red \max B} &= \frac{2(p_B - p')}{1 - \bar{\psi}_K} = \sigma_{meg} \\ \sigma_{red \max K} &= \frac{2\bar{\psi}_K p'}{\bar{\psi}_K - \psi_K} = \sigma_{meg} \end{aligned} \right\}$$

Két ismeretlenes lineáris egyenletrendszer, ahol az ismeretlenek: p' és ψ_K .

Az első egyenletben csak a p' ismeretlen szerepel, ami így közvetlenül meghatározható:

$$p' = -\frac{\sigma_{meg}}{2}(1 - \bar{\psi}_K) + p_B = -\frac{200}{2}(1 - 0,5) + 80 = 30 \text{ MPa}.$$

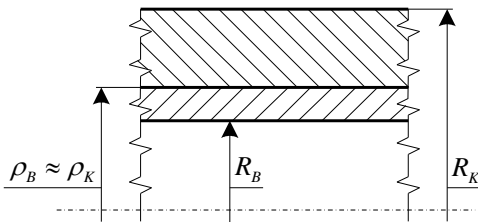
Ennek ismeretében a második egyenletből ψ_K meghatározható:

$$\psi_K = -2\bar{\psi}_K \frac{p'}{\sigma_{meg}} + \bar{\psi}_K = -\frac{3}{20} + \frac{10}{20} = 0,35.$$

b) Az összetett vastagfalú cső külső sugarának meghatározása:

$$\psi_K = \frac{R_B^2}{R_K^2} \Rightarrow R_K = \frac{R_B}{\sqrt{\psi_K}} = \frac{100}{\sqrt{0,35}} = 169 \text{ mm}.$$

6.7.3.9. feladat: Összetett (kettősfalú) vastagfalú cső



Adott:

A túlfedéssel illesztett összetett vastagfalú cső terhelése, méretei, valamint a $\bar{\psi}_K$ értéke.

$$p_B = 80 \text{ MPa}, p_K = 0 \text{ MPa}, R_B = 70 \text{ mm},$$

$$R_K = 140 \text{ mm}, \rho = \rho_B = \rho_K, \bar{\psi}_K = 0,49.$$

Feladat: a) A ψ_K értékének és a belső cső $\rho = \rho_B$ külső sugarának kiszámítása.

b) A csődiagram megrajzolása.

c) A két cső között a túlfedésből származó p^* nyomás értékének meghatározása, ha

$$\sigma_{red\ max\ K} = \sigma_{red\ max\ B} .$$

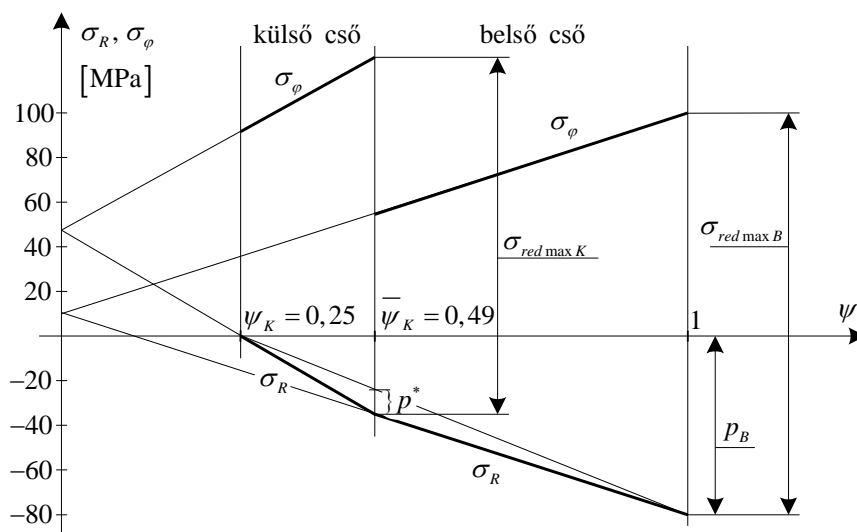
d) A két cső között a túlfedésből származó p^* nyomás lehetséges értékeinek meghatározása, ha $\sigma_{meg\ K} = \sigma_{meg\ B} = 200\ \text{MPa}$.

