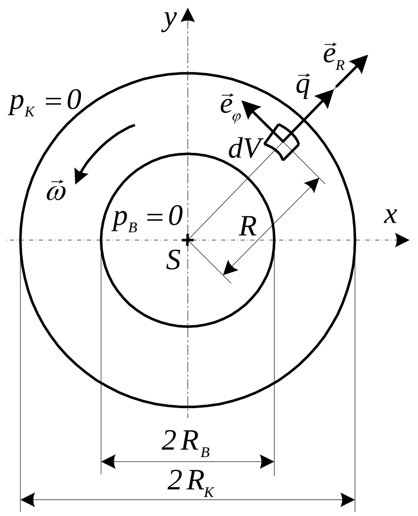
6.8. Gyorsan forgó tengelyek, csőtengelyek



Kiinduló feltételezések:

- ω= állandó,
- a súlyerő ≈ 0,
- $p_B = p_K = 0$.

A szilárdságtani állapotokat henger koordináta-rendszerben (HKR-ben) írjuk le.

Forgás $\Rightarrow$ a gyorsulásból származó, a térfogaton megoszló erőrendszer:

$$\vec{q} = q_R\,\vec{e}_R = \rho R\omega^2\vec{e}_R = \frac{\gamma}{g}R\omega^2\vec{e}_R\,.$$

$\rho -$ a tömegsűrűség $\left[\mathrm{kg/m^3}\right]$,

$\gamma -$ a fajsúly $\left[\mathrm{N/m^3}\right]$,

$g -$ a gravitációs gyorsulás $\left[\mathrm{m/s^2}\right]$.

A $\vec{q} = q_R\,\vec{e}_R$ a tengely/csőtengely keresztmetszetének síkjába esik, ezért az alakváltozás során a keresztmetszetek síkok maradnak.

<u>A feladat megoldása:</u> SA + tiszta húzás-nyomás $\Rightarrow$ $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}' + \underline{\underline{F}}''$.

a) <u>Sík alakváltozás:</u>

Ebben az esetben a biharmonikus differenciálegyenlet nem homogén, a jobboldalon megjelenik egy, az ω-tól függő tag.

Biharmonikus differenciál egyenlet: $\Delta\Delta U = -2\dfrac{1-2\nu}{1-\nu}\rho\omega^2$.

Tengelyszimmetrikus esetben: $\dfrac{1}{R}\dfrac{d}{dR}\left\{R\dfrac{d}{dR}\left[\dfrac{1}{R}\dfrac{d}{dR}\left(R\dfrac{dU}{dR}\right)\right]\right\} = 2\dfrac{1-2\nu}{1-\nu}\dfrac{\gamma}{g}\omega^2 =$állandó.

Megoldás: $U(R) = U_h(R) + U_p(R)$.

$$U(R) = \frac{A}{2}R^2 + B\ln R + C + \left(DR^2\ln R\right) + 2\frac{1-2\nu}{1-\nu}\frac{\gamma}{g}\omega^2\frac{R^4}{64} =$$

$$= \frac{A}{2}R^2 + B\ln R + C + 2\frac{1-2\nu}{1-\nu}\frac{\gamma}{g}\omega^2\frac{R^4}{64}\,.$$

Megjegyzés: a $\left(DR^2\ln R\right)$ tagot azért hagyjuk el, mert nem ad egyértékű elmozdulásmezőt kör és körgyűrű tartományon.

Új változó bevezetése: $\lambda = \dfrac{R^2}{R_K^2}$.

Az $U = U(R)$ függvényből származtatott feszültségek:

$$\left.\begin{aligned}\sigma'_R &= a-\frac{b}{\lambda}-\sigma_{\omega 0}\lambda\\ \sigma'_\varphi &= a+\frac{b}{\lambda}-\mu_1\sigma_{\omega 0}\lambda\\ \sigma'_z &= \nu\left(\sigma'_R+\sigma'_\varphi\right)\end{aligned}\right\}$$

Szögsebességtől és anyagtól függőállandók:

$$\sigma_{\omega 0}=\frac{3-2\nu}{1-\nu}\frac{\rho}{8}\left(R_K\,\omega\right)^2,$$

$$\mu_1=\frac{1+2\nu}{3-2\nu}<1.$$

b) <u>Tiszta húzás:</u>

A húzó-nyomó erőt olyan nagyságúra kell felvenni, hogy a szuperpozíció után zérus tengely irányú erőt kapjunk.

$$N=N'+N''=0.$$

$$N=\int_{R_B}^{R_K}\sigma'_z 2R\pi\,dR+N''=0\,. \qquad \sigma'_z=\nu\left(\sigma'_R+\sigma'_\varphi\right)=\nu\,2a-\nu\,\sigma_{\omega 0}\left(1+\mu\right)\lambda\,.$$

Behelyettesítve és átrendezve:

$$N''=-2\pi a\nu\left(R_K^2-R_B^2\right)+\nu\,\sigma_{\omega 0}\left(1-\mu_1\right)\pi R_K^2\int_{\lambda_B}^{1}\lambda\,d\lambda\,, \qquad d\lambda=2R\frac{1}{R_K^2}dR\,,$$

$$N''=-2\pi a\nu\left({R^2}_K-{R^2}_B\right)+\nu\,\sigma_{\omega 0}\left(1-\mu_1\right)\pi\frac{1}{2}\left(1-\lambda_B^2\right)R_K^2\,.$$

$$\sigma''_z=\frac{N''}{A}\,.$$

c) <u>Szuperpozíció:</u> forgó csőtengely/tengely

$$\left.\begin{aligned}\sigma_R &= \sigma'_R=a-\frac{b}{\lambda}-\sigma_{\omega 0}\lambda\,,\\ \sigma_\varphi &= \sigma'_\varphi=a+\frac{b}{\lambda}-\mu_1\sigma_{\omega 0}\lambda\,,\\ \sigma_z &= \sigma'_z+\sigma''_z=\mu_2\sigma_{\omega 0}\left(1+\lambda_B-2\lambda\right).\end{aligned}\right\}.$$

Anyagtól függő állandó:

$$\mu_2=\frac{2\nu}{3\text{-}2\nu}<1, \qquad \mu_2<\mu_1.$$

A konstansok meghatározása a peremfeltételekből:

$$\left.\begin{aligned}R=R_B \quad \left(\lambda=\lambda_B\right) \quad \sigma_R=0=a-\frac{b}{\lambda}-\sigma_{\omega 0}\lambda\\ R=R_K \quad \left(\lambda=1\right) \quad \sigma_R=0=a-\frac{b}{\lambda}-\sigma_{\omega 0}\end{aligned}\right\}$$

Az a és a b állandók ebből a két egyenletből meghatározhatók.

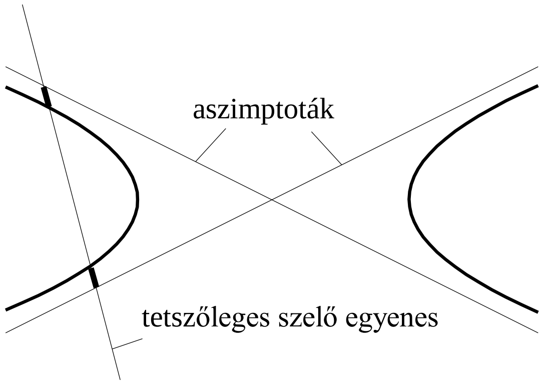
Jelölés: $$\left.\begin{aligned}h_R &= a-\frac{b}{\lambda}\\ h_\varphi &= a+\frac{b}{\lambda}\end{aligned}\right\}\ \text{hiperbolák.}$$

A hiperbolák aszimptotái:

Ha $\lambda \to 0$, akkor $h_R \to -\infty$, $h_\varphi \to \infty$,

Ha $\lambda \to \infty$, akkor $h_R \to a$, $h_\varphi \to a$.

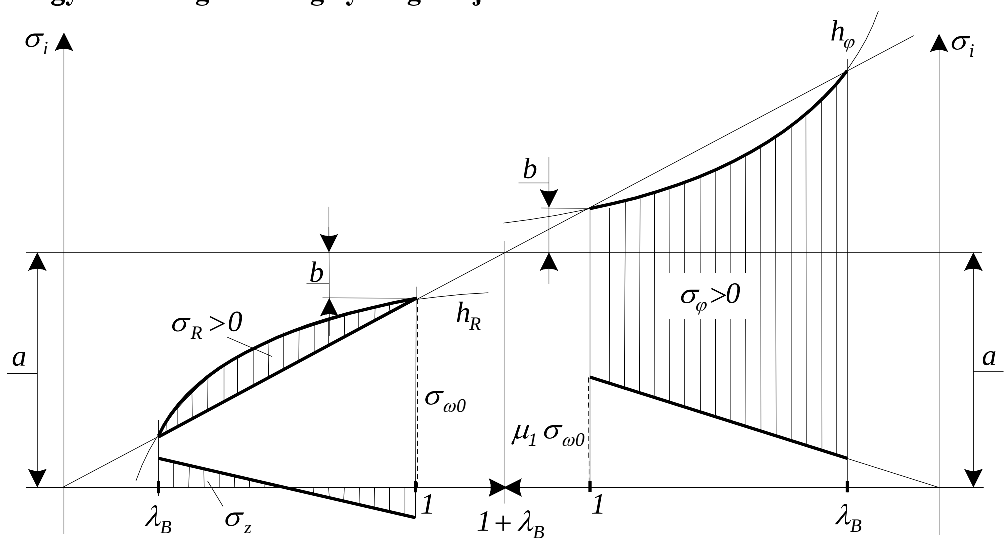
A hiperbolák tulajdonsága:



Egy tetszőleges szelő egyenes a hiperbolán és az aszimptotán levő pontjainak távolsága azonos.

Az azonos távolságokat (szakaszokat) az ábrán vastag vonal jelöli.

6.8.1. A gyorsan forgó csőtengely diagramja



A csőtengely diagram megrajzolásának gondolatmenete:

- Megrajzoljuk a $\sigma_{\omega 0}\lambda$ egyenest.
- Felvesszük a h_R és h_φ hiperbola aszimptótáit: a σ_i függőleges és a $\sigma = a$ vízszintes egyeneseket.
- A peremfeltételekből ($\lambda = 1-$nél $\sigma_R = 0$ és $\lambda_B -$nél $\sigma_R = 0$) meghatározzuk a h_R hiperbola két pontját, majd felrajzoljuk a h_R hiperbolát.
- Berajzoljuk a h_φ hiperbolát és a $\mu_1 \sigma_{\omega 0}\lambda$ egyenest.

Az a és b állandók meghatározása peremfeltételekből:

$$\sigma_R\big|_{\lambda_B} = 0 = a - \frac{b}{\lambda_B} - \sigma_{\omega 0}\lambda_B\,, \qquad \sigma_R\big|_{\lambda=1} = 0 = a - b - \sigma_{\omega 0}\,.$$

A második peremfeltételből: $a = b + \sigma_{\omega 0}$.

Ezt behelyettesítve az első peremfeltételbe: $0 = b - \dfrac{b}{\lambda_B} + \sigma_{\omega 0}\left(1+\lambda_B\right)$,

$$0 = -\frac{b}{\lambda_B}\left(1-\lambda_B\right) + \sigma_{\omega 0}\left(1+\lambda_B\right) \;\Rightarrow\; b = \lambda_B \sigma_{\omega 0}.$$

Visszahelyettesítve a második peremfeltételbe: $a = \left(1+\lambda_B\right)\sigma_{\omega 0}$.

A gyorsan forgó csőtengely tetszőleges P pontjának feszültségállapota:

$$\left[\underline{\underline{F}}\right] = \left[\underline{\underline{F}}(R)\right] = \left[\underline{\underline{F}}'\right] + \left[\underline{\underline{F}}''\right] = \begin{bmatrix} \sigma_R & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix},$$ ahol σ_R, σ_φ, σ_z főfeszültségek.

Maximális redukált feszültség:

$$\sigma_{red\,max}\left(Mohr\right) = \left(\sigma_1 - \sigma_3\right) = \sigma_\varphi\left(\lambda_B\right) = a + \frac{b}{\lambda_B} - \mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda_B .$$

A peremfeltételekből meghatározott a, b értéket behelyettesítve:

$$\sigma_{red\,max}\left(Mohr\right) = \left(1+\lambda_B\right)\sigma_{\omega 0} + \lambda_B \sigma_{\omega 0}\frac{1}{\lambda_B}\left(-\mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda_B\right),$$

$$\sigma_{red\,max}\left(Mohr\right) = \sigma_{\omega 0}\left(2 + \lambda_B - \mu_1 \lambda_B\right).$$

6.8.2. A gyorsan forgó tengely diagramja

Tömör/furat nélküli tengely: $R_B = 0 \;\left(\lambda_B = 0\right)$.

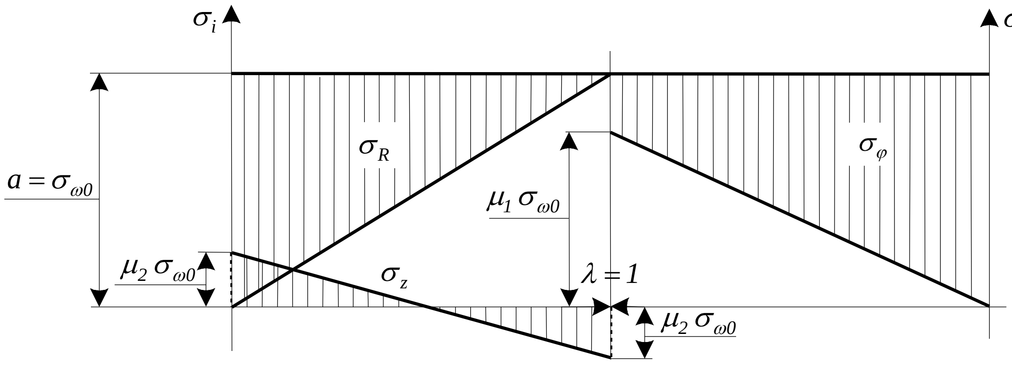
Tapasztalat: $R = 0 \;\left(\lambda = 0\right)$-nál is véges nagyságúak a feszültségek $\Rightarrow\; b = 0$.

Feszültségek: $\sigma_R = a - \sigma_{\omega 0}\lambda$,

$\sigma_\varphi = a - \mu \sigma_{\omega 0}\lambda$,

$\sigma_z = \mu_2 \sigma_{\omega 0}\left(1 - 2\lambda\right)$.

Peremfeltétel: $R = R_K \left(\lambda = 1\right)$ $\quad \sigma_R = 0 = a - \sigma_{\omega 0} \;\Rightarrow\; a = \sigma_{\omega 0}$.

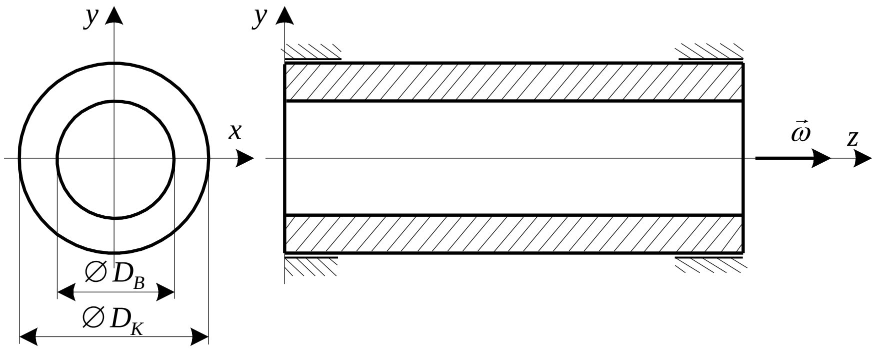


A *Mohr* szerint számított redukált feszültség:

$$\sigma_{red}\left(Mohr\right)\Big|_{\lambda=0}=\left(\sigma_R-\sigma_z\right)\Big|_{\lambda=0}=\sigma_{\omega 0}\left(1-\mu_2\right),$$
$$\sigma_{red}\left(Mohr\right)\Big|_{\lambda=1}=\left(\sigma_\varphi-\sigma_z\right)\Big|_{\lambda=1}=\sigma_{\omega 0}\left(1-\mu_1+\mu_2\right).$$

6.8.3. Gyakorló feladatok gyorsan forgó csőtengelyekre, tengelyekre

6.8.3.1. feladat: Gyorsan forgó csőtengely



Adott: Az ábrán látható gyorsan forgó csőtengely anyaga, geometriája és szögsebessége:

$D_B=400$ mm, $D_K=600$ mm, $\omega=200$ rad / s = állandó, $\rho=8000$ kg / m^3, $\nu=1/3$.

Feladat: a) A λ_B és $\sigma_{\omega 0}$ mennyiségek meghatározása.

b) A $\sigma_R\left(\lambda\right),\sigma_\varphi\left(\lambda\right)$ és $\sigma_z\left(\lambda\right)$ feszültségi diagramok megrajzolása.

c) Az $R_K=D_K/2$ helyen levő *P* pontokban a feszültségi tenzor mátrixának felírása az R, φ, z henger koordináta-rendszerben.

d) A *Mohr*-féle elmélet szerinti legnagyobb redukált feszültség kiszámítása.

Kidolgozás:

a) A λ_B és $\sigma_{\omega 0}$ mennyiségek meghatározása:

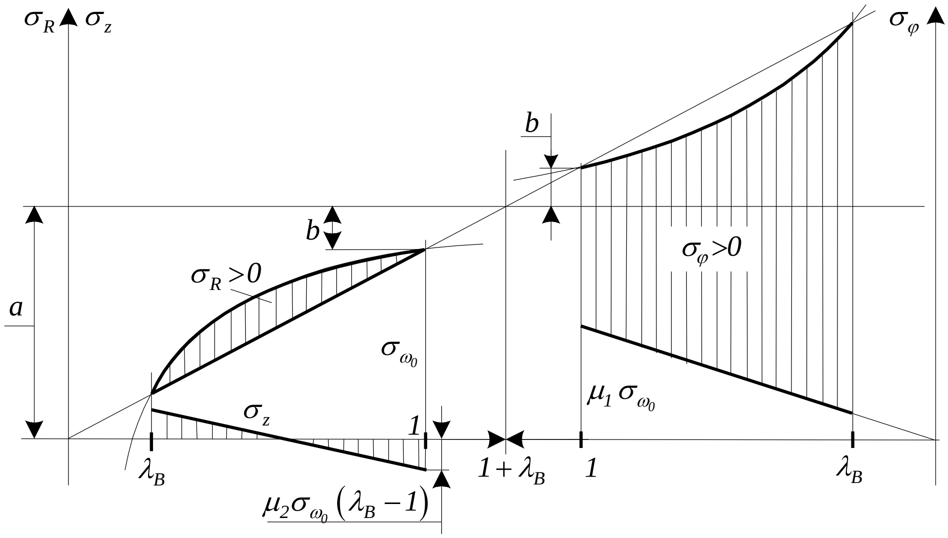
$$\lambda_B=\frac{R_B^2}{R_K^2}=\left(\frac{200}{300}\right)^2=0,44444,$$

$$\sigma_{\omega 0}=\frac{\left(3-2\nu\right)}{\left(1-\nu\right)}\frac{\rho}{8}\left(R_K\,\omega\right)^2=\frac{\left(3-2\cdot 0,33333\right)10^3}{1-0,33333}\left(0,3\cdot 200\right)^2=12,6\cdot 10^6\ \text{Pa}=12,6\ \text{MPa}.$$

b) A $\sigma_R\left(\lambda\right),\sigma_\varphi\left(\lambda\right)$ és $\sigma_z\left(\lambda\right)$ feszültségi diagramok megrajzolása:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_R&=a-\frac{b}{\lambda}-\sigma_{\omega 0}\lambda\\ \sigma_\varphi&=a+\frac{b}{\lambda}-\mu_1\sigma_{\omega 0}\lambda\\ \sigma_z&=\mu_2\,\sigma_{\omega 0}\left(1+\lambda_B-2\lambda\right)\end{aligned}\right\}\ \text{A vastagság menti feszültségeloszlás függvényei.}$$

Peremfeltételek: $\sigma_R(\lambda=\lambda_B)=0,\qquad \sigma_R(\lambda=1)=0$.



$$\lambda = \frac{R^2}{R_K^2}\,,\quad \mu_1 = \frac{1+2\nu}{3-2\nu} = \frac{1+2\cdot 0{,}3333}{3-2\cdot 0{,}3333} = 0{,}714\,,\quad \mu_2 = \frac{2\nu}{3-2\nu} = \frac{2\cdot 0{,}3333}{3-2\cdot 0{,}3333} = 0{,}285\,.$$

c) Az $R_K = D_K/2$ helyen levő P pontokban a feszültségi tenzor mátrixának felírása R,φ,z henger koordináta-rendszerben:

A diagramból:

$\sigma_R(\lambda = 1) = 0$,

$\sigma_\varphi(\lambda = 1) = \sigma_{\omega_0}(1+2\lambda_B) - \mu_1\sigma_{\omega_0} = 12{,}6(1+2\cdot 0{,}4444 - 0{,}714) = 14{,}8\ MPa$,

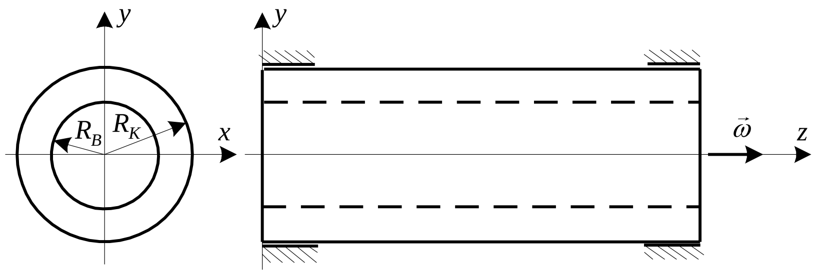
$\sigma_z(\lambda = 1) = \mu_2\sigma_{\omega_0}(\lambda_B - 1) = 0{,}285\cdot 12{,}6(0{,}44444 - 1) = -2\ MPa$.