Kidolgozás:

a) A ψ_K értékének és a belső cső $\rho = \rho_B$ külső sugarának kiszámítása:

$$\psi_K = \frac{R_B^2}{R_K^2} = \left(\frac{70}{140}\right)^2 = 0,5^2 = 0,25, \quad \bar{\psi}_K = \frac{R_B^2}{\rho_B^2} \approx \frac{R_B^2}{\rho_K^2} \rightarrow \rho_B = \frac{R_B}{\sqrt{\psi_K}} = \frac{70}{\sqrt{0,25}} = \frac{70}{0,5} = 140\ \text{mm} .$$

b) A csődiagram megrajzolása:



c) A két cső között a túlfedésből származó p^* nyomás értékének meghatározása, ha

$$\sigma_{red\ max\ K} = \sigma_{red\ max\ B} :$$

A csődiagramról a maximális redukált feszültségek leolvashatók:

$$\sigma_{red\ max\ K} = \frac{2\bar{\psi}_K}{\bar{\psi}_K - \psi_K} \left(p_B \frac{\bar{\psi}_K - \psi_K}{1 - \psi_K} + p^* \right) = \frac{2 \cdot 0,49}{0,24} \left(80 \frac{0,24}{0,75} + p^* \right) = 104,5 + 4,083 p^* .$$

$$\sigma_{red\ max\ B} = \frac{2}{1 - \bar{\psi}_K} \left(p_B - p^* - p_B \frac{\bar{\psi}_K - \psi_K}{1 - \psi_K} \right) = \frac{2}{0,51} \left(80 - p^* - 80 \frac{0,24}{0,75} \right) = 288,1 - 3,92 p^* .$$

A feltétel szerint $\sigma_{red\ max\ K} = \sigma_{red\ max\ B}$, tehát: $104,5 + 4,083 p^* = 288,1 - 3,92 p^*$.

Az egyenlet megoldása: $p^* = 22,94\ \text{MPa}$.

Ekkor $\sigma_{red\ max\ K} = \sigma_{red\ max\ B} = 198,2\ \text{MPa}$.

d) A két cső között a túlfedésből származó p^* nyomás lehetséges értékeinek meghatározása, ha

$$\sigma_{meg\ K} = \sigma_{meg\ B} = 200\ \text{MPa} :$$

A csődiagramon megfigyelhető, hogy (változatlan nyomás esetén) p^* növelésekor $\sigma_{red\ max\ K}$ növekedni fog, míg $\sigma_{red\ max\ B}$ csökken. p^* felső korlátját tehát a külső cső megengedett feszültsége határozza meg:

$$\sigma_{red\ max\ K} = \frac{2\bar{\psi}_K}{\bar{\psi}_K - \psi_K} \left(p_B \frac{\bar{\psi}_K - \psi_K}{1 - \psi_K} + p^* \right) = \sigma_{meg} ,$$

$$\frac{2 \cdot 0,49}{0,24} \left(80 \frac{0,24}{0,75} + p^* \right) = 104,5 + 4,083 p^* = 200 \Rightarrow p^*_{max} = 23,39 \text{ MPa} .$$

A p^* csökkentésekor $\sigma_{red\ max\ K}$ csökkenni fog, míg $\sigma_{red\ max\ B}$ növekszik. A p^* alsó korlátját tehát a belső cső megengedett feszültsége határozza meg:

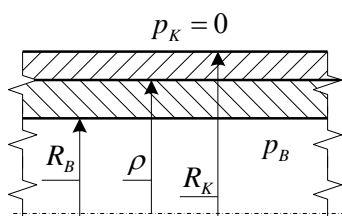
$$\sigma_{red\ max\ B} = \frac{2}{1 - \psi_K} \left(p_B - p^* - p_B \frac{\bar{\psi}_K - \psi_K}{1 - \psi_K} \right) = \sigma_{meg} ,$$

$$\frac{2}{0,51} \left(80 - p^* - 80 \frac{0,24}{0,75} \right) = 288,1 - 3,92 p^* = 200 \Rightarrow p^*_{min} = 22,47 \text{ MPa} .$$

A túlfedésből származó p^* nyomás lehetséges értékei:

$$22,47 \text{ MPa} \leq p^* \leq 23,39 \text{ MPa} .$$

6.7.3.10. feladat: Összetett (kettősfalú) vastagfalú cső



Adott: az összetett kettősfalú cső anyaga, terhelése, R_B

belső sugara valamint $\psi_K = \frac{R_B^2}{\rho^2} = 0,5$.