A feszültségi tenzor mátrixa: $\left[\underline{\underline{F}}_{R\varphi z}\right](\lambda = 1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ MPa.

d) A *Mohr*-féle elmélet szerinti legnagyobb redukált feszültség kiszámítása:

$$\sigma_{red\,max} = \sigma_\varphi\Big|_{\lambda_B} = \sigma_{\omega_0}(2+\lambda_B) - \mu_1\sigma_{\omega_0}\lambda_B = 12{,}6(2+0{,}4444 - 0{,}314) = 26{,}79\ MPa\,.$$

6.8.3.2. feladat: Gyorsan forgó csőtengely



Adott: Az ábrán látható, $\vec{\omega}$ = állandó szögsebességgel gyorsan forgó csőtengely:

$R_K = 200\sqrt{2}$ mm , $\sigma_{\omega_0} = 200$ MPa , $\rho = 8000$ kg / m^3 , $\nu = 0{,}25$; $E = 2 \cdot 10^5$ MPa .

Feladat:

a) A $\sigma_R(\lambda), \sigma_\varphi(\lambda)$ és $\sigma_z(\lambda)$ feszültségi diagramok jelleghelyes megrajzolása.

b) Az R_B belső sugár értékének meghatározása, ha $\sigma_\varphi(\lambda_B) = 440$ MPa .

c) Az R_K helyen kialakuló feszültségi állapot meghatározása.

d) A csőtengely külső átmérőjének ΔD_K megváltozásának kiszámítása.

e) A csőtengely legnagyobb megengedett szögsebességének meghatározása, ha az anyag megengedett feszültsége $\sigma_{meg} = 110$ MPa .

Kidolgozás:

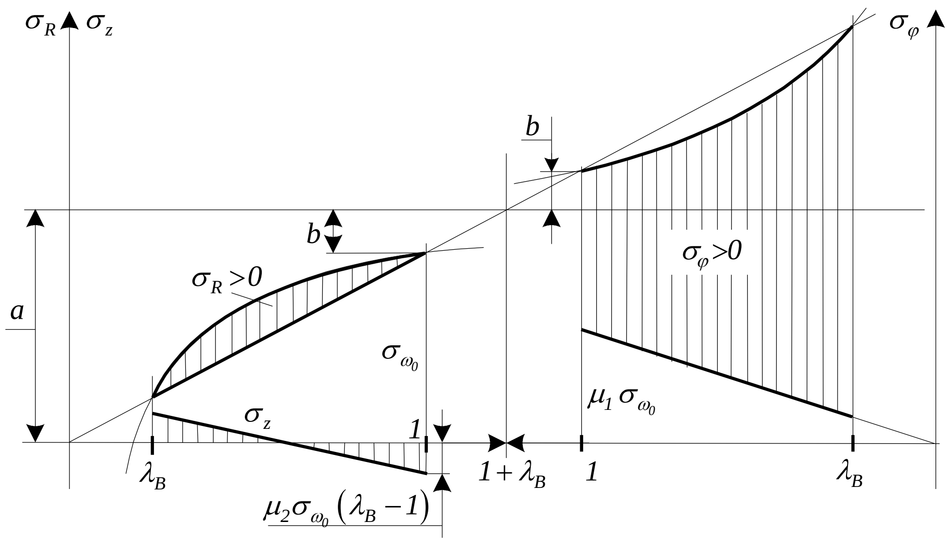
a) A $\sigma_R(\lambda), \sigma_\varphi(\lambda)$ és $\sigma_z(\lambda)$ feszültségi diagramok jelleghelyes megrajzolása:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_R &= a - \frac{b}{\lambda} - \sigma_{\omega 0}\lambda \\ \sigma_\varphi &= a + \frac{b}{\lambda} - \mu_1 \sigma_{\omega 0}\lambda \\ \sigma_z &= \mu_2\, \sigma_{\omega 0}\left(1 + \lambda_B - 2\lambda\right) \end{aligned}\right\} \text{ A feszültségek vastagság menti eloszlása.}$$

$$\lambda = \frac{R^2}{R_K^2}, \quad \mu_1 = \frac{1+2\nu}{3-2\nu} = \frac{1+2\cdot 0{,}25}{3-2\cdot 0{,}25} = 0{,}6, \quad \mu_2 = \frac{2\nu}{3-2\nu} = \frac{2\cdot 0{,}25}{3-2\cdot 0{,}25} = 0{,}2 .$$

Peremfeltételek: $\sigma_R(\lambda = \lambda_B) = 0,\qquad \sigma_R(\lambda = 1) = 0$.

A gyorsan forgó csőtengely diagramja:



b) Az R_B belső sugár értékének meghatározása, ha $\sigma_\varphi(\lambda_B) = 440$ MPa :

A diagramból: $\sigma_\varphi\big|_{\lambda_B} = \sigma_{\omega_0}(2 + \lambda_B) - \mu_1 \sigma_{\omega_0}\lambda_B = 2\sigma_{\omega_0} + \lambda_B \sigma_{\omega_0}(1 - \mu_1)$,

$$440 = 2\cdot 200 + \lambda_B 200\left(1-0{,}6\right) = 400 + \lambda_B 80\,,$$

$$40 = \lambda_B 80 \;\Rightarrow\; \lambda_B = 0{,}5\,.$$

$$\lambda_B = \frac{R_B^2}{R_K^2} \;\Rightarrow\; R_B = R_K\sqrt{\lambda_B} = 200\cdot\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = 200 \text{ mm}\,,$$

$R_B = 200$ mm.

c) Az R_K helyen kialakuló feszültségi állapot meghatározása:

$R = R_K$ esetén $\lambda = \dfrac{R^2}{R_K^2} = \dfrac{R_K^2}{R_K^2} = 1$. $\quad \sigma_R\left(\lambda = 1\right) = 0$,

$$\sigma_\varphi\left(\lambda=1\right) = \sigma_{\omega_0}\left(1+2\lambda_B\right) - \mu_1\sigma_{\omega_0} =$$

$$= 200\left(1+1-0{,}6\right) = 280\,\text{MPa}\,,$$

$$\sigma_z\left(\lambda=1\right) = \mu_2\sigma_{\omega_0}\left(\lambda_B - 1\right) = -0{,}2\cdot 200\cdot 0{,}5 = -20\,\text{MPa}\,.$$

A feszültségi tenzor:

$$\left[\underline{\underline{F}}\right]_{R\varphi z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 280 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{bmatrix} \text{MPa.}$$

d) A csőtengely külső átmérőjének ΔD_K megváltozása:

$$G = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)} = \frac{2\cdot 10^5}{2\left(1+0{,}25\right)} = 8\cdot 10^4 \text{ MPa}\,.$$

$$\varepsilon_\varphi\left(R = R_K\right) = \varepsilon_{\varphi K} = \frac{1}{2G}\left[\sigma_\varphi - \nu\frac{\left(\sigma_\varphi + \sigma_z\right)}{\left(1+\nu\right)}\right] = \frac{1}{2\cdot 8\cdot 10^4}\left(280 - 0{,}25\frac{260}{1{,}25}\right) = 14{,}25\cdot 10^{-4}\,,$$

$$\Delta D_K = 2u_R\big|_{R_K} = 2R_K\varepsilon_{\varphi K} = 2\cdot 200\sqrt{2}\cdot 14{,}25\cdot 10^{-4} = 80{,}37\cdot 10^{-2}\,\text{mm.}$$

$$\Delta D_K \cong 0{,}8 \text{ mm}\,.$$

e) A csőtengely legnagyobb megengedett ω_{max} szögsebessége, ha $\sigma_{meg} = 110$ MPa :

$$\sigma_{red\ max} \le \sigma_{meg}\,,$$

$$\sigma_{\omega 0}\left(2+\lambda_B\right) - \mu_1\sigma_{\omega 0}\lambda_B \le \sigma_{meg}\,,$$

$$\frac{\left(3-2\nu\right)}{\left(1-\nu\right)}\frac{\rho}{8}\left(R_K\,\omega\right)^2\left(2+\lambda_B - \mu_1\lambda_B\right) \le \sigma_{meg}\,,$$

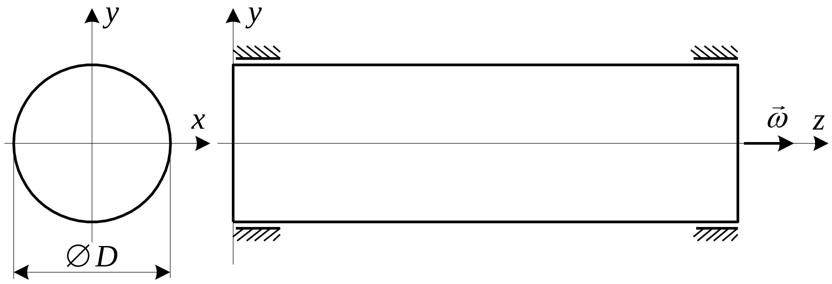
$$\left(R_K\,\omega_{max}\right)^2 = \frac{\sigma_{meg}}{\left(2+\lambda_B-\mu_1\lambda_B\right)}\frac{8}{\rho}\frac{\left(1-\nu\right)}{\left(3-2\nu\right)} = \frac{110\cdot 10^6}{2{,}2}0{,}3\cdot 10^{-3} = 1{,}5\cdot 10^4 \text{ m}^2/\text{s}^2\,,$$

$$R_K\,\omega_{max} = \sqrt{1{,}5\cdot 10^4} = 122{,}47 \text{ m/s}\,,$$

$$\omega_{max} = \frac{122{,}47}{R_K} = \frac{122{,}47}{0{,}2\sqrt{2}} = 434\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}\,.$$

A megengedett legnagyobb fordulatszám: $n_{max} = \dfrac{60\,\omega_{max}}{2\pi} = \dfrac{60\cdot 434}{6{,}282} = 4148\,\dfrac{\text{ford}}{\text{min}}$.

6.8.3.3. feladat: Gyorsan forgó tengely



Adott: A hosszú tömör D átmérőjű tengely, amely $\vec{\omega} =$ állandó szögsebességgel forog.

$D = 400$ mm, $\rho = 8000$ kg / m^3, $\nu = 0{,}25$, $\sigma_{\omega 0} = 40$ MPa.

Feladat:

a) A $\sigma_R(\lambda), \sigma_\varphi(\lambda)$ és $\sigma_z(\lambda)$ feszültségi diagramok megrajzolása.

b) A *Mohr*-féle elmélet alapján számított redukált feszültség maximumának kiszámítása.

c) A tengely megengedett legnagyobb fordulatszámának meghatározása, ha $\sigma_{meg} = 80$ MPa .

Kidolgozás:

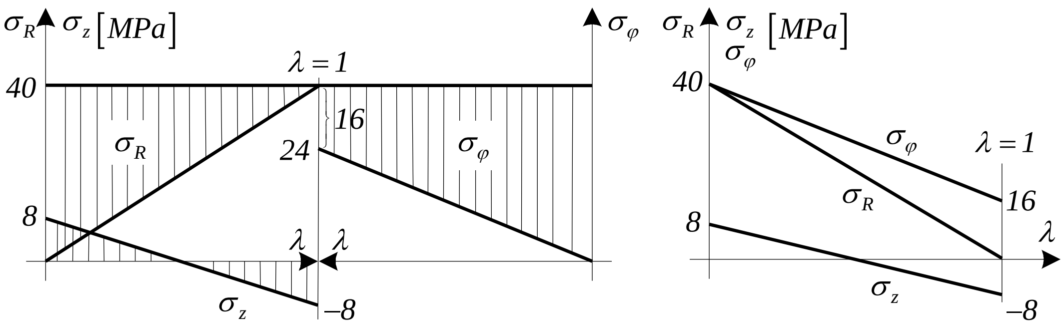
a) Feszültségi diagramok megrajzolása:

$$\lambda = \frac{R^2}{R_K^2}, \quad \mu_1 = \frac{1+2\nu}{3-2\nu} = \frac{1+2\cdot 0{,}25}{3-2\cdot 0{,}25} = \frac{1{,}5}{2{,}5} = 0{,}6, \quad \mu_2 = \frac{2\nu}{3-2\nu} = \frac{2\cdot 0{,}25}{3-2\cdot 0{,}25} = \frac{0{,}5}{2{,}5} = 0{,}2 .$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_R &= a - \sigma_{\omega 0}\lambda \\ \sigma_\varphi &= a - \mu_1 \sigma_{\omega 0}\lambda \\ \sigma_z &= \mu_2\, \sigma_{\omega 0}(1-2\lambda) \end{aligned}\right\} \text{ A feszültségeloszlás függvényei.}$$

Peremfeltétel: $R = R_K\ (\lambda = 1) \;\Rightarrow\; \sigma_R = 0 = a - \sigma_{\omega 0} = 0 \;\Rightarrow\; a = \sigma_{\omega 0} = 40$ MPa .

A gyorsan forgó tengely diagramja két alakban:



Feszültségek az $R=0$ és $R = R_K$ helyen:

$R=0$ $\qquad \sigma_R(\lambda = 0) = a - \sigma_{\omega 0}\lambda = 40 - 40\cdot 0 = 40$ MPa.

$R = R_K$ $\qquad \sigma_R(\lambda = 1) = a - \sigma_{\omega 0}\lambda = 40 - 40\cdot 1 = 0$ MPa.

$R=0 \qquad \sigma_\varphi\left(\lambda=0\right)=a-\mu_1\sigma_{\omega 0}\lambda=40-0{,}6\cdot 40\cdot 0=40$ MPa.

$R=R_K \qquad \sigma_\varphi\left(\lambda=1\right)=a-\mu_1\sigma_{\omega 0}\lambda=40-0{,}6\cdot 40\cdot 1=16$ MPa.

$R=0 \qquad \sigma_z\left(\lambda=0\right)=\mu_2\,\sigma_{\omega 0}\left(1-2\lambda\right)=0{,}2\cdot 40\left(1-2\cdot 0\right)=8$ MPa.

$R=R_K \qquad \sigma_z\left(\lambda=1\right)=\mu_2\,\sigma_{\omega 0}\left(1-2\lambda\right)=0{,}2\cdot 40\left(1-2\cdot 1\right)=-8$ MPa .

b) A *Mohr* szerinti redukált feszültség:

$$\sigma_{red}\left(Mohr\right)\Big|_{\lambda=0}=\left(\sigma_R-\sigma_z\right)=40-8=\sigma_{\omega 0}\left(1-\mu_2\right)=40\left(1-0{,}2\right)=40\cdot 0{,}8=32\,\text{MPa}\,,$$

$$\sigma_{red}\left(Mohr\right)\Big|_{\lambda=1}=\left(\sigma_\varphi-\sigma_z\right)=16-\left(-8\right)=\sigma_{\omega 0}\left(1-\mu_1+\mu_2\right)=40\left(1-0{,}6+0{,}2\right)=24\,\text{MPa}\,,$$

Maximális redukált feszültség: $\sigma_{red\,max}\left(Mohr\right)\Big|_{\lambda=0}=\left(\sigma_R-\sigma_z\right)=32\,\text{MPa}$.

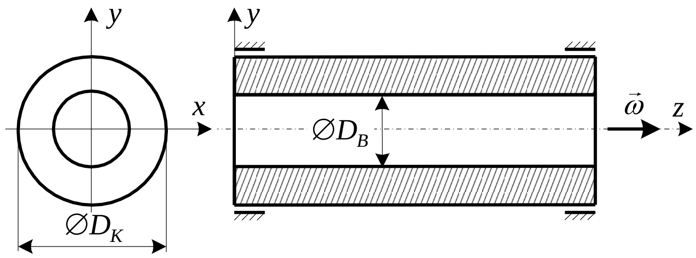
c) A maximális fordulatszám:

$$\sigma_{meg}\le\sigma_{red\,max}(\,Mohr\,)=\sigma_{red}\left(Mohr\right)\Big|_{\lambda=0}=\sigma_{\omega 0}\left(1-\mu_2\right)=\frac{\left(3-2\nu\right)}{\left(1-\nu\right)}\frac{\rho}{8}\left(R_K\,\omega\right)^2\left(1-\mu_2\right)\,,$$

$$\omega_{max}=\sqrt{\frac{\sigma_{meg}\left(1-\nu\right)8}{\left(3-2\nu\right)\rho R_K^2\left(1-\mu_2\right)}}=\sqrt{\frac{80\cdot 10^6\left(1-0{,}25\right)\cdot 8}{\left(3-2\cdot 0{,}25\right)\cdot 8000\cdot 0{,}2^2\left(1-0{,}2\right)}}=866\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}\,,$$

$$n_{max}=\frac{60\,\omega_{max}}{2\pi}=\frac{60\cdot 866}{6{,}282}=8270\,\frac{\text{ford}}{\text{min}}\,.$$

6.8.3.4. feladat: Gyorsan forgó csőtengely



Adott: Az $\omega=$áll. szögsebességgel forgó D_K külső és D_B belső átmérőjű csőtengely.

$D_B=400$ mm , $D_K=600$ mm, $\omega=200$ rad/s, $\rho=8000$ kg/m^3, $\nu=1/3$.

Feladat: a) A λ_B és $\sigma_{\omega 0}$ értékének meghatározása.

b) A $\sigma_R\left(\lambda\right)$, $\sigma_\varphi\left(\lambda\right)$ és $\sigma_z\left(\lambda\right)$ diagramok megrajzolása.

c) A *Mohr* szerinti legnagyobb redukált feszültség meghatározása.

d) Az $R_K=D_K/2$ sugárral kijelölt körön levő tetszőleges P pontban a feszültségi tenzor mátrixának meghatározása henger koordináta-rendszerben.

Kidolgozás:

a) A λ_B és $\sigma_{\omega 0}$ értékének meghatározása:

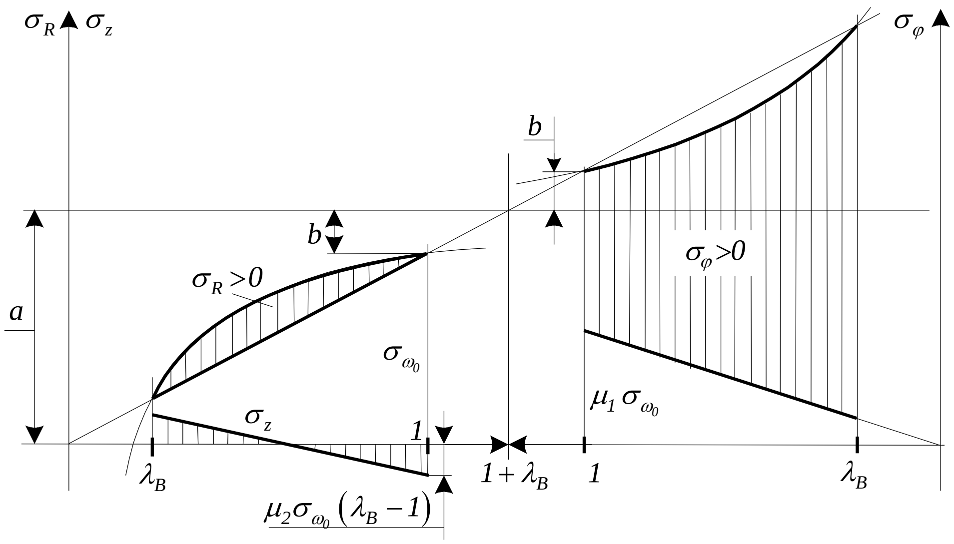
$$\lambda_B=\left(\frac{R_B}{R_K}\right)^2=\left(\frac{200}{300}\right)^2=\frac{4}{9}=0{,}44444\,,$$

$$\sigma_{\omega 0}=\frac{(3\text{-}2\nu)}{(1\text{-}\nu)}\frac{\rho}{8}(R_K\,\omega)^2=\frac{(3\text{-}2\cdot 0{,}44444)}{(1\text{-}0{,}4444)}\frac{8000}{8}(300\cdot 200)^2=12{,}6\ \text{N/mm}^2\ .$$

b) A $\sigma_R(\lambda)$, $\sigma_\varphi(\lambda)$ és $\sigma_z(\lambda)$ diagramok megrajzolása:

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_R=a-\dfrac{b}{\lambda}-\sigma_{\omega 0}\lambda\\ \sigma_\varphi=a+\dfrac{b}{\lambda}-\mu_1\sigma_{\omega 0}\lambda\\ \sigma_z=\mu_2\sigma_{\omega 0}(1+\lambda_B\text{-}2\lambda)\end{array}\right\}\ \lambda=\frac{R^2}{R_K^2}\,. \qquad \begin{array}{l}\mu_1=\dfrac{1+2\nu}{3-2\nu}=\dfrac{1+2\cdot 0{,}4444}{3\text{-}2\cdot 0{,}4444}=\dfrac{5}{7}\,,\\ \mu_2=\dfrac{2\nu}{3-2\nu}=\dfrac{2\cdot 0{,}4444}{3\text{-}2\cdot 0{,}4444}=\dfrac{2}{7}\,.\end{array}$$

Peremfeltételek: $\sigma_R(\lambda=\lambda_B)=0,\qquad \sigma_R(\lambda=1)=0\,.$



Peremfeltételek:

$$\left.\begin{array}{lll}R=R_B & (\lambda=\lambda_B) & \sigma_R=0=a-\dfrac{b}{\lambda}-\sigma_{\omega 0}\lambda\\ R=R_K & (\lambda=1) & \sigma_R=0=a-\dfrac{b}{\lambda}-\sigma_{\omega 0}\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}0=a-\dfrac{b}{\lambda_B}-\sigma_{\omega 0}\lambda_B\\ 0=a-b-\sigma_{\omega 0}\end{array}\right\}\Rightarrow\ a=b+\sigma_{\omega 0}\,.$$

Az első peremfeltételi egyenletbe visszahelyettesítve:

$$0=b-\frac{b}{\lambda_B}+\sigma_{\omega 0}(1-\lambda_B)\,,$$

$$0=-\frac{b}{\lambda_B}(1-\lambda_B)+\sigma_{\omega 0}(1-\lambda_B)\quad\Rightarrow\quad b=\lambda_B\sigma_{\omega 0}\,.$$

Visszahelyettesítve a második peremfeltételi egyenletbe: $a=(1+\lambda_B)\sigma_{\omega 0}\,.$

$a=\sigma_{\omega 0}(1+\lambda_B)=12{,}6(1+0{,}4444)=18{,}2$ MPa. $\qquad b=a-\sigma_{\omega 0}=18{,}2-12{,}6=5{,}6$ MPa.

A feszültségek jellemző értékei:

$$\sigma_z(\lambda_B)=\mu_2\sigma_{\omega 0}(1+\lambda_B\text{-}2\lambda_B)=\mu_2\sigma_{\omega 0}(1\text{-}\lambda_B)=\frac{2}{7}12{,}6(1-0{,}4444)=2\ \text{MPa},$$

$$\sigma_z(\lambda=1)=\mu_2\sigma_{\omega 0}(1+\lambda_B\text{-}2)=\mu_2\sigma_{\omega 0}(\lambda_B-1)=\frac{2}{7}12{,}6(0{,}4444\text{-}1)=-2\ \text{MPa}.$$

$$\sigma_\varphi(\lambda_B)=a+\frac{b}{\lambda_B}-\mu_1\sigma_{\omega 0}\lambda_B,\quad h_\varphi(\lambda_B)=a+\frac{b}{\lambda_B}=18{,}2+\frac{5{,}6}{0{,}4444}=18{,}2+12{,}6=30{,}8\ \text{MPa},$$

$$\mu_1\sigma_{\omega 0}\lambda_B=\frac{5}{7}12{,}6\cdot 0{,}4444=4\ \text{MPa},$$

$$\sigma_\varphi(\lambda_B)=a+\frac{b}{\lambda_B}-\mu_1\sigma_{\omega 0}\lambda_B=30{,}8-4=26{,}8\,\text{MPa}.$$

$$\sigma_\varphi(\lambda=1)=a+b-\mu_1\sigma_{\omega 0},\qquad h_\varphi(\lambda=1)=a+b=18{,}2+5{,}6=23{,}8\ \text{MPa},$$

$$\mu_1\sigma_{\omega 0}=\frac{5}{7}12{,}6=9\ \text{MPa},$$

$$\sigma_\varphi(\lambda=1)=a+b-\mu_1\sigma_{\omega 0}=23{,}8-9=14{,}8\ \text{MPa}.$$

c) A *Mohr* szerinti legnagyobb redukált feszültség meghatározása:

$\lambda=1$, $\sigma_{red}(Mohr)=\sigma_1-\sigma_3=\sigma_\varphi-\sigma_z=14{,}8-(-2)=16{,}8$ MPa,

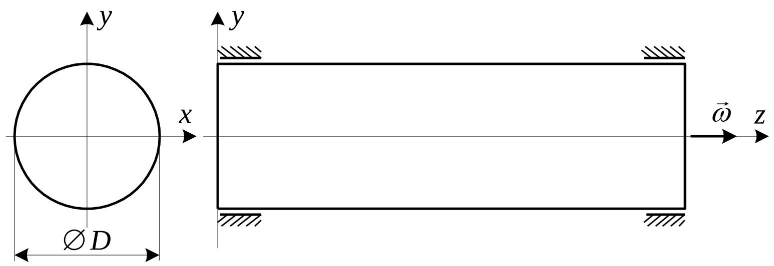
$\lambda_B=0{,}44444$, $\sigma_{red}(Mohr)=\sigma_1-\sigma_3=\sigma_\varphi-\sigma_R=26{,}8-0=26{,}8$ MPa,

$\sigma_{red\,\max}(Mohr)=26{,}8$ MPa.

d) Az $R_K=D_K/2$ sugárral kijelölt körön levő tetszőleges P pontban a feszültségi tenzor mátrixának meghatározása henger koordináta-rendszerben:

$$\left[\underline{\underline{F}}(P)\right]_{R\varphi z}=\begin{bmatrix}\sigma_R(\lambda=1) & 0 & 0\\ 0 & \sigma_\varphi(\lambda=1) & 0\\ 0 & 0 & \sigma_z(\lambda=1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 14{,}8 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\text{MPa}.$$

6.8.3.5. feladat: Gyorsan forgó tengely



Adott: Az $\omega=$áll. szögsebességgel forgó D átmérőjű tengely. $D=400$ mm , $\rho=8000\,\text{kg/m}^3$, $\sigma_{\omega 0}=40$ MPa , $\nu=0{,}25$.

Feladat: a) A $\sigma_R(\lambda)$, $\sigma_\varphi(\lambda)$ és $\sigma_z(\lambda)$ diagramok megrajzolása.

b) A *Mohr* szerinti legnagyobb redukált feszültség meghatározása.

c) A tengely legnagyobb megengedett fordulatszámának meghatározása, ha a megengedett feszültség $\sigma_{meg}=80$ MPa .

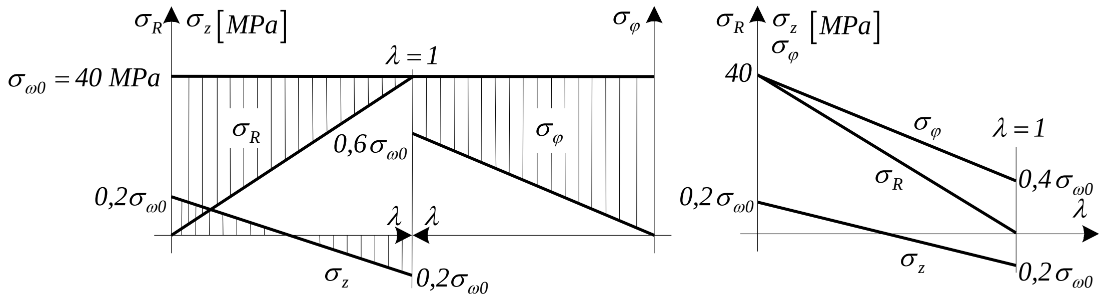
Kidolgozás:

a) A feszültségi diagramok megrajzolása:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_R &= a-\sigma_{\omega 0}\lambda\\ \sigma_\varphi &= a-\mu_1\sigma_{\omega 0}\lambda\\ \sigma_z &= \mu_2\sigma_{\omega 0}\left(1\text{-}2\lambda\right)\end{aligned}\right\}\ \lambda=\frac{R^2}{R_K^2}.\qquad \mu_1=\frac{1+2\nu}{3-2\nu}=\frac{1+2\cdot 0{,}25}{3-2\cdot 0{,}25}=0{,}6,\quad \mu_2=\frac{2\nu}{3-2\nu}=\frac{2\cdot 0{,}25}{3-2\cdot 0{,}25}=0{,}2.$$

Peremfeltétel: $R=R_K\left(\lambda=1\right)\ \Rightarrow\ \sigma_R=0=a-\sigma_{\omega 0}=0\ \Rightarrow\ a=\sigma_{\omega 0}=40$ MPa .

A gyorsan forgó tengely diagramja két alakban:



A feszültségek jellemző értékei:

$\sigma_R\left(\lambda=0\right)=a-\sigma_{\omega 0}\lambda=40-40\cdot 0=40\,\text{MPa},$

$\sigma_R\left(\lambda=1\right)=a-\sigma_{\omega 0}\lambda=40-40\cdot 1=0\,\text{MPa},$

$\sigma_\varphi\left(\lambda=0\right)=a-\mu_1\sigma_{\omega 0}\lambda=40-0{,}6\cdot 40\cdot 0=40\,\text{MPa},$

$\sigma_\varphi\left(\lambda=1\right)=a-\mu_1\sigma_{\omega 0}\lambda=40-0{,}6\cdot 40\cdot 1=16\,\text{MPa},$

$\sigma_z\left(\lambda=0\right)=\mu_2\sigma_{\omega 0}\left(1-2\lambda\right)=0{,}2\cdot 40\cdot(1-2\cdot 0)=8\,\text{MPa},$

$\sigma_z\left(\lambda=1\right)=\mu_2\sigma_{\omega 0}\left(1-2\lambda\right)=0{,}2\cdot 40\cdot(1-2\cdot 1)=-8\,\text{MPa}.$

b) A *Mohr* szerinti legnagyobb redukált feszültség meghatározása:

$\lambda=0$, $\qquad\sigma_{red}(Mohr)=\sigma_{\omega 0}-0{,}2\sigma_{\omega 0}=0{,}8\sigma_{\omega 0}=0{,}8\cdot 40=32$ MPa,

$\lambda=1$, $\qquad\sigma_{red}(Mohr)=0{,}4\sigma_{\omega 0}+0{,}2\sigma_{\omega 0}=0{,}6\sigma_{\omega 0}=0{,}6\cdot 40=24$ MPa,

$\sigma_{red\,\max}(Mohr)=32$ MPa.

c) A tengely legnagyobb megengedett fordulatszámának meghatározása, ha a megengedett feszültség $\sigma_{meg}=80$ MPa :

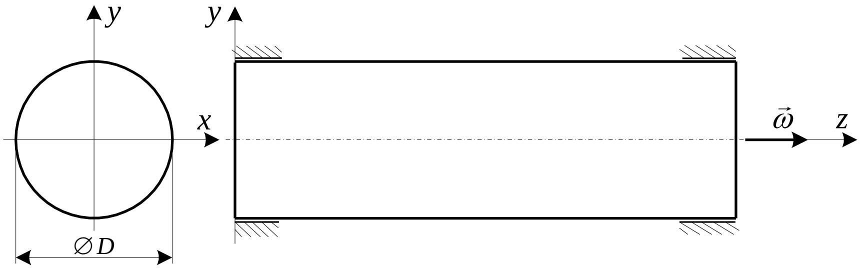
$$\sigma_{red\,\max}(Mohr)=0{,}8\sigma_{\omega 0}\le\sigma_{meg}\qquad \sigma_{meg}\ge 0{,}8\sigma_{\omega 0}=0{,}8\frac{\left(3-2\nu\right)}{\left(1-\nu\right)}\frac{\rho}{8}\left(R_K\,\omega\right)^2$$

$$\omega=\sqrt{\frac{\sigma_{meg}\left(1-\nu\right)}{0{,}1\left(3-2\nu\right)\rho R_K^2}}=\sqrt{\frac{80\cdot 10^6\cdot 0{,}75}{0{,}1\cdot 2{,}5\cdot 8\cdot 10^3\cdot 0{,}2^2}}=866\text{ rad/s},$$

$$\omega=\frac{2\pi n}{60}\ \Rightarrow\ n=\frac{30\omega}{\pi}=\frac{30}{3{,}141}866=8269\text{ ford/min}.$$

6.8.3.6. feladat: Gyorsan forgó tengely

Adott: A hosszú, tömör, D átmérőjű tengely, amely $\omega =$ állandó szögsebességgel forog. $D = 600\,\text{mm}$, $\omega = 400\dfrac{1}{s}$: A tengely anyagának sűrűsége: $\rho = 8000\,\text{kg/m}^3$, *Poisson*-tényezője: $\nu = 1/3$, megengedett feszültsége: $\sigma_{\text{meg}} = 110\ \text{MPa}$.



Feladat:

a) A $\sigma_R(\lambda), \sigma_\varphi(\lambda)$ és $\sigma_z(\lambda)$ diagramok megrajzolása.

b) A feszültségi tenzor mátrixának meghatározása hengerkoordináta-rendszerben az $R_1 = 100\,\text{mm}$ sugárral kijelölt körön levő P pontban.

c) A feszültségállapot szemléltetése a P pont környezetéből kiragadott elemi kockán.

d) A tengely szilárdságtani ellenőrzése a *Mohr* elmélet szerint.

Kidolgozás:

a) A $\sigma_R(\lambda), \sigma_\varphi(\lambda)$ és $\sigma_z(\lambda)$ diagramok megrajzolása:

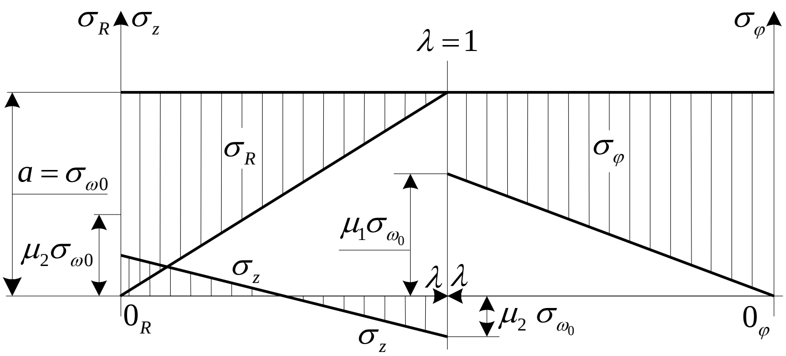
$$\left.\begin{aligned}\sigma_R &= a - \sigma_{\omega 0}\lambda \\ \sigma_\varphi &= a - \mu_1\sigma_{\omega 0}\lambda \\ \sigma_z &= \mu_2\sigma_{\omega 0}(1-2\lambda)\end{aligned}\right\},\ \lambda = \frac{R^2}{R_K^2},\quad R_K = 0{,}3\,\text{m}.$$

$$\mu_1 = \frac{1+2\nu}{3-2\nu} = \frac{1+2\cdot 0.333}{3-2\cdot 0{,}333} = 0{,}714,$$

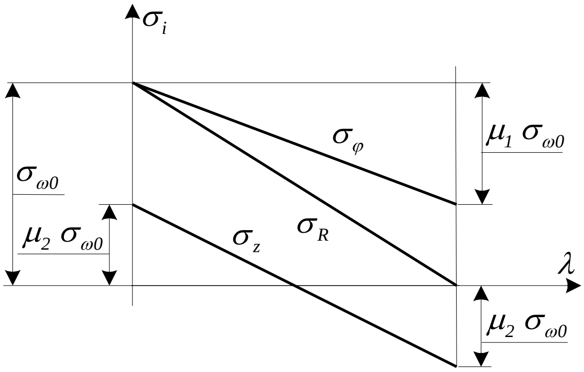
$$\mu_2 = \frac{2\nu}{3-2\nu} = \frac{2\cdot 0{,}333}{3-2\cdot 0{,}333} = 0{,}286.$$

$$\sigma_{\omega 0} = \frac{(3\text{-}2\nu)}{(1\text{-}\nu)}\frac{\rho}{8}(R_K\,\omega)^2 = 3{,}5\cdot\frac{8000}{8}\cdot 120^2 = 3{,}5\cdot 1{,}44\cdot 10^7 = 5{,}04\cdot 10^7\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2},\quad \sigma_{\omega 0} = 50{,}4\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

A diagram:



A diagramok más alakban:



Redukált feszültségek:

$$\sigma_{red}(\lambda=0)=\sigma_{\omega 0}(1-\mu_2),$$
$$\sigma_{red}(\lambda=0)=0,714\sigma_{\omega 0},$$
$$\sigma_{red}(\lambda=1)=\sigma_{\omega 0}(1-\mu_1+\mu_2),$$
$$\sigma_{red}(\lambda=1)=0,572\sigma_{\omega 0}.$$

b) A feszültségi tenzor mátrixának meghatározása hengerkoordináta-rendszerben az $R_1=100$ mm sugárral kijelölt körön levő P pontban:

$$\lambda_1=\frac{R_1^2}{R_K^2}=\frac{1^2}{3^2}=\frac{1}{9}$$

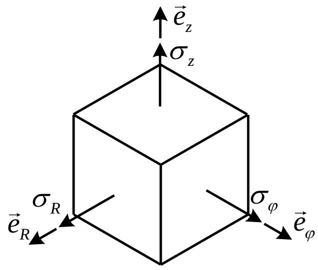
$$\sigma_R=\sigma_{\omega_0}(1-\lambda_1)=\frac{8}{9}\sigma_{\omega_0}=\frac{8}{9}50,4=44,8\text{ MPa},$$

$$\sigma_\varphi=\sigma_{\omega_0}(1-\mu_1\lambda_1)=50,4\left(1-\frac{0,714}{9}\right)=46,4\text{ MPa},$$

$$\sigma_z=\mu_2\sigma_{\omega_0}(1-2\lambda_1)=0,286\cdot 50,4\left(1-\frac{2}{9}\right)=11,2\text{ MPa}.$$

A feszültségi tenzor:
$$\underline{\underline{F}}=\begin{bmatrix}44,8 & 0 & 0\\ 0 & 46,4 & 0\\ 0 & 0 & 11,2\end{bmatrix}\text{MPa}.$$

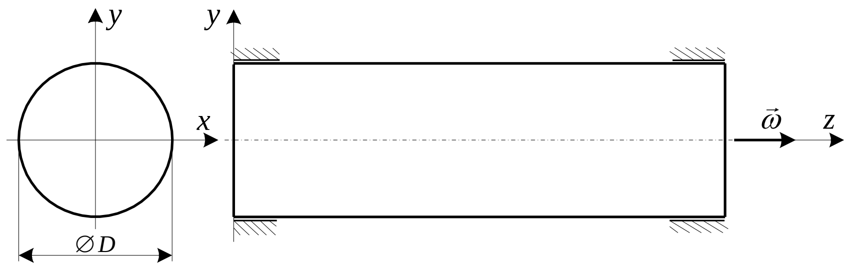
c) A feszültségállapot szemléltetése a P pont környezetéből kiragadott elemi kockán:



d) A tengely ellenőrzése *Mohr* elmélete szerint:

$$\sigma_{red\,\max}=\left(\sigma_\varphi-\sigma_z\right)_{\lambda=0}=0,714\,\sigma_{\omega_0}=35,99\text{ MPa}$$

6.8.3.7. feladat: Gyorsan forgó tengely



Adott: A hosszú, tömör, $\omega=$ áll. szögsebességgel forgó D átmérőjű tengely. $D=400\,\text{mm}$, $\sigma_{\omega_0}=40\text{MPa}$, $\rho=8000\,\text{kg/m}^3$, $\nu=0,25$.