$\sigma_{meg} = 200 \text{ MPa}$, $R_B = 100 \text{ mm}$, $\rho = \rho_B \cong \rho_K$,

$p_B = 80 \text{ MPa}$, $p_K = 0$.

Feladat:

a) A feszültségi csődiagram megrajzolása, ha a *Mohr* szerinti legnagyobb feszültség mindkét csőben éppen a megengedett feszültséggel legyen egyenlő.

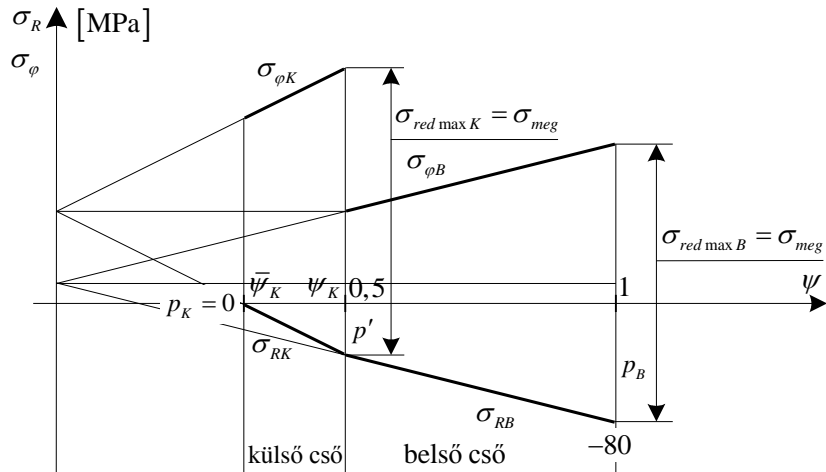
b) A cső külső sugarának meghatározása.

Kidolgozás:

a) A feszültségi diagram megrajzolása:

Jelleghelyesen megrajzoljuk a csődiagramot. Ebből:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{red\ max\ B} &= \frac{p_B - p'}{1 - \psi_K} 2 = \sigma_{meg} \\ \sigma_{red\ max\ K} &= \frac{p'}{\psi_K - \bar{\psi}_K} \psi_K 2 = \sigma_{meg} \end{aligned} \right\} \text{Itt ismeretlen: } p' \text{ és } \bar{\psi}_K .$$



Az ismeretlenek az egyenletrendszerből meghatározhatók:

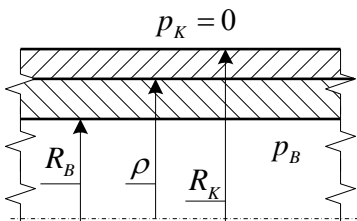
$$p' = -\frac{\sigma_{meg}}{2}(1 - \psi_K) + p_B = -100(1 - 0,5) + 80 = 30 \text{ MPa} .$$

$$\bar{\psi}_K = -2\psi_K \frac{p'}{\sigma_{meg}} + \psi_K = -\frac{3}{20} + \frac{10}{20} = \frac{7}{20} = 0,35 .$$

b) A cső külső sugarának meghatározása:

$$\bar{\psi}_K = \frac{R_B^2}{R_K^2} \Rightarrow R_K = \frac{R_B}{\sqrt{\bar{\psi}_K}} = \frac{100}{\sqrt{0,35}} \cong 169 \text{ mm} .$$