Feladat:

a) A $\sigma_R(\lambda), \sigma_\varphi(\lambda)$, $\sigma_z(\lambda)$ függvények felírása és a diagramok megrajzolása.

b) A *Mohr*-féle elmélet alapján a redukált feszültség maximumának meghatározása.

c) A tengely legnagyobb megengedett fordulatszámának meghatározása, ha a megengedett feszültség $\sigma_{meg}=80\,\text{MPa}$.

d) Mekkora átmérőjű furat esetén felel meg a tengely az adott ω szögsebességre a *Mohr* elmélet szerint?

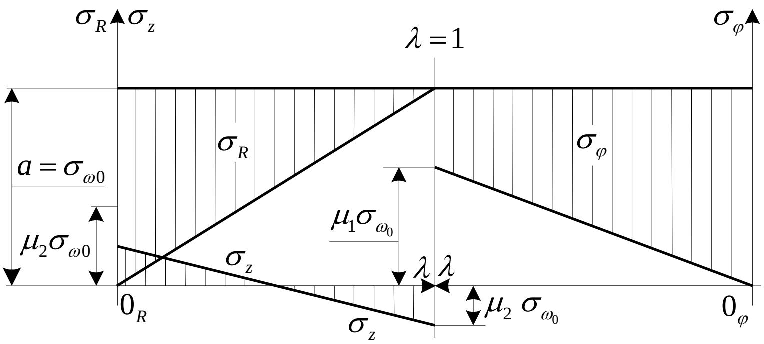
Kidolgozás:

a) A $\sigma_R(\lambda), \sigma_\varphi(\lambda)$, $\sigma_z(\lambda)$ függvények felírása és a diagramok megrajzolása:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_R&=a-\sigma_{\omega_0}\lambda\\ \sigma_\varphi&=a-\mu_1\sigma_{\omega_0}\lambda\\ \sigma_z&=\mu_2\sigma_{\omega_0}(1-2\lambda)\end{aligned}\right\}\quad \lambda=\frac{R^2}{R_K^2},\quad R_K=0,2\,\text{m}$$

$$\mu_1=\frac{1+2\nu}{3-2\nu}=\frac{1+2\cdot 0.25}{3-2\cdot 0,25}=0,6,$$

$$\mu_2=\frac{2\nu}{3-2\nu}=\frac{2\cdot 0,25}{3-2\cdot 0,25}=0,2.$$



b) A *Mohr*-féle elmélet alapján a redukált feszültség maximumának meghatározása:

$$\sigma_{red\max}=\left(\sigma_\varphi-\sigma_z\right)_{\lambda=0}=\sigma_{\omega_0}(1-\mu_2)=0,8\cdot 40=32\,\text{MPa}.$$

c) A tengely legnagyobb megengedett fordulatszámának meghatározása, ha a megengedett feszültség $\sigma_{meg}=80\,\text{MPa}$:

$$\sigma_{red\max}\le\sigma_{meg}\qquad\qquad \sigma_{meg}=80\,\text{N/mm}^2=8\cdot 10^5\,\text{N/m}^2.$$

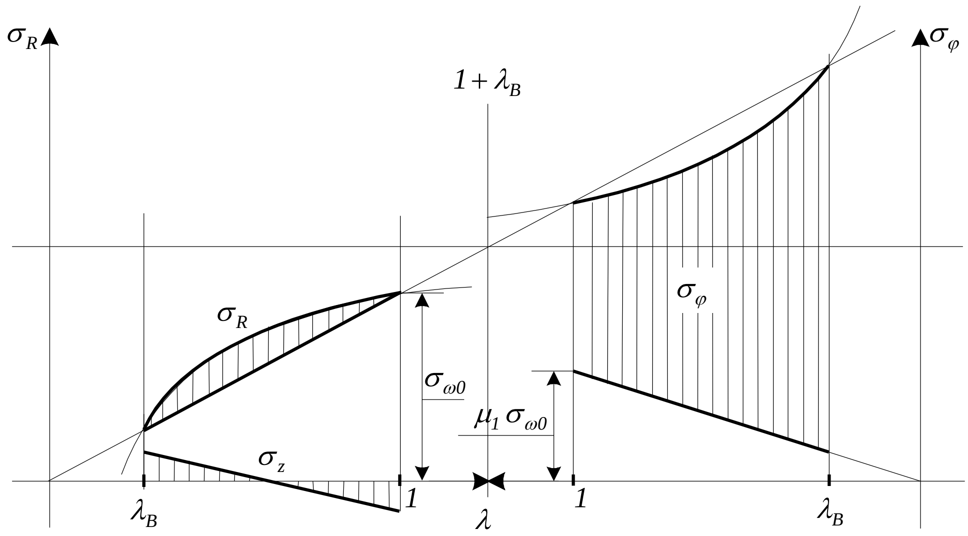
$$\sigma_{\omega_0}(1-\mu_2)\le\sigma_{meg}\quad\Rightarrow\quad (1-\mu_2)\frac{3m-2}{m-1}\frac{\rho}{8}\left(R_k\omega_{\max}\right)^2=\sigma_{meg}.$$

$$R_k\omega_{\max}=\sqrt{\frac{\sigma_{meg}}{1-\mu_2}\frac{8}{\rho}\frac{m-1}{3m-2}}=\sqrt{10^6\cdot 10^{-3}\cdot 0,3}=10\sqrt{3}\quad\Rightarrow\quad \omega_{\max}=\frac{10\sqrt{3}}{0,2}=50\sqrt{3}\,\frac{1}{s}.$$

$$\omega=2\pi f=2\pi\frac{n}{60}\quad\Rightarrow\quad n_{\max}=\frac{30\omega_{\max}}{\pi}=\frac{1500\sqrt{3}}{3,14}=821\,\frac{1}{\min}.$$

d) Mekkora átmérőjű furat esetén felel meg a tengely az adott ω szögsebességre a *Mohr* elmélet szerint?

$$\sigma_R = a - \frac{b}{\lambda} - \sigma_{\omega_0}\lambda\,, \qquad \sigma_\varphi = a + \frac{b}{\lambda} - \mu_1\sigma_{\omega_0}\lambda\,, \quad \sigma_z = \mu_2\sigma_{\omega_0}\left(1+\lambda_B - 2\lambda\right).$$



$$\sigma_{red\,\max} = \sigma_\varphi\left(\lambda_B\right) = \sigma_{\omega_0}\left(2+\lambda_B\right) - \mu_1\sigma_{\omega_0}\lambda_B\,,$$

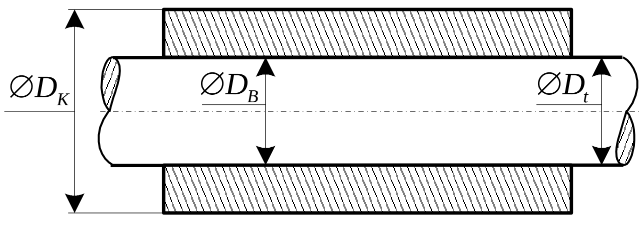
$$\sigma_{red\,\max} = 2\sigma_{\omega_0} + \lambda_B\left(1-\mu_1\right)\sigma_{\omega_0} \le \sigma_{meg}\,,$$

$$\lambda_B = \frac{\sigma_{meg} - 2\sigma_{\omega_0}}{\left(1-\mu_1\right)\sigma_{\omega_0}} = \frac{80-80}{40\left(1-0,6\right)} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = 0\,.$$

A tengelybe furat nem készíthető.

6.8.3.8. feladat: Gyorsan forgó hüvely

A D_K külső és D_B belső átmérőjű hüvelyt (csőtengelyt) felmelegítve D_t átmérőjű merev tengelyre húzunk, majd lehűtjük. Ekkor a hüvely $\delta = \left(D_t - D_B\right)/2$ túlfedéssel illeszkedik a tengelyre. Lehűtés után a szerkezetet forgatni kezdjük. Feltételezzük, hogy a hüvely anyaga lineárisan rugalmas, a tengely pedig tökéletesen merev.



Adott:

$D_K = 200\sqrt{2}$ mm, $D_t = 200$ mm,

$\delta = 0,2175$ mm, $E = 2\cdot10^5$ MPa,

$\nu = 0,25$, $\rho = 8\cdot10^3$ kg/m^3,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2\cdot10^5}{2,5} = 0,8\cdot10^5\,\text{MPa}\,.$$

Feladat:

a) A túlfedés következtében a hüvely belső felületén fellépő nyomás meghatározása.

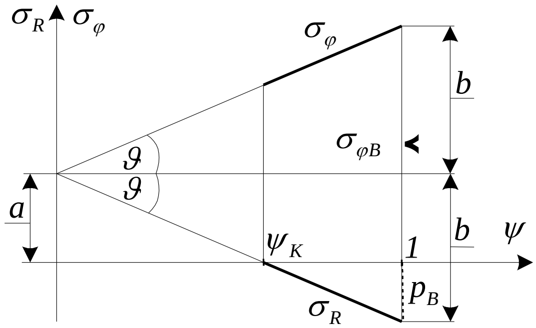
b) Mekkora fordulatszámnál lazul meg a hüvely tengelyen, ha a hüvelyt hosszú, gyorsan forgó vastagfalú csőként (csőtengelyként) modellezzük?

<u>Kidolgozás</u>:

a) A túlfedés következtében a hüvely belső felületén fellépő nyomás meghatározása:

$$R_B = 100 \text{ mm}, \; R_K = 100\sqrt{2} \text{ mm}, \; \psi_K = \lambda_B = \left(\frac{R_B}{R_K}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

A túlfedésből származó nyomás meghatározása (az álló cső diagramja):



A túlfedés: $\delta = \dfrac{D_t - D_B}{2} = u_B = R_B \varepsilon_{\varphi B} = R_t \varepsilon_\varphi(\psi = 1) = \dfrac{R_t}{2G}\left[\sigma_{\varphi B} - \nu\left(\sigma_{RB} + \sigma_{\varphi B}\right)\right]$,

$$\delta = \frac{R_t}{2G}\left[\sigma_{\varphi B} - \nu\left(-p_B + \sigma_{\varphi B}\right)\right].$$

A csődiagramból: $\sigma_{\varphi B} = \sigma_\varphi(\psi = 1) = 2b - p_B = 2\dfrac{p_B}{1-\psi_B} - p_B = p_B \dfrac{1+\psi_K}{1-\psi_K}$.

$$\delta = \frac{R_t}{2G}\left[p_B \frac{1+\psi_K}{1-\psi_K} - \nu p_B \left(-1 + \frac{1+\psi_K}{1-\psi_K}\right)\right] = \frac{R_t}{G} p_B \left[\frac{1+\psi_K(1-2\nu)}{1-\psi_K}\right].$$

A túlfedésből származó nyomás: $\quad p_B = \dfrac{\delta}{\dfrac{R_t}{G}\left[\dfrac{1+\psi_K(1-2\nu)}{1-\psi_K}\right]}$.

b) Mekkora fordulatszámnál lazul meg a hüvely tengelyen, ha a hüvelyt hosszú, gyorsan forgó vastagfalú csőként (csőtengelyként) modellezzük?

A forgó hüvely diagramja:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_R &= a - \frac{b}{\lambda} - \sigma_{\omega 0}\lambda \\ \sigma_\varphi &= a + \frac{b}{\lambda} - \mu_1 \sigma_{\omega 0}\lambda \\ \sigma_z &= \mu_2 \sigma_{\omega 0}\left(1 + \lambda_B - 2\lambda\right) \end{aligned}\right\}$$

$$\mu_1 = \frac{1+2\nu}{3-2\nu} = \frac{1+2\cdot 0.25}{3-2\cdot 0{,}25} = 0{,}6,$$

$$\mu_2 = \frac{2\nu}{3-2\nu} = \frac{2\cdot 0{,}25}{3-2\cdot 0{,}25} = 0{,}2.$$

Peremfeltételek: $\quad \sigma_R\left(\lambda = 1\right) = 0 = a - b - \sigma_{\omega 0}$,

$$\sigma_R\left(\lambda = \lambda_B\right) = -p_B = a - \frac{b}{\lambda_B} - \sigma_{\omega 0}\lambda_B.$$

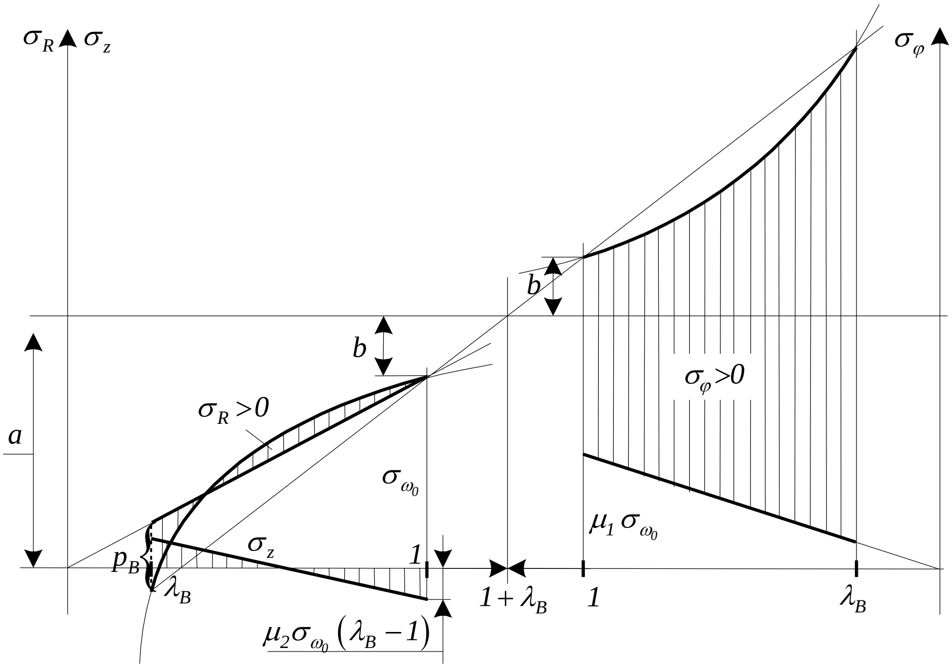
Feszültségállapot a belső sugárnál:

$$\sigma_R(\lambda_B) = -p_B,$$

$$\sigma_z(\lambda_B) = \mu_2 \sigma_{\omega 0}\left(1-\lambda_B\right) = 0,2 \cdot 0,5 \cdot \sigma_{\omega 0} = 0,1 \cdot \sigma_{\omega 0},$$

$$\sigma_\varphi(\lambda_B) = \sigma_{\omega 0} + (1+\lambda_B)\frac{\sigma_{\omega 0} - p_B}{1-\lambda_B} - \sigma_{\omega 0}\mu_1\lambda_B.$$

A forgó cső feszültségi diagramja zsugorkötés esetén:



Lazulásnál: $p_B = 0.$

Alakváltozási állapot a $\lambda = \lambda_B$ helyen lazulásnál:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2G}\left(\underline{\underline{F}} - \frac{F_I}{m+1}\underline{\underline{E}}\right); \quad F_I = \sigma_\varphi + \sigma_z = 2,3\sigma_{\omega 0}, \quad 2G = E\frac{1}{1+\nu} = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot 10^5 = 1,6 \cdot 10^5 \,\text{MPa}.$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{2G}\left(\sigma_\varphi - \nu\frac{\sigma_\varphi + \sigma_z}{1+\nu}\right) = \frac{1}{2G}\left(2,2\sigma_{\omega 0} - \frac{2,3}{5}\sigma_{\omega 0}\right),$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{10}{16} \cdot 10^{-5} \cdot 1,74\sigma_{\omega 0} = 1,0875 \cdot 10^{-5}\sigma_{\omega 0}$$

Lazulás:

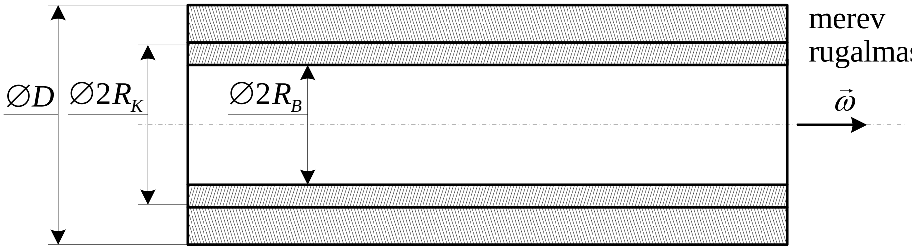
$$\delta = R_B \varepsilon_\varphi\left(R_B\right) = \frac{D_B}{2}\varepsilon_\varphi\left(R_B\right) = 100 \cdot 1,0875 \cdot 10^{-5}\sigma_{\omega 0},$$

$$0,2175 = 10,875 \cdot 10^{-4}\sigma_{\omega 0} \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_{\omega_0} = 200 \text{ N/mm}^2 = 2 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2.$$

$$\sigma_{\omega_0}=\frac{3-2\nu}{1-\nu}\frac{\rho}{8}\left(R_K\omega\right)^2=2\cdot10^8,\qquad \left(R_K\omega\right)^2=0{,}6\cdot10^5=6\cdot10^4,\qquad R_K\omega=100\sqrt{6}\,,$$

$$\omega_l=\frac{100\sqrt{6}}{0{,}1\sqrt{2}}\quad\Rightarrow\quad\omega=2\pi f=2\pi\frac{n}{60}\quad\Rightarrow\quad n=\frac{30}{\pi}\omega\quad\Rightarrow\quad n_l=\frac{3\cdot10^4}{3{,}1415}\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=16\,589\,\frac{1}{\min}.$$

6.8.3.8. feladat: Gyorsan forgó kettősfalú csőtengely



Adott: Lineárisan rugalmas anyagú csőre tökéletesen merev csövet húzunk úgy, hogy hézag és túlfedés nélkül illeszkedjenek. Ezután a két csövet azonos ω szögsebességgel megforgatjuk. A belső csőre: $\lambda_B=0{,}5$, $\sigma_{\omega 0}=60$ N/mm^2, $\nu=0{,}25$.

Feladat:

a) A belső csőben fellépő feszültségek eloszlásának jelleghelyes ábrázolása.

b) A belső csőre az R_K sugárnál átadódó erőrendszer p_K sűrűségének meghatározása.

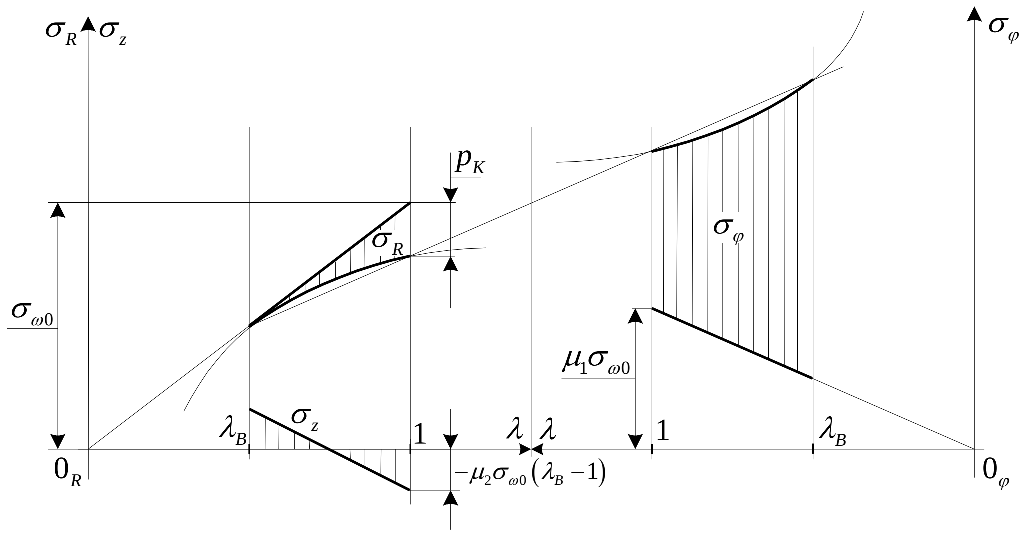
c) A *Mohr*-féle elmélet alapján a belső csőben fellépő legnagyobb redukált feszültség kiszámítása.

Kidolgozás:

a) A belső csőben fellépő feszültségek eloszlásának jelleghelyes ábrázolása:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_R&=a-\frac{b}{\lambda}-\sigma_{\omega 0}\lambda\\ \sigma_\varphi&=a+\frac{b}{\lambda}-\mu_1\sigma_{\omega 0}\lambda\\ \sigma_z&=\mu_2\sigma_{\omega 0}\left(1+\lambda_B-2\lambda\right)\end{aligned}\right\}\qquad \begin{aligned}\mu_1&=\frac{1+2\nu}{3-2\nu}=\frac{1+2\cdot0.25}{3-2\cdot0{,}25}=0{,}6,\\ \mu_2&=\frac{2\nu}{3-2\nu}=\frac{2\cdot0{,}25}{3-2\cdot0{,}25}=0{,}2\,.\end{aligned}$$

Peremfeltételek:
$$\sigma_R\left(\lambda=1\right)=-p_K=a-b-\sigma_{\omega 0}\,,$$
$$\sigma_R\left(\lambda=\lambda_B\right)=0=a-\frac{b}{\lambda_B}-\sigma_{\omega 0}\lambda_B\,.$$



b) A belső csőre az R_K sugárnál átadódó erőrendszer p_K sűrűségének meghatározása:

A belső cső külső felületén $(\lambda = 1)$ a feszültségek:

$$\sigma_R = -p_K\,, \quad \sigma_z = -\mu_2\sigma_{\omega 0}\left(1-\lambda_B\right) = -6\ \text{MPa}\,,$$

$$\sigma_\varphi = \left[\sigma_{\omega_0} - \frac{p_K}{1-\lambda_B}\right]2\lambda_B + \left(\sigma_{\omega 0} - p_K\right) - \mu_1\sigma_{\omega 0} = \sigma_{\omega 0}\left(2\lambda_B + 1 - \mu_1\right) - p_K\left(\frac{2\lambda_B}{1-\lambda_B} + 1\right),$$

$$\sigma_\varphi = 60\left(2-0{,}6\right) - 3p_K = 84 - 3p_K\ \ \text{MPa}\,.$$

A belső cső külső felületén $(\lambda = 1)$ az alakváltozási jellemzők:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2G}\left(\underline{\underline{F}} - \nu\frac{F_I}{1+\nu}\underline{\underline{E}}\right), \qquad 2G = E\frac{1}{1+\nu}, \quad 2G = 1{,}6\cdot 10^5\ \text{MPa}\,.$$

$$F_I = \sigma_R + \sigma_\varphi + \sigma_z = -p_K - 6 + \left(84 - 3p_K\right), \quad F_I = 78 - 4p_K\,.$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{2G}\left(\sigma_\varphi - \frac{\nu F_I}{1+\nu}\right) = \frac{1}{2G}\left[\left(84-3p_K\right) - 0{,}2\left(78-4p_K\right)\right].$$

$$\varepsilon_\varphi\left(R_K\right) = \varepsilon_\varphi\left(\lambda = 1\right) = \frac{1}{2G}\left(84 - 17{,}6 - 2{,}2p_K\right).$$

$$u\left(R_K\right) = 0 = R_K\varepsilon_\varphi\left(R_K\right) \quad\Rightarrow\quad 0 = 66{,}4 - 2{,}2p_K \quad\Rightarrow\quad p_K = \frac{66{,}4}{2{,}2} = 31{,}09\ \text{MPa}\,.$$

c) A *Mohr*-féle elmélet alapján a belső csőben fellépő legnagyobb redukált feszültség kiszámítása:

Feszültségek meghatározása a belső cső belső és külső felületén:

$$\lambda = \lambda_B \qquad \sigma_\varphi\left(\lambda_B\right) = \left[\sigma_{\omega 0} - \frac{p_K}{1-\lambda_B}\right]\left(1+\lambda_B\right) + \sigma_{\omega 0} - \mu_1\lambda_B\sigma_{\omega 0} =$$

$$= \sigma_{\omega_0}\left(2 + \lambda_B - \mu_1\lambda_B\right) - p_K \frac{1+\lambda_B}{1-\lambda_B} = 168 - 47{,}43 \cdot 3 = 25{,}71\,\text{MPa}\,.$$

$$\sigma_{red}\left(\lambda_B\right) = \sigma_{\varphi}(\lambda_B) = 25{,}71\,\text{MPa}\,.$$

$\lambda = \lambda_B$ $\quad$ $\sigma_{\varphi}\left(\lambda = 1\right) = 84 - 93{,}3 = -9{,}7\ \text{MPa}\,,$

$$\sigma_z\left(\lambda = 1\right) = -6\ \text{MPa}$$

$$\sigma_R\left(\lambda = 1\right) = -p_K = -31{,}09\ \text{MPa}$$

$$\sigma_{red}\left(\lambda = 1\right) = \sigma_z\left(\lambda = 1\right) - \sigma_R\left(\lambda = 1\right) = 25{,}09\ \text{MPa}.$$

$\sigma_{red\,\max} = 25{,}71\,\text{MPa}.$

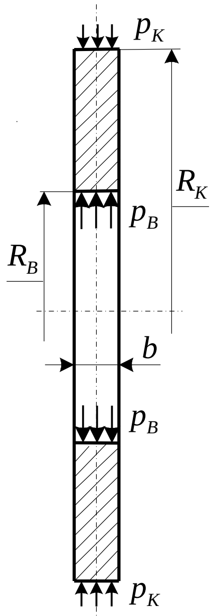
6.9. Kör és körgyűrű alakú tárcsák

Megoldás: általánosított sík feszültségi állapot.

Változó: $\psi = \dfrac{R_B^2}{R^2}$.

A biharmonikus differenciálegyenlet megoldásával előállított $U = U(R)$ feszültségfüggvényből formailag a vastagfalú csöveknél kapottal azonos a megoldás a feszültségekre nézve, azonban itt $\bar{\sigma}_z = 0$.

6.9.1. Furatos tárcsa



A feszültségek

$$\left.\begin{aligned}\bar{\sigma}_R &= a - b\psi \\ \bar{\sigma}_\varphi &= a + b\psi\end{aligned}\right\} \quad \text{A tengelyszimmetria miatt: } \bar{\tau}_{R\varphi} = 0.$$

$$\bar{\sigma}_z = 0.$$

Peremfeltételek:

$$\bar{\sigma}_R(\psi = 1) = a - b = -p_B, \qquad \bar{\sigma}_R(\psi = \psi_K) = a - b\psi_K = -p_K.$$

Az első egyenletből: $a = b - p_B$,

A második egyenletből: $b - p_B - b\psi_K = -p_K \quad \Rightarrow$

$$b = \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K}.$$

Visszahelyettesítve:

$$a = b - p_B = \frac{p_B - p_K - p_B(1 - \psi_K)}{1 - \psi_K} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{p_B\psi_K - p_K}{1 - \psi_K}.$$

A furatos tárcsa diagramja:

A tárcsa diagram megszerkesztésének gondolatmenete megegyezik a vastagfalú cső diagramjának szerkesztésével.

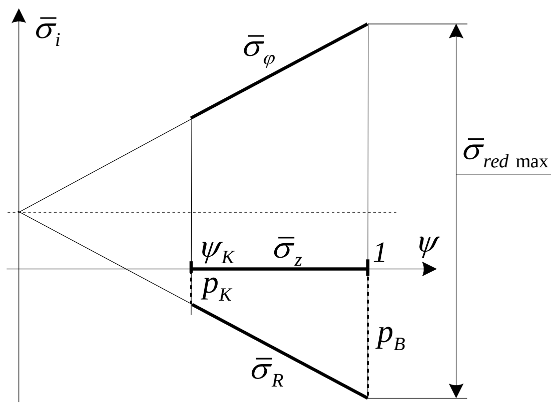
A tárcsadiagramot a $p_B > p_K$ esetre rajzoltuk meg.

A $\bar{\sigma}_R, \bar{\sigma}_\varphi, \bar{\sigma}_z$ ebben az esetben is főfeszültségek.

Redukált feszültség a diagramból:

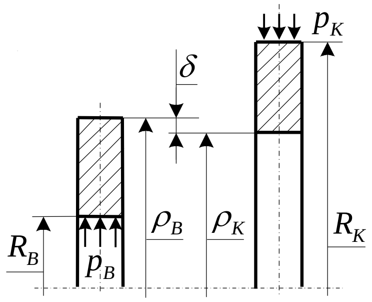
$$\bar{\sigma}_{red}(Mohr) = \bar{\sigma}_\varphi - \bar{\sigma}_R,$$

$$\bar{\sigma}_{red\,max}(Mohr) = 2\frac{p_K - p_B}{1 - \psi_K}.$$



Ebben az esetben is fennáll az a probléma, hogy a $p_B - p_K$ terheléskülönbség nem növelhető minden határon túl. Megoldás: növelni kell a p_K terhelést – összetett tárcsát kell alkalmazni.

6.9.2. Túlfedéssel illesztett összetett furatos tárcsa



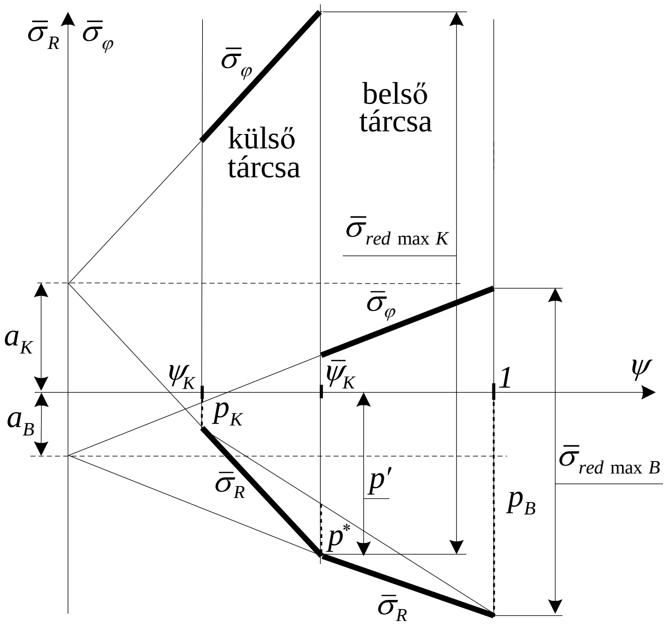
Túlfedés: $\delta = \rho_B - \rho_K$.

Feltételezés: $\delta << \rho_B, \rho_K \Rightarrow \rho_B \approx \rho_K$.

Változó: $\psi = \dfrac{R_B^2}{R^2}$.

$$\bar{\psi}_K = \frac{R_B^2}{\rho_B^2} = \frac{R_B^2}{\rho_K^2}, \quad \psi_K = \frac{R_B^2}{R_K^2}.$$

Tárcsa diagram:



A tárcsadiagram megszerkesztése a összetett cső diagramjának szerkesztésével analóg módon történik.

Feltételezés: $p_B > p_K$.

„Peremfeltételek” (ismert értékek):

$$\sigma_R(R_B) = \sigma_R(\psi = 1) = -p_B,$$
$$\sigma_R(\rho_B \approx \rho_K) = \sigma_R(\bar{\psi}_K) = -p',$$
$$\sigma_R(R_K) = \sigma_R(\psi_K) = -p_K.$$

Maximális redukált feszültségek:

$$\bar{\sigma}_{red\,max\,B} = \frac{p_B - p'}{1 - \bar{\psi}_K},$$

$$\bar{\sigma}_{red\,max\,K} = \frac{p' - p_K}{\bar{\psi}_K - \psi_K}\bar{\psi}_K.$$

A túlfedés meghatározása: $\delta = \rho_B \left(\bar{\varepsilon}_{\varphi K} - \bar{\varepsilon}_{\varphi B} \right)\Big|_{R = \rho_B = \rho_K}$.

Hooke-törvény: $\bar{\varepsilon}_\varphi = \dfrac{1}{E}\left(\bar{\sigma}_\varphi - \nu \underbrace{\bar{\sigma}_R}_{=-p'} \right) \quad \Rightarrow \quad \delta = \dfrac{\rho_B}{E}\left(\bar{\sigma}_{\varphi K} - \bar{\sigma}_{\varphi B} \right)\Big|_{R = \rho_B = \rho_K}$.

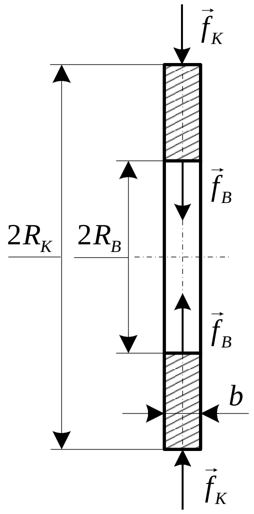
A tárcsa diagramból:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{\varphi K} &= \bar{\sigma}_{red\,max\,K} - p' = 2\frac{p' - p_K}{\bar{\psi}_K - \psi_K}\bar{\psi}_K - p' \\ \bar{\sigma}_{\varphi B} &= 2\frac{p_B - p'}{1 - \psi_K}\bar{\psi}_K - p' \end{aligned} \right\}$$

Ezek az $R = \rho_B = \rho_K$ $(\psi = \bar{\psi}_K)$ helyen vett értékek.

6.9.3. Gyakorló feladatok kör és körgyűrű alakú tárcsákra

6.9.3.1. feladat: Körgyűrű alakú tárcsa



Adott:

Az állandó b vastagságú tárcsa geometriája és $\vec{f}_B$ és $\vec{f}_K$ állandó sűrűségű megoszló terhelése.

$R_B = 100$ mm, $R_K = 100\sqrt{2}$ mm, $b = 4$ mm, $f_B = 20$ N/mm,

$f_K = 20$ N/mm.

Feladat:

a) Az N_R, N_φ felületi feszültségi diagramok megrajzolása a jellemző metszékek számértékeinek megadásával.

b) A N_φ legnagyobb értékének meghatározása.

c) A *Mohr* szerinti legnagyobb redukált feszültség kiszámítása.

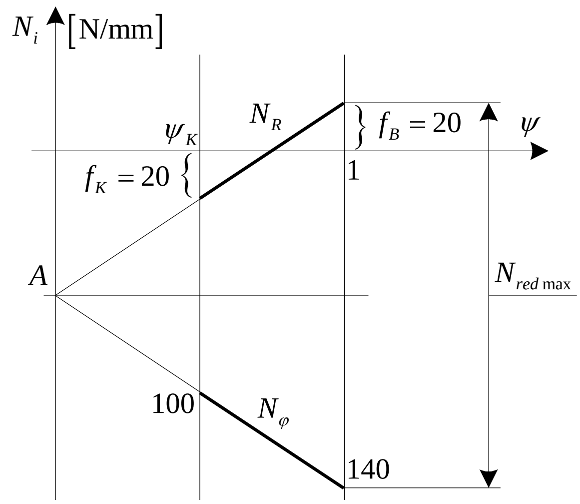
Kidolgozás:

a) Az N_R, N_φ felületi feszültségi diagramok megrajzolása a jellemző metszékek számértékeinek megadásával:

$$\left.\begin{aligned} N_R &= A - B\psi \\ N_\varphi &= A + B\psi \end{aligned}\right\} \qquad \psi = \frac{R_B^2}{R^2}, \qquad \psi_K = \frac{R_B^2}{R_K^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Peremfeltételek: $N_R(\psi) = A - B = f_B$, $\quad N_R(\psi_K) = A - B = -f_K$.

Felületi feszültségi diagram:



b) A N_φ legnagyobb értékének meghatározása:

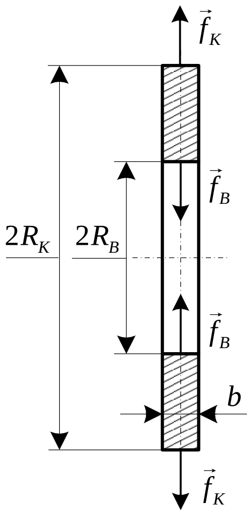
$$\frac{N_{red\,\max}}{2}=\frac{f_B+f_K}{1-\psi_K} \quad \Rightarrow \quad N_{red\,\max}=2\cdot\frac{40}{0,5}=160\ \text{N/mm}.$$

$$\left|N_{\varphi\max}\right|=N_{red\,\max}-f_B \quad \Rightarrow \quad \left|N_{\varphi\max}\right|=160-20=140\ \text{N/mm}.$$

c) A *Mohr* szerinti legnagyobb redukált feszültség kiszámítása:

$$\bar{\sigma}_{red\,\max}=\left(\bar{\sigma}_R-\bar{\sigma}_\varphi\right)_{\psi=1}=\frac{N_{red\,\max}}{b}=\frac{160}{4}=40\ \text{N/mm}^2.$$

6.9.3.2. feladat: Körgyűrű alakú tárcsa



Adott:

Az állandó b vastagságú tárcsa terhelése: $f_B=50$ N/mm és $f_K=20$ N/mm, méretei: $b=5$ mm, $R_B=100$ mm, $R_K=200$ mm.

Feladat:

a) A peremfeltételek felírása.

b) Az N_R, N_φ felületi feszültségek diagramjának megrajzolása a jellemző metszékek számértékeinek megadásával.

c) A $\bar{\sigma}_\varphi$ értékének meghatározása az $R=R_B$ és $R=R_K$ helyen.

d) Az $R=R_B$ helyen fellépő felületi feszültségállapot szemléltetése az elemi négyzeten.

Kidolgozás:

a) A peremfeltételek felírása:

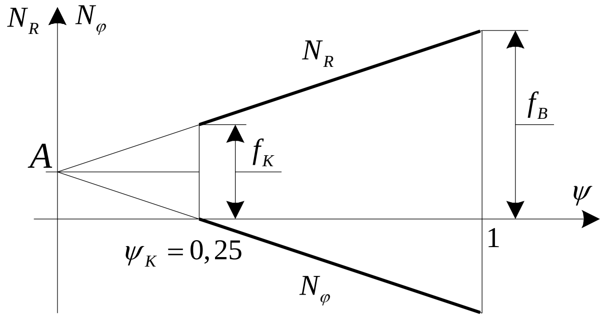
$$\psi=\frac{R_B^2}{R^2},\quad \psi=\frac{R_B^2}{R_K^2}=0,25$$

Peremfeltételek: $R=R_B \Rightarrow \psi=1 \qquad N_R=f_B=50$ N/mm.