6.7.3.11. feladat: Összetett (kettősfalú) vastagfalú cső

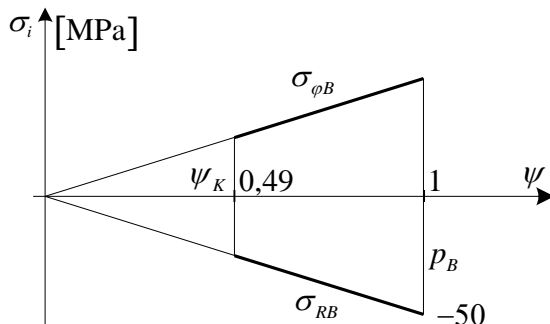


Adott: a túlfedéssel illesztett összetett (kettősfalú) cső
belső csővének $\sigma_i(\psi)$ ($i = R, \varphi$) diagramja.
méretei és terhelése:

$$R_B = 70 \text{ mm} , R_K = 140 \text{ mm} , \psi_K = 0,49 ,$$

$$p_B = 50 \text{ MPa} , p_K = 0 .$$

A belső cső diagramja:



Feladat:

- A $\bar{\psi}_K$ értékének, valamint a belső cső ρ_B külső sugarának kiszámítása.
- Az összetett cső külső csővére a feszültségi diagram megrajzolása.
- A külső cső *Mohr*-szerinti legnagyobb redukált feszültségének meghatározása.
- A két cső között a túlfedésből keletkező p nyomás értékének kiszámítása.

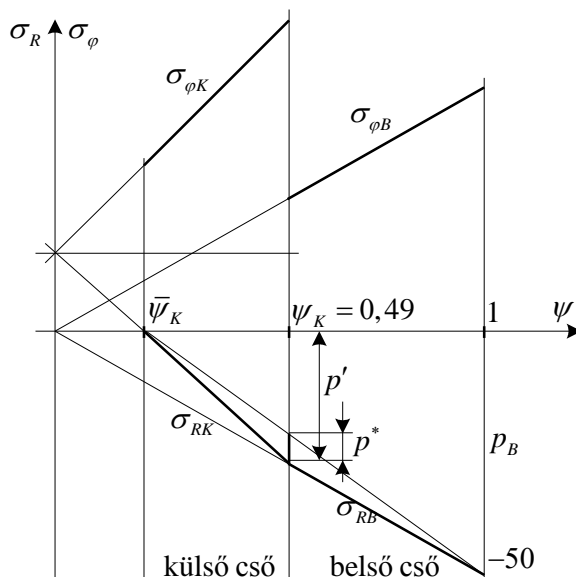
Kidolgozás:

- A $\bar{\psi}_K$ értékének, valamint a belső cső ρ_B külső sugarának kiszámítása:

$$\bar{\psi}_K = \frac{R_B^2}{R_K^2} = \left(\frac{70}{140}\right)^2 = 0,5^2 = 0,25.$$

$$\psi_K = \frac{R_B^2}{\rho_B^2} \approx \frac{R_B^2}{\rho_K^2} \Rightarrow \rho_B = \frac{R_B}{\sqrt{\psi_K}} = \frac{70}{\sqrt{0,49}} = \frac{70}{0,7} = 100 \text{ mm}.$$

- Az összetett cső külső csővére a feszültségi diagram megrajzolása:



- A külső cső *Mohr*-szerinti legnagyobb redukált feszültségének meghatározása:

$$p' = p_B \psi_K = 50 \cdot 0,49 = 24,5 \text{ MPa}, \quad \frac{\sigma_{red \max K}}{2\psi_K} = \frac{p' - p_B}{\psi_K - \bar{\psi}_K}, \quad \sigma_{red \max B} = 2p_B = 100 \text{ MPa}.$$

$$p' = -\frac{\sigma_{meg}}{2}(1 - \psi_K) + p_B = -100(1 - 0,5) + 80 = 30 \text{ MPa}.$$

$$\sigma_{red \max K} = 2\psi_K \frac{p' - p_B}{\psi_K - \bar{\psi}_K} = 0,98 \frac{24,5}{0,49 - 0,25} \approx 100,04 \text{ MPa}.$$

- A két cső között a túlfedésből keletkező p nyomás értékének kiszámítása.

$$p^* = p' - \frac{p_B}{1 - \psi_K}(\psi_K - \bar{\psi}_K) = 24,5 - \frac{4 \cdot 50}{3} 0,24 = 8,5 \text{ MPa}.$$