$R=R_K \Rightarrow \psi=\psi_K \qquad N_R=f_K=20$ N/mm.

b) Az N_R, N_φ felületi feszültségek diagramjának megrajzolása a jellemző metszékek számértékeinek megadásával:

$$\left.\begin{aligned} N_R&=A-B\psi \\ N_\varphi&=A+B\psi \end{aligned}\right\}$$



c) A $\bar{\sigma}_\varphi$ értékének meghatározása az $R=R_B$ és $R=R_K$ helyen:

$$\frac{f_B - f_K}{1-\psi_K} = \frac{N_\varphi + f_B}{2} \qquad \Rightarrow \qquad N_\varphi\left(\psi = 1\right) = 2\frac{f_B - f_K}{1-\psi_K} - f_B = 2\frac{30\cdot 4}{3} - 50 .$$

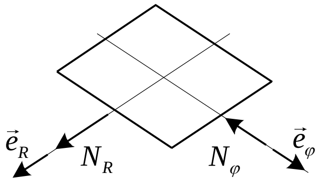
$$N_\varphi\left(\psi = 1\right) = -50 \text{ N/mm}, \qquad \bar{\sigma}_\varphi(\psi = 1) = \frac{N_\varphi(\psi = 1)}{b} = -6 \text{ N/mm}^2 .$$

$$\frac{f_B - f_K}{1-\psi_K} = \frac{N_\varphi + f_K}{2\psi_K} \quad \Rightarrow \quad N_\varphi\left(\psi_K\right) = 2\psi_K \frac{f_B - f_K}{\left(1-\psi_K\right)} - f_K = 20 - 20 = 0 .$$

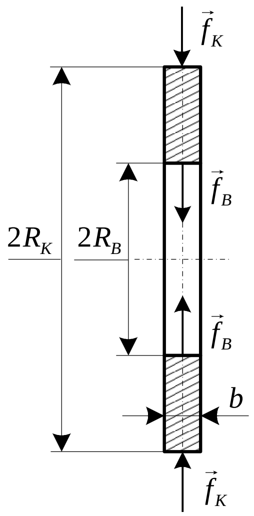
$$N_\varphi\left(\psi = \psi_K\right) = 0, \qquad \bar{\sigma}_\varphi(\psi_K) = \frac{N_\varphi(\psi_K)}{b} = 0 .$$

d) Az $R = R_B$ helyen fellépő felületi feszültségállapot szemléltetése az elemi négyzeten:

$$\underline{\underline{N}}\left(R = R_B\right) = \begin{bmatrix} N_R & 0 \\ 0 & N_\varphi \end{bmatrix}$$



6.9.3.3. feladat: Körgyűrű alakú tárcsa



Adott:

A $b = 4$ mm vastag tárcsa $f_B = 60$ N/mm és $f_K = -30$ N/mm terhelése, a furat $R_B = 80$ mm belső sugara és a tárcsa anyagának megengedett feszültsége: $\sigma_{meg} = 60$ MPa .

Feladat:

a) A peremfeltételek felírása.

b) Az N_R, N_φ felületi feszültségi diagramok jelleghelyes megrajzolása.

c) A tárcsa R_K külső sugarának meghatározása.

Kidolgozás:

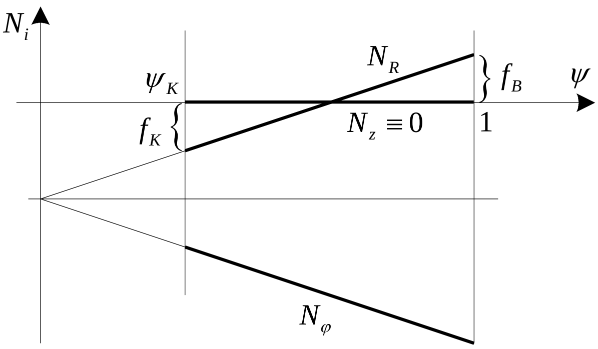
a) A peremfeltételek felírása:

$$\psi = \frac{R_B^2}{R^2} \qquad R = R_B \ \left(\psi = 1\right) \qquad N_R = f_B ,$$

$$R = R_K \ \left(\psi = \psi_K\right) \qquad N_R = -f_K .$$

b) Az N_R, N_φ felületi feszültségi diagramok jelleghelyes megrajzolása:

$$\left.\begin{aligned} N_R &= A - B\psi \\ N_\varphi &= A + B\psi \\ N_z &= 0 \end{aligned}\right\}$$



c) A tárcsa R_K külső sugarának meghatározása:

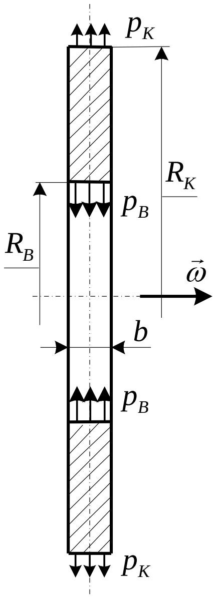
$$\frac{N_{red\max}}{2} = \frac{f_B + f_K}{1-\psi_K}.$$

$$\bar{\sigma}_{red\max} \le \sigma_{meg}.$$

$$2\frac{f_B + f_K}{1-\psi_K}\cdot\frac{1}{b} \le \sigma_{meg} \qquad R_K \ge \frac{R_B}{\sqrt{1-2\dfrac{f_B+f_K}{\sigma_{meg}b}}} = \frac{R_B}{\sqrt{1-2\dfrac{90}{60\cdot 4}}} = \frac{R_B}{\sqrt{0,25}} = 160\,\text{mm}.$$

6.10. Gyorsan forgó kör és körgyűrű alakú tárcsák

6.10.1. Gyorsan forgó furatos tárcsa



Kiinduló feltételezések:

- ω=állandó,
- súlyerő≈ 0.
- A p_B és a p_K más, a tárcsához kapcsolódó alkatrész hatását modellezi.

Változó: $\lambda = \dfrac{R^2}{R_K^2}$.

Feszültségek:

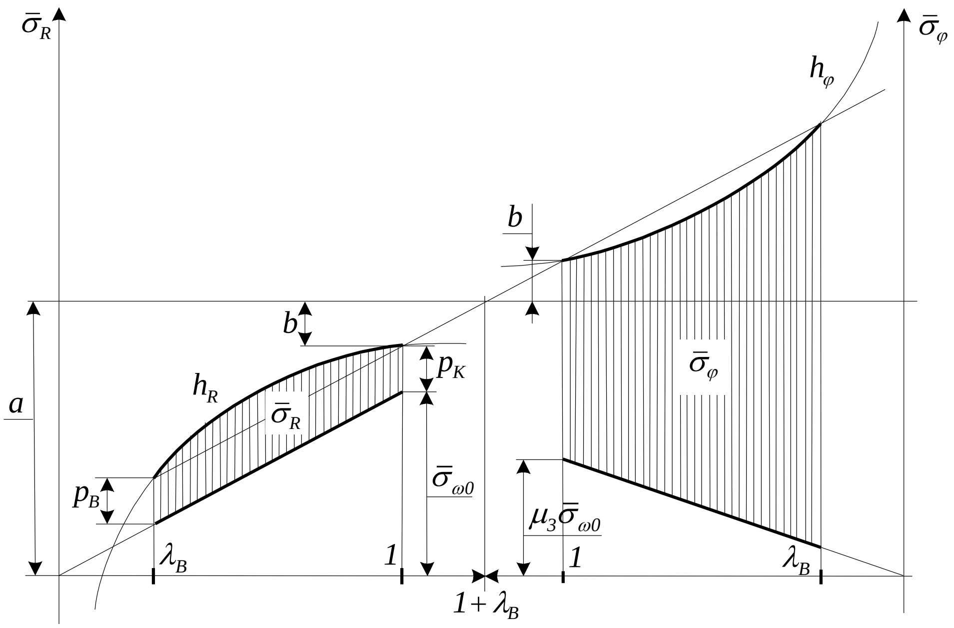
$$\left.\begin{aligned} \bar{\sigma}_R &= a - \frac{b}{\lambda} - \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda \\ \bar{\sigma}_\varphi &= a + \frac{b}{\lambda} - \mu_3 \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda \end{aligned}\right\}, \quad \bar{\sigma}_{\omega 0} = \frac{(3+\nu)}{\nu}\frac{\rho}{8}\left(R_K\,\omega\right)^2, \quad \mu_3 = \frac{1+3\nu}{3+\nu}.$$

Peremfeltételek:

$R = R_B$, $(\lambda = \lambda_B)$, $\bar{\sigma}_R = p_B$,

$R = R_K$, $(\lambda = 1)$, $\bar{\sigma}_R = p_K$.

A forgó tárcsa diagramja:



A diagram szerkesztésének gondolatmenete megegyezik a gyorsan forgó csőtengely diagramjának szerkesztésénél leírtakkal.

A redukált feszültség maximuma *Mohr* szerint:

$$\bar{\sigma}_{red\,max}(Mohr) = \bar{\sigma}_\varphi(\lambda_B) = \sigma_{\omega_0}(2+\lambda_B) - \mu_3 \sigma_{\omega_0}\lambda_B .$$

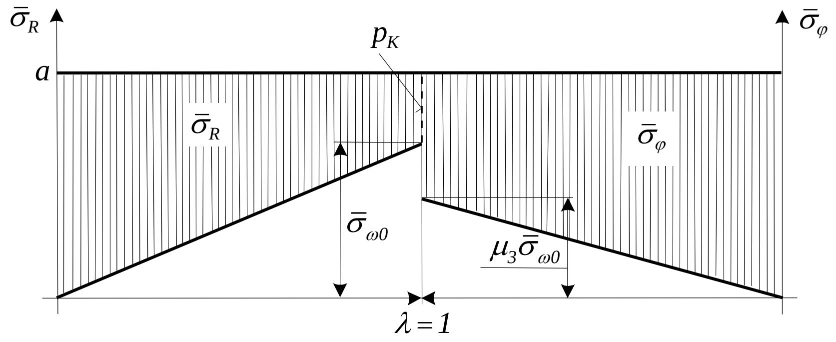
6.10.2. Gyorsan forgó tömör tárcsa

Tömör tárcsa: $R = R_B = 0 \ (\lambda_B = 0)$.

Tapasztalat: $R=0, \ (\lambda=0)$-nál is véges nagyságúak a feszültségek $\quad \Rightarrow \quad b = 0$.

Feszültségek: $\left.\begin{aligned} \bar{\sigma}_R &= a - \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda, \\ \bar{\sigma}_\varphi &= a - \mu_3 \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda. \end{aligned}\right\}$

Peremfeltétel: $\sigma_R(\lambda = 1) = p_K$.



A redukált feszültség maximuma *Mohr* szerint:

$\bar{\sigma}_{red\,max}(Mohr) = \bar{\sigma}_\varphi(\lambda = 0) = a = \bar{\sigma}_{\omega 0} + p_K$.

6.10.3. Gyorsan forgó egyenszilárdságú tömör tárcsa

Kérdés: Milyen $b = b(R)$ tárcsavastagsággal érhető el a $\bar{\sigma}_R = \bar{\sigma}_\varphi = \bar{\sigma}_0 =$állandó feltétel teljesülése?

A forgó tárcsa térfogati terhelése: $q_R = \rho\omega^2 R$.

Egyensúlyi egyenlet ÁSF esetén henger koordináta-rendszerben:

$$\frac{d(\bar{\sigma}_R b)}{dR} + \frac{(\bar{\sigma}_R - \bar{\sigma}_\varphi)b}{R} + b\,q_R = 0.$$

A $\bar{\sigma}_R = \bar{\sigma}_\varphi = \bar{\sigma}_0 =$állandó, illetve a $\bar{\sigma}_R - \bar{\sigma}_\varphi = 0$ feltétel teljesülését akarjuk elérni!

$$\bar{\sigma}_0 \frac{db}{dR} + b\,q_R = 0,$$

$$\frac{db}{dR} + \underbrace{\frac{\rho\omega^2}{\bar{\sigma}_0}}_{K\,=\,\text{áll.}} R\,b = 0.$$ Ez egy szétválasztható típusú differenciálegyenlet.

A differenciálegyenlet megoldása:

Átrendezés után: $\dfrac{db}{b} = -K\,R\,dR$.

Mindkét oldalt integrálva: $\displaystyle\int_{b_0}^{b} \frac{db}{b} = -K \int_{R=0}^{R} R\,dR$, ahol b_0 a tárcsavastagság az $R = 0$ helyen.

Az integrálást elvégezve: $ln\frac{b}{b_0}=-KR^2 \quad \Rightarrow \quad b=b(R)=b_0\,e^{-\frac{K}{2}R^2}$.

Ez az egyenszilárdságú gyorsan forgó tömör tárcsa meridián görbéjének egyenlete.
A görbe inflexiós pontjának megkeresése:

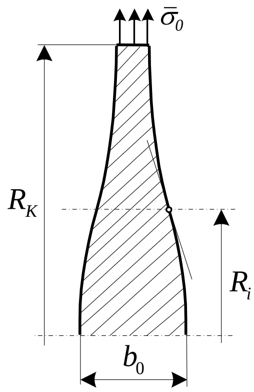
Az első derivált: $\frac{d\,b}{dR}=-b(KR)$,

A második derivált: $\frac{d^2b}{dR^2}=\frac{d\,b}{dR}(-KR)-bK=bK^2R^2-bK=b\left(K^2R^2-K\right)=0$.

Az átalakítás során felhasználtuk, hogy $\frac{d\,b}{dR}=b_0\,e^{-\frac{K}{2}R^2}\,2\left(-\frac{K}{2}\right)R=-bKR$.

A görbe inflexiós pontjában a második derivált nulla:

$\frac{d^2b}{dR^2}=KR^2-1=0, \qquad \Rightarrow \qquad R_i=\sqrt{\frac{1}{K}}=\sqrt{\frac{\bar{\sigma}_0}{\rho\omega^2}}$ az inflexiós hely sugara.



A megoldás az $R\to\infty$ esetre érvényes.

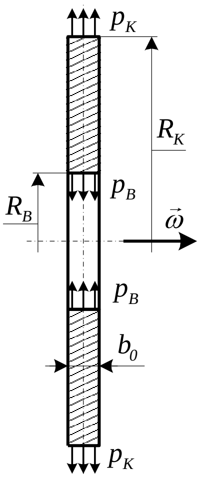
A megoldást úgy használjuk, hogy a tárcsát az R_K -nál elvágjuk és itt működtetünk egy $p_K=\bar{\sigma}_0$ felületi terhelést.

Gyakorlati példa:

Gázturbina forgórésze modellezhető így.
A $p_K=\bar{\sigma}_0$ a lapátozás forgás következtében fellépő hatása.

6.10.4 Gyakorló feladatok gyorsan forgó kör és körgyűrű alakú tárcsákra

6.10.4.1. feladat: Gyorsan forgó körgyűrű tárcsa



Adott:

Az ábrán látható $\vec{\omega}$ szögsebességgel gyorsan forgó furatos tárcsa anyaga, geometriája és szögsebessége:

$E=2\cdot10^5$ MPa, $\nu=1/3$, $\rho=8000$ kg/m^3, $b_0=20$ mm,

$R_K=200$ mm, $R_B=100$ mm, $\omega=300$ rad/s, $p_K=p_B=0$.

Feladat:

a) A gyorsan forgó tárcsa diagramjának megszerkesztése.

b) Az $R=R_K$ helyen levő *P* pontokban a feszültségi tenzor mátrixának felírása az R,φ,z hengerkoordináta-rendszerben.

c) A tárcsa szilárdságtani ellenőrzésének elvégzése *Mohr* szerint, ha a megengedett feszültség $\sigma_{meg}=80$ MPa .

d) A tárcsa belső átmérője ΔD_B megváltozásának kiszámítása.

Kidolgozás:

a) A forgó tárcsa diagramjának megszerkesztése:

$$\lambda_B = \frac{R_B^2}{R_K^2} = \left(\frac{100}{200}\right)^2 = 0{,}25, \quad \mu_3 = \frac{3\nu+1}{3+\nu} = \frac{3\cdot(1/3)+1}{3+(1/3)} = 0{,}6 .$$

$$\bar{\sigma}_{\omega 0} = \frac{(3+\nu)}{\nu}\frac{\rho}{8}(R_K\,\omega)^2 = \frac{(3+0{,}3\dot{3})\cdot 8\cdot 10^3}{0{,}3\dot{3}\cdot 8}(0{,}2\cdot 300)^2 = 36\cdot 10^6 \text{ Pa} = 36 \text{ MPa} .$$

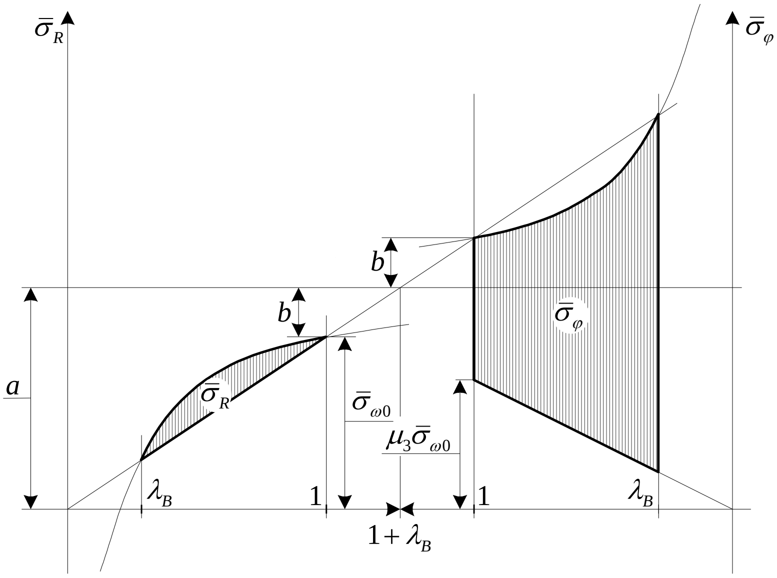
Feszültségek:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\sigma}_R &= a - \frac{b}{\lambda} - \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda \\ \bar{\sigma}_\varphi &= a + \frac{b}{\lambda} - \mu_3\bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda \\ \bar{\sigma}_z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Peremfeltételek:

$\bar{\sigma}_R(\lambda=\lambda_B) = p_B = 0$,

$\bar{\sigma}_R(\lambda=1) = p_K = 0$.



b) Az $R = R_K$ helyen levő P pontokban a feszültségi tenzor mátrixának felírása az R,φ,z hengerkoordináta-rendszerben:

$$\bar{\sigma}_R(\lambda=1) = p_K = 0, \quad \bar{\sigma}_\varphi(\lambda=1) = \bar{\sigma}_{\omega 0}(1+2\lambda_B-\mu_3) = 36\cdot 0{,}9 = 32{,}4 \text{ MPa}, \quad \bar{\sigma}_z(\lambda=1) = 0 .$$

$$\left[\underline{\underline{F}}_P\right]_{R\varphi z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}.$$

c) A tárcsa szilárdságtani ellenőrzésének elvégzése *Mohr* szerint, ha a megengedett feszültség $\sigma_{meg} = 80$ MPa .

$$\bar{\sigma}_{red\max} = \bar{\sigma}_\varphi(\lambda_B) = \bar{\sigma}_{\omega 0}(2+\lambda_B-\mu_3\lambda_B) = 36\cdot 2{,}1 = 75{,}6 \text{ MPa} .$$

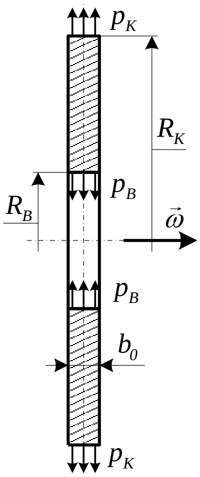
$\bar{\sigma}_{red\,max} = 75{,}6$ MPa $< \sigma_{meg} = 80$ MPa , ezért a tárcsa szilárdságtani szempontból megfelel.

d) A tárcsa belső átmérője ΔD_B megváltozásának kiszámítása:

A *Hooke*-törvény szerint: $\bar{\varepsilon}_\varphi = \dfrac{1}{2G}\left[\bar{\sigma}_\varphi - \dfrac{\nu}{1+\nu}\bar{\sigma}_\varphi\right] = \dfrac{1}{2G}\dfrac{1}{1+\nu}\bar{\sigma}_\varphi = \dfrac{\bar{\sigma}_\varphi}{E}$.

$$\Delta D_B = 2R_B\bar{\varepsilon}_\varphi = \frac{2R_B}{E}\bar{\sigma}_\varphi(\lambda_B) = \frac{200}{2\cdot 10^5}32{,}4 = 3{,}24\cdot 10^{-2} \text{ mm} = 32{,}4\ \mu\text{m} .$$

6.10.4.2. feladat: Gyorsan forgó furatos körtárcsa



Adott:

Az ábrán látható állandó fordulatszámmal gyorsan forgó furatos tárcsa méretei, anyaga és fordulatszáma:

$\nu = 0{,}33$, $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $R_K = 200 \text{ mm}$, $R_B = 20 \text{ mm}$,

$n = 3000$ ford/min , $p_K = p_B = 0$.

Feladat:

a) A $\bar{\sigma}_R(\lambda)$ és a $\bar{\sigma}_\varphi(\lambda)$ függvények meghatározása.

b) A $\bar{\sigma}_R(\lambda)$ feszültség maximumának meghatározása.

c) A furatos tárcsa megengedett legnagyobb fordulatszámának meghatározása, ha $\sigma_{meg} = 100$ MPa .

Kidolgozás:

a) A $\bar{\sigma}_R(\lambda)$ és a $\bar{\sigma}_\varphi(\lambda)$ függvények meghatározása:

$$\lambda_B = \frac{R_B^2}{R_K^2} = \left(\frac{20}{200}\right)^2 = 0{,}01,\quad \mu_3 = \frac{3\nu+1}{3+\nu} = \frac{3\cdot(0{,}33)+1}{3+(0{,}33)} = 0{,}598,\quad \omega = \frac{2\pi}{60}n = 314{,}2\ \frac{1}{\text{s}}$$

$$\bar{\sigma}_{\omega 0} = \frac{(3+\nu)}{\nu}\frac{\rho}{8}(R_K\,\omega)^2 = \frac{(3+0{,}33)\cdot 7{,}8\cdot 10^3}{0{,}33\cdot 8}(0{,}2\cdot 314{,}2)^2 = 38{,}85\cdot 10^6 \text{ Pa} = 38{,}85 \text{ MPa}\ .$$

Az átlagos feszültségek:

$$\bar{\sigma}_R = a - \frac{b}{\lambda} - \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda,\quad \bar{\sigma}_\varphi = a + \frac{b}{\lambda} - \mu_3\bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda,\quad \bar{\sigma}_z = 0\,.$$

Peremfeltételek:

$$\bar{\sigma}_R(\lambda = \lambda_B) = p_B = 0 \quad\Rightarrow\quad a - \frac{b}{0{,}01} = 0{,}01\,\bar{\sigma}_{\omega 0}\,,$$

$$\bar{\sigma}_R(\lambda = 1) = p_K = 0 \quad\Rightarrow\quad a - b = \bar{\sigma}_{\omega 0}\,.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$b = \frac{\bar{\sigma}_{\omega 0}}{100} = 3{,}89 \text{ MPa},$$

$$a = 1{,}01\,\bar{\sigma}_{\omega 0} = 39{,}25 \text{ MPa}.$$

A peremfeltételekből meghatározott *a,b* paramétereket az átlagos feszültségekre felírt összefüggésekbe helyettesítve:

$$\bar{\sigma}_R(\lambda) = 39{,}25 - \frac{3{,}89}{\lambda} - 38{,}85\lambda\ ;\quad \bar{\sigma}_\varphi(\lambda) = 39{,}25 + \frac{3{,}89}{\lambda} - 23{,}23\lambda\ ;\quad \bar{\sigma}_z = 0.$$

b) A $\bar{\sigma}_R(\lambda)$ feszültség maximumának meghatározása:

Szélsőérték ott van, ahol a $\bar{\sigma}_R(\lambda)$ függvény deriváltja zérus:

$$\frac{d\bar{\sigma}_R(\lambda)}{d\lambda} = \frac{3{,}89}{\lambda^2} - 38{,}85 = 0,\ \Rightarrow\ \lambda = 0{,}3164 \text{ (a negatív gyöknek nincs fizikai tartalma).}$$

$$\bar{\sigma}_{R\max} = \bar{\sigma}_R\left(\lambda = 0{,}3164\right) = 39{,}25 - \frac{3{,}89}{0{,}3164} - 38{,}85 \cdot 0{,}3164 = 14{,}67 \text{ MPa} .$$

c) A furatos tárcsa megengedett legnagyobb fordulatszámának meghatározása, ha $\bar{\sigma}_{meg} = 100$ MPa :

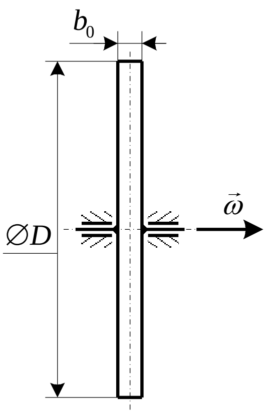
$$\bar{\sigma}_{red\max} = \bar{\sigma}_\varphi\left(\lambda_B\right) = \left(2 + \lambda_B - \mu_3\lambda_B\right)\bar{\sigma}_{\omega 0\max} = 2{,}004\,\bar{\sigma}_{\omega 0\max} = \bar{\sigma}_{meg} = 100 \text{ MPa} ,$$

$$\bar{\sigma}_{\omega 0\max} = \frac{100}{2{,}004} = 49{,}9 \text{ MPa} .$$

$$\bar{\sigma}_{\omega 0} = \frac{\left(3+\nu\right)}{\nu}\frac{\rho}{8}\left(R_K\,\omega\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_{\max} = \sqrt{\frac{8\nu\bar{\sigma}_{\omega 0\max}}{\left(3+\nu\right)\rho R_K^2}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 0{,}33 \cdot 49{,}9 \cdot 10^6}{3{,}33 \cdot 7800 \cdot 0{,}04}} = 356\,\frac{1}{\text{s}} .$$

$$n_{\max} = \omega_{\max}\frac{60}{2\pi} = 3400\,\frac{\text{ford}}{\text{min}} .$$

6.10.4.3. feladat: Gyorsan forgó tömör körtárcsa



Adott: A D átmérőjű tömör tárcsa, amely $\vec{\omega} =$ állandó szögsebességgel forog. $D = 100$ mm, $b_0 = 10$ mm, $\rho = 8000$ kg / m^3, $\nu = 1/3$, $\sigma_{\omega 0} = 30$ MPa .

Feladat:

a) A $\bar{\sigma}_R(\lambda), \bar{\sigma}_\varphi(\lambda)$ függvények meghatározása.

b) A $\bar{\sigma}_R(\lambda), \bar{\sigma}_\varphi(\lambda)$ diagramok megrajzolása.

c) A *Mohr*-féle redukált feszültség maximumának meghatározása.

d) A tárcsa legnagyobb szögsebességének kiszámítása, ha a megengedett feszültség: $\sigma_{meg} = 140$ MPa .

Kidolgozás:

a) A $\bar{\sigma}_R(\lambda), \bar{\sigma}_\varphi(\lambda)$ függvények meghatározása:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\sigma}_R &= a - \frac{b}{\lambda} - \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda \\ \bar{\sigma}_\varphi &= a + \frac{b}{\lambda} - \mu_3\bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda \end{aligned}\right\} \qquad \lambda = \frac{R^2}{R_K^2} \quad , \quad \mu_3 = \frac{1+3\nu}{3+\nu} = \frac{1+3 \cdot 0{,}3333}{3+0{,}3333} = 0{,}6 \;.$$

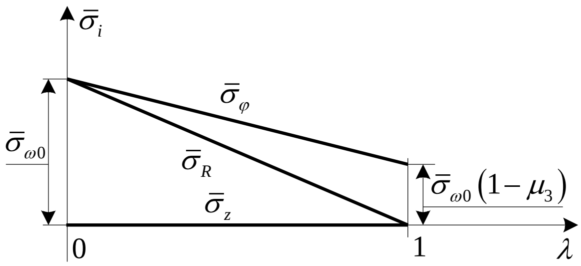
Az állandók meghatározása a peremfeltételekből:

$$\bar{\sigma}_R\left(\lambda = 1\right) = 0 = a - \bar{\sigma}_{\omega 0} \quad \Rightarrow \quad a = \bar{\sigma}_{\omega 0} = 30 \text{ MPa} .$$

$$\bar{\sigma}_R\left(\lambda = 0\right) \ \text{ véges } \ \Rightarrow \ b = 0 .$$

b) A $\bar{\sigma}_R(\lambda), \bar{\sigma}_\varphi(\lambda)$ diagramok megrajzolása:

Feszültségi diagramok:



A feszültségeloszlás függvények:

$$\bar{\sigma}_R(\lambda)=\bar{\sigma}_{\omega 0}(1-\lambda)=30(1-\lambda)\ [\text{MPa}],$$
$$\bar{\sigma}_\varphi(\lambda)=\bar{\sigma}_{\omega 0}(1-\mu_3\lambda)=30(1-0,6\lambda)\ [\text{MPa}],$$
$$\bar{\sigma}_z(\lambda)=0\,.$$

c) A *Mohr*-féle redukált feszültség maximumának meghatározása:

A fenti tárcsa-diagramról leolvasható, hogy a legnagyobb- és a legkisebb főfeszültség közti különbség a $\lambda=0$ helyen, vagyis a tárcsa középpontjában lép fel.

$$\bar{\sigma}_{red\max}(Mohr)=\bar{\sigma}_R(\lambda=0)-\bar{\sigma}_z(\lambda=0)=\bar{\sigma}_{\omega 0}=30\ \text{MPa}\,.$$

d) A tárcsa legnagyobb szögsebességének kiszámítása, ha $\sigma_{meg}=140$ MPa :

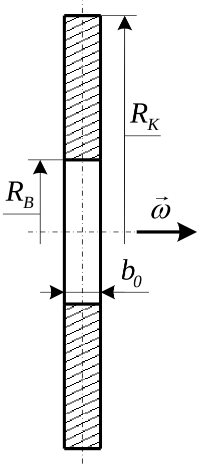
A *Mohr*-elmélet szerint a tárcsa szilárdsági szempontból akkor megfelelő, ha a *Mohr*-féle redukált feszültség sehol sem haladja meg a megengedett feszültséget:

$$\sigma_{meg}\geq\bar{\sigma}_{red\max}(Mohr)=\bar{\sigma}_{\omega 0}\quad\Rightarrow\quad\bar{\sigma}_{\omega 0}=140\ \text{MPa}\,.$$

A $\bar{\sigma}_{\omega 0}=\dfrac{(3+\nu)}{\nu}\dfrac{\rho}{8}(R_K\,\omega)^2$ összefüggésből a maximális szögsebesség meghatározható:

$$\omega_{\max}=\sqrt{\frac{8\nu}{3+\nu}\frac{\bar{\sigma}_{\omega 0}}{\rho R_K^2}}=\sqrt{\frac{8/3}{10/3}\frac{140\cdot 10^6}{8000\cdot 0,0025}}=2366\ \frac{1}{s},\quad\Rightarrow\quad n_{\max}=\frac{60\omega_{\max}}{2\pi}=22600\ \frac{\text{ford}}{\text{min}}\,.$$

6.10.4.4. feladat: Gyorsan forgó furatos körtárcsa



Adott:

Az ábrán látható $\vec{\omega}$ szögsebességgel gyorsan forgó furatos tárcsa anyaga, külső sugara és megengedett feszültsége: $E=2\cdot 10^5$ MPa, $\nu=1/3$, $\rho=8000\ \text{kg}/\text{m}^3$, $R_K=200$ mm, $\sigma_{meg}=80$ MPa .

Feladat:

a) A forgó tárcsa diagramjának megrajzolása.

b) Annak vizsgálata, hogyan függ a maximális fordulatszám a furat átmérőjétől.

Kidolgozás:

a) A forgó tárcsa diagramjának megrajzolása:

$$\bar{\sigma}_{\omega 0} = \frac{(3+\nu)}{\nu}\frac{\rho}{8}(R_K\,\omega)^2 = \frac{(10/3)\cdot 8\cdot 10^3}{1/3\cdot 8}(0{,}2\cdot\omega)^2 = 400\omega^2, \quad \mu_3 = \frac{3\nu+1}{3+\nu} = \frac{3\cdot(1/3)+1}{3+(1/3)} = 0{,}6.$$

Feszültségek:

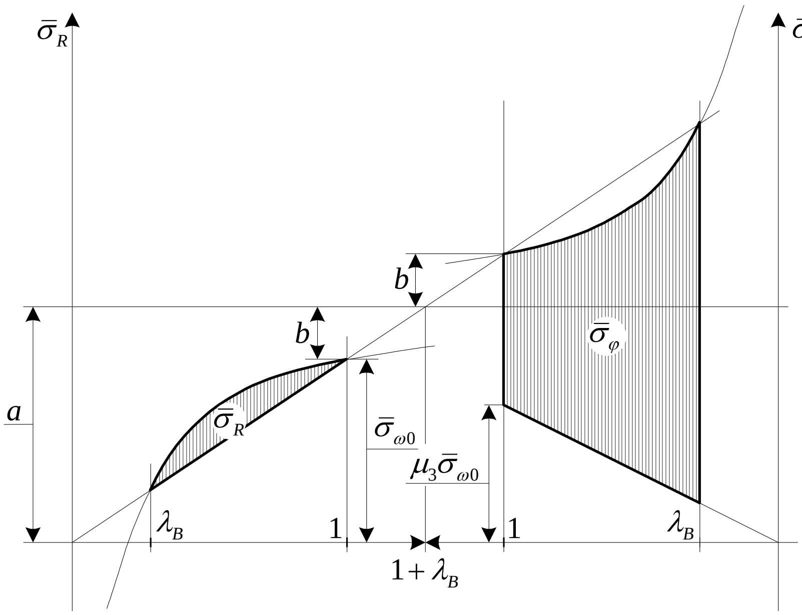
$$\left.\begin{aligned} \bar{\sigma}_R &= a - \frac{b}{\lambda} - \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda, \\ \bar{\sigma}_\varphi &= a + \frac{b}{\lambda} - \mu_3\bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda, \\ \bar{\sigma}_z &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Peremfeltételek:

$$\bar{\sigma}_R(\lambda = \lambda_B) = p_B = 0,$$

$$\bar{\sigma}_R(\lambda = 1) = p_K = 0.$$

A forgó furatos tárcsa feszültség eloszlási diagramja:



b) Annak vizsgálata, hogyan függ a maximális fordulatszám a furat átmérőjétől:

A tárcsadiagramról leolvasható, hogy a *Mohr*-féle redukált feszültség maximális értéke:

$$\bar{\sigma}_{red\,\max} = \bar{\sigma}_\varphi(\lambda_B) - \bar{\sigma}_z(\lambda_B) = \bar{\sigma}_{\omega 0}(2 + \lambda_B - \mu_3\lambda_B) - 0 = 400\omega^2(2 + 0{,}4\lambda_B) \quad [\text{MPa}].$$

A fordulatszám csak addig növelhető, amíg a redukált feszültség el nem éri a megengedett feszültséget:

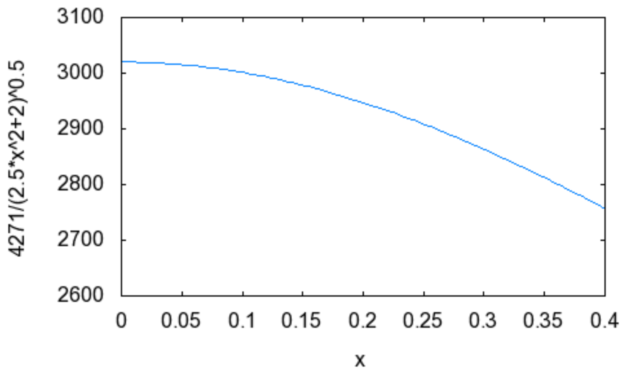
$$\sigma_{meg} = 80 \text{ MPa} = \bar{\sigma}_{red\,\max}(\omega_{\max}) = 400\omega_{\max}^2(2 + 0{,}4\lambda_B).$$

Figyelembe véve a $\lambda_B = \frac{R_B^2}{R_K^2} = \frac{R_B^2}{0{,}04} = 25R_B^2 = 6{,}25D_B^2$ és $\omega = \frac{2\pi}{60}n$ összefüggéseket:

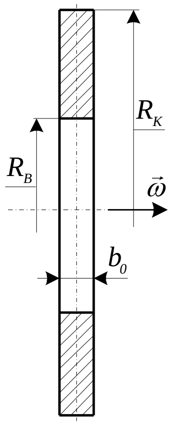
$$80\cdot 10^6 = 400\left(\frac{2\pi}{60}n_{\max}\right)^2\left(2 + 0{,}4\cdot 6{,}25D_B^2\right) \quad \Rightarrow \quad n_{\max} = \frac{4271}{\sqrt{2 + 2{,}5D_B^2}}\left[\frac{\text{ford}}{\text{min}}\right].$$

A képletbe a furatátmérőt méterben kell behelyettesíteni.

Az $n_{\max} = n_{\max}(D_B)$ függvény a jobb oldali ábrán látható:



6.10.4.5. feladat: Gyorsan forgó furatos körtárcsa



Adott:

Az $\vec{\omega}$ szögsebességgel gyorsan forgó furatos tárcsa geometriája, anyaga és terhelése:

$D_K = 400\,\mathrm{mm}$, $D_B = 40\,\mathrm{mm}$, $\rho = 7800\,\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, $n = 3000\,\dfrac{1}{\min}$, $\nu = 0{,}3$.

A forgásból származó és az anyagra jellemző állandók:

$$\overline{\sigma}_{\omega 0} = \frac{3+\nu}{8}\left(R_K\omega\right)^2 = 12{,}701\,\mathrm{MPa}\,,\quad \mu_3 = \frac{1+3\nu}{3+\nu} = \frac{1{,}9}{3{,}3} = 0{,}5757\,.$$

Feladat:

a) A $\overline{\sigma}_R$, $\overline{\sigma}_\varphi$ feszültségek meghatározása.

b) Legfeljebb milyen szögsebességgel foroghat a tárcsa, ha $\sigma_{meg} = 100\,\mathrm{MPa}$?

Kidolgozás:

a) A $\overline{\sigma}_R$, $\overline{\sigma}_\varphi$ feszültségek meghatározása:

A feszültségeloszlás:

$$\left.\begin{aligned} \overline{\sigma}_R &= \mathrm{a} - \frac{b}{\lambda} - \overline{\sigma}_{\omega 0}\lambda \\ \overline{\sigma}_\varphi &= \mathrm{a} + \frac{b}{\lambda} - \mu_3\overline{\sigma}_{\omega 0}\lambda \end{aligned}\right\}\qquad \lambda = \frac{R^2}{R_K^2}\,.$$

Peremfeltételek:

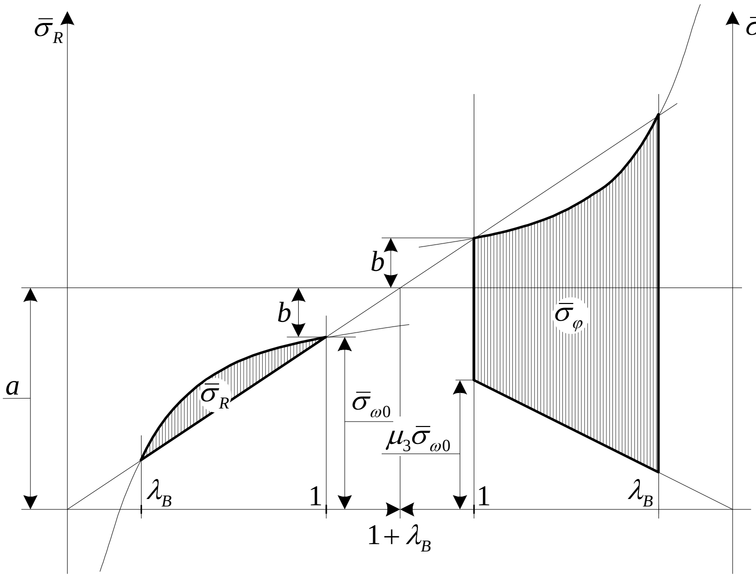
$$\begin{aligned} \overline{\sigma}_R(\lambda = 1) &= \mathrm{a} - \frac{b}{\lambda} - \overline{\sigma}_{\omega 0}\lambda = 0\,, & & & a - b - \overline{\sigma}_{\omega 0} &= 0\,,\\ \overline{\sigma}_R(\lambda_B) &= \mathrm{a} + \frac{b}{\lambda_B} - \overline{\sigma}_{\omega 0}\lambda_B = 0\,. & &\Rightarrow & \mathrm{b} + \overline{\sigma}_{\omega 0} - \frac{b}{\lambda_B} - \overline{\sigma}_{\omega 0}\lambda_B &= 0\,. \end{aligned}$$

Az első egyenletből: $\mathrm{a} = b + \overline{\sigma}_{\omega 0} = 12{,}83\,\mathrm{MPa}$.

Ezt behelyettesítve a másodikba: $\mathrm{b} + \overline{\sigma}_{\omega 0} - \dfrac{b}{\lambda_B} - \overline{\sigma}_{\omega 0}\lambda_B = 0\,, \Rightarrow\ \mathrm{b}\dfrac{\lambda_B - 1}{\lambda_B} + \overline{\sigma}_{\omega 0}\left(1 - \lambda_B\right) = 0\,.$

Ebből: $\mathrm{b}=\bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda_B=0{,}127$, $\mathrm{a}=b+\bar{\sigma}_{\omega 0}=12{,}83\,\mathrm{MPa}$.

A feszültségeloszlás, tárcsadiagram:



Jellemző feszültségek: $\bar{\sigma}_\varphi(\lambda=1)=5{,}7\,\mathrm{MPa}$, $\bar{\sigma}_\varphi(\lambda_B)=25{,}46\,\mathrm{MPa}$.

$$\bar{\sigma}_{R\max}=?$$

$$\frac{d\bar{\sigma}_R}{d\lambda}=0=\frac{0{,}127}{\lambda^2}-12{,}7 \quad\Rightarrow\quad \lambda=0{,}1 \quad\Rightarrow\quad \bar{\sigma}_{R\max}=10{,}29\,\mathrm{MPa}.$$

b) A tárcsa lehetséges legnagyobb szögsebessége, ha $\sigma_{meg}=100\,\mathrm{MPa}$:

A tárcsadiagramból: $\bar{\sigma}_{red\max}=\bar{\sigma}_\varphi(\lambda_B)=\bar{\sigma}_{\omega 0}(2+\lambda_B)-\mu_3\bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda_B=\bar{\sigma}_{\omega 0}(2+\lambda_B-\mu_3\lambda_B)$.

Méretezés: $\bar{\sigma}_{red\max}\le\bar{\sigma}_{meg}$.

$$\bar{\sigma}_{\omega 0}\le\frac{\sigma_{meg}}{2+\lambda_B-\mu_3\lambda_B}=\frac{100}{2{,}0157}=49{,}61\,\mathrm{MPa}$$

$$\omega_{\max}=\sqrt{\frac{8}{3+\nu}\frac{1}{R_K}}=\sqrt{\frac{8}{3{,}3}\cdot\frac{49{,}61\cdot 10^6}{7800}}\frac{1}{0{,}2}=621\frac{1}{s}.$$

$$n_{\max}=\frac{60\omega_{\max}}{2\pi}=\frac{60\cdot 621}{6{,}28}=5{,}932\frac{1}{\min}.$$

6.10.4.16. feladat: Gyorsan forgó tömör körtárcsa

<u>Adott:</u> A forgó tömör tárcsa geometriája, fordulatszáma és anyaga.

$$D=400\,\mathrm{mm},\ \rho=7800\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3},\ n=3000\,\frac{1}{\min},\ \nu=0{,}3.$$

<u>Feladat:</u>

a) A $\bar{\sigma}_R$, $\bar{\sigma}_\varphi$ feszültségek meghatározása.

b) Milyen fordulatszámnál megy tönkre a tárcsa, ha $\sigma_{meg} = 240$ MPa ?

Kidolgozás:

a) A $\overline{\sigma}_R$, $\overline{\sigma}_\varphi$ feszültségek meghatározása:

$R = 0$ -nál $\sigma_R, \sigma_\varphi \neq \infty \quad \Rightarrow \quad b = 0$.

$$\left.\begin{aligned}\overline{\sigma}_R &= \mathrm{a} - \overline{\sigma}_{\omega 0}\lambda \\ \overline{\sigma}_\varphi &= \mathrm{a} - \mu_3 \sigma_{\omega 0}\lambda\end{aligned}\right\}, \text{ ahol} \qquad \overline{\sigma}_{\omega 0} = \frac{3+\nu}{8}\rho\left(R_K\omega\right)^2, \quad \mu_3 = \frac{1+3\nu}{3+\nu} = \frac{1,9}{3,3} = 0,5757 .$$

$$R_K = \frac{D}{2} = 0,2 \text{ m}, \quad \omega = \frac{2\pi n}{60} = 314,15\,\frac{1}{\text{s}} .$$

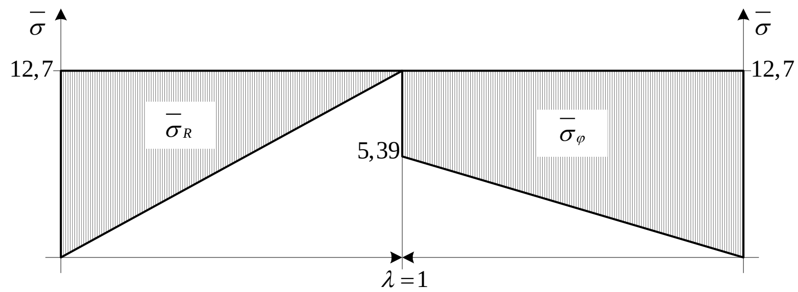
$$\overline{\sigma}_{\omega 0} = \frac{3,3}{8} 7800\left(0,2 \cdot 314,15\right)^2 = 12\,701\,431,64 \text{ Pa} .$$

$$\overline{\sigma}_{\omega 0} = 12,701 \text{ MPa} .$$

Peremfeltétel: $\quad \overline{\sigma}_R\left(\lambda = 1\right) = 0 = \mathrm{a} - \overline{\sigma}_{\omega 0}, \qquad \mathrm{a} = \overline{\sigma}_{\omega 0} = 12,701 \text{ MPa}$.

Feszültségek_

$$\left.\begin{aligned}\overline{\sigma}_R &= \overline{\sigma}_{\omega 0}\left(1 - \lambda\right) \\ \overline{\sigma}_\varphi &= \overline{\sigma}_{\omega 0}\left(1 - \mu_3\lambda\right)\end{aligned}\right\}$$



b) A megengedett maximális fordulatszám meghatározása:

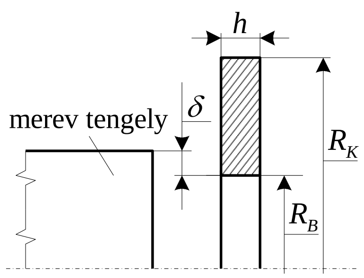
Mohr elmélet: $\overline{\sigma}_{red\max}\left(Mohr\right) = \left(\overline{\sigma}_1 - \underbrace{\overline{\sigma}_3}_{=0}\right) \leq \sigma_{meg}$.

$$\overline{\sigma}_{red\max} = \overline{\sigma}_R\left(\lambda = 0\right) = \overline{\sigma}_\varphi\left(\lambda = 0\right) = \overline{\sigma}_{\omega 0} \leq \sigma_{meg} .$$

$$\frac{3+\nu}{8}\rho R_K^2\left(\frac{2\pi n_{\max}}{60}\right)^2 \leq \sigma_{meg} .$$

$$n_{\max} \leq \sqrt{\frac{\sigma_F \cdot 8}{\left(3+\nu\right)\rho R_K^2}}\,\frac{60}{2\pi} = \sqrt{\frac{240 \cdot 8}{3,3 \cdot 7800 \cdot 0,04}10^3}\,\frac{60}{6,283} = 13,041\,\frac{1}{\min} .$$

6.10.4.7. feladat: Merev tengelyre szerelt gyorsan forgó furatos körtárcsa



Adott:

A merev tengelyre δ túlfedéssel szerelt tárcsa méretei és anyagjellemzői:

$R_B = 20$ mm, $R_K = 200$ mm, $h = 40$ mm,

$\delta = 0,02$ mm, $\rho = 7800\,\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $\nu = 0,3$, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Pa .

Feladat:

a) Annak az $\omega_{\max}$ szögsebességnek a meghatározása, amelynél a tárcsa „lelazul” (megszűnik a túlfedés).

b) A feszültségek meghatározása ebben a „lelazulási” esetben.

c) Milyen p nyomás lép fel a tárcsa és a tengely között, ha nem forog a tengely?

d) Mekkora axiális erő szükséges a tárcsa lehúzásához, ha $\mu = 0,25$?

e) Melyik állapot, a gyors forgási, vagy a nyugalmi állapot a veszélyesebb?

Kidolgozás:

a) Annak az $\omega_{\max}$ szögsebességnek a meghatározása, amelynél a tárcsa „lelazul” (megszűnik a túlfedés):

$$\lambda = \frac{R^2}{R_K^2},\ \lambda_B = \frac{R_B^2}{R_K^2} = \left(\frac{1}{10}\right)^2 = 0,01, \qquad \mu_3 = \frac{1+3\nu}{3+\nu} = \frac{1,9}{3,3} = 0,5757\,.$$

Feszültségek:
$$\left.\begin{aligned} \overline{\sigma}_R &= \mathrm{a} - \frac{b}{\lambda} - \overline{\sigma}_{\omega 0}\lambda, \\ \overline{\sigma}_\varphi &= \mathrm{a} + \frac{b}{\lambda} - \mu_3\overline{\sigma}_{\omega 0}\lambda. \end{aligned}\right\}, \text{ ahol } \overline{\sigma}_{\omega 0} = \frac{3+\nu}{8}\rho\left(R_K\omega\right)^2.$$

Peremfeltételek a lazuláskor:
$$\left.\begin{aligned} \overline{\sigma}_R\left(\lambda = 1\right) &= 0 = \mathrm{a} - b\overline{\sigma}_{\omega 0} \\ \overline{\sigma}_R\left(\lambda_B\right) &= 0 = \mathrm{a} - \frac{b}{\lambda_B} - \overline{\sigma}_{\omega 0}\lambda_B \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{a} = b + \overline{\sigma}_{\omega 0}\,.$$

Az állandók meghatározása:

$$0 = \mathrm{b} - \frac{b}{\lambda_B} + \overline{\sigma}_{\omega 0} - \overline{\sigma}_{\omega 0}\lambda_B = \mathrm{b}\frac{\lambda_B - 1}{\lambda_B} + \overline{\sigma}_{\omega 0}\lambda_B\left(1-\lambda_B\right) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{b} = \overline{\sigma}_{\omega 0}\lambda_B, \quad \mathrm{a} = \overline{\sigma}_{\omega 0}\left(1+\lambda_B\right).$$

A túlfedés: $$\delta = \mathrm{R}_B\varepsilon_\varphi\left(\lambda_B\right) = \frac{\mathrm{R}_B}{E}\sigma_\varphi\left(\lambda_B\right) = \frac{\mathrm{R}_B}{E}\overline{\sigma}_{\omega 0}\underbrace{\left[\left(1+\lambda_B\right)+1-\mu_3\lambda_B\right]}_{\left[2+\left(1-\mu_3\right)\lambda_B\right]}.$$

Ebből: $$\overline{\sigma}_{\omega 0} = \frac{E}{\mathrm{R}_B}\frac{\delta}{2+\left(1-\mu_3\right)\lambda_B}, \text{ illetve } \frac{3+\nu}{8}\rho R_K^2\omega_{\max}^2 = \frac{E}{\mathrm{R}_B}\frac{\delta}{2+\left(1-\mu_3\right)\lambda_B}.$$

$$\omega_{\max} = \frac{1}{R_K}\sqrt{\frac{E}{\rho\mathrm{R}_B}\frac{8}{3+\nu}\frac{\delta}{2+\left(1-\mu_3\right)\lambda_B}} = \frac{1}{0,2}\sqrt{\frac{8}{3,3}\cdot\frac{2\cdot 10^6}{7800\cdot 0,02}\frac{2\cdot 10^{-5}}{2+\left(1-0,57\right)10^{-2}}}\,.$$

$$\omega_{\max} = 881,55\,\frac{1}{s}.$$

b) A feszültségek meghatározása ebben a „lelazulási” esetben:

$$\overline{\sigma}_{\omega 0} = \frac{3+\nu}{8}\rho\,R_K^2\,\omega_{\max}^2 = \frac{3,3}{8}\cdot 7800\cdot 0,2^2\cdot 881,5^2 = 100\,005\,337,6 \text{ Pa}\,.$$

$$\overline{\sigma}_{\omega 0} = 100 \text{ MPa}\,.$$

Az állandók meghatározása: $\mathrm{a}=\mathrm{b}+\bar{\sigma}_{\omega 0}\left(1+\lambda_B\right)=101\,\mathrm{MPa}$, $\mathrm{b}=\bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda_B=1\,\mathrm{MPa}$.

Feszültségek a külső és belső sugárnál:

$$\bar{\sigma}_R\left(\lambda=1\right)=a-b-\bar{\sigma}_{\omega 0}=\bar{\sigma}_{\omega 0}\left(1+\lambda_B\right)-\bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda_B-\bar{\sigma}_{\omega 0}=0\,.$$

$$\bar{\sigma}_R\left(\lambda_B\right)=a-\frac{b}{\lambda_B}-\bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda_B=\bar{\sigma}_{\omega 0}\left(1+\lambda_B\right)-\bar{\sigma}_{\omega 0}-\bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda_B=0\,.$$

$$\bar{\sigma}_\varphi\left(\lambda=1\right)=a+b-\mu_3\bar{\sigma}_{\omega 0}=\bar{\sigma}_{\omega 0}\left(1+\lambda_B\right)+\bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda_B-\mu_3\bar{\sigma}_{\omega 0}=$$

$$=\bar{\sigma}_{\omega 0}\left(1+2\lambda_B-\mu_3\right)=100\left(1+0,02-0,5757\right)=44,43\,\mathrm{MPa}\,.$$

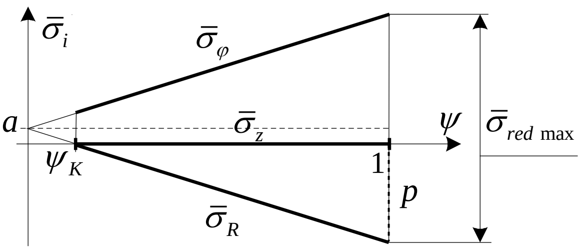
$$\bar{\sigma}_\varphi\left(\lambda_B\right)\quad=a+\frac{b}{\lambda_B}-\mu_3\bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda_B=\bar{\sigma}_{\omega 0}\left(1+\lambda_B\right)+\bar{\sigma}_{\omega 0}-\mu_3\bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda_B=$$

$$=\bar{\sigma}_{\omega 0}\left(1+2\lambda_B-\mu_3\lambda_B\right)=100\left(1+0,01-0,00575\right)=200,4\,\mathrm{MPa}\,.$$

c) Milyen p nyomás lép fel a tárcsa és a tengely között, ha nem forog a tengely?

Feszültségeloszlás álló tárcsa esetén: $\left.\begin{aligned}\bar{\sigma}_R&=a-b\,\psi\\ \bar{\sigma}_\varphi&=a+b\,\psi\end{aligned}\right\}$, ahol $\psi=\dfrac{R_B^2}{R^2}$.

Peremfeltételek: $\left.\begin{aligned}\bar{\sigma}_R\left(\psi_K\right)&=0=a-b\,\psi_K\\ \bar{\sigma}_R\left(\psi=1\right)&=-p=a-b\end{aligned}\right\}$, $\qquad \psi_K=\dfrac{R_B^2}{R_K^2}=0,01\,.$



A túlfedés: $\delta=\mathrm{R}_B\bar{\varepsilon}_\varphi\left(\psi=1\right)=\dfrac{\mathrm{R}_B}{E}\left[\bar{\sigma}_\varphi-\nu\bar{\sigma}_R\right]_{\psi=1}$.

$$\delta=\frac{\mathrm{R}_B}{E}\left[\frac{p}{1-\psi_K}2-p+\nu p\right]=\frac{\mathrm{R}_B}{E}\,p\left(\frac{1+\psi_K}{1-\psi_K}+\nu\right).$$

Ebből: $$p=\frac{\delta E}{\mathrm{R}_B\left(\dfrac{1+\psi_K}{1-\psi_K}+\nu\right)}=\frac{2\cdot 10^6\cdot 2\cdot 10^{-5}}{0,02\left(\dfrac{1,01}{0,99}+0,3\right)}=151,5\cdot 10^6\,\mathrm{Pa}\approx 152\,\mathrm{MPa}\,.$$

d) Mekkora axiális erő szükséges a tárcsa lehúzásához, ha $\mu=0,25$?

$\mathrm{F}_{ax}=\mu\,\mathrm{p}\,2\mathrm{R}_B\pi\mathrm{h}=1{,}9\cdot 10^5\,\mathrm{N}=190\,\mathrm{kN}$.

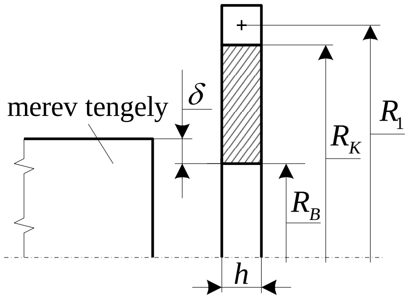
e) Melyik állapot, a gyors forgási, vagy a nyugalmi állapot a veszélyesebb?

$\sigma_{red\,\max}$ alapján dönthető el: $\sigma_{red\,\max}(\text{álló}) = \dfrac{2p}{1-2\nu} = 307{,}1\,\text{MPa}$.

$$\sigma_{red\,\max}(\text{forgó}) = \sigma_{\varphi}\left(\lambda_B\right) = 133{,}9\,\text{MPa}.$$

A nyugalmi állapot a veszélyesebb.

6.10.4.8. feladat: Merev tengelyre szerelt gyorsan forgó furatos körtárcsa



Adott:

A vázolt h vastagságú tárcsát δ túlfedéssel szerelik a merev tengelyre. A tárcsa kerületén sűrű lapátozás van. A lapátok együttes tömege m_1 és súlypontjuk az R_1 sugárra esik. Ismert a tárcsa geometriája és anyaga:
$R_B = 15\,\text{mm}$, $R_K = 120\,\text{mm}$, $R_1 = 135\,\text{mm}$, $h = 20\,\text{mm}$,

$m_1 = 1{,}5\,\text{kg}$, $\rho = 7860\,\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $E = 2\cdot 10^{11}\,\text{Pa}$, $\nu = 0{,}3$.

Feladat:

a) Milyen δ túlfedés kell ahhoz, hogy a tárcsa $\omega = 1000\;1/s$ szögsebesség esetén lazuljon le a tengelyről?

b) Mekkora p nyomás lép fel a tárcsa és a tengely között összeszerelés után, ha $\omega = 0$?

c) Tönkremenetel (törés) szempontjából melyik állapot a veszélyesebb?

Kidolgozás:

a) Milyen δ túlfedés kell ahhoz, hogy a tárcsa $\omega = 1000\;1/s$ szögsebesség esetén lazuljon le a tengelyről?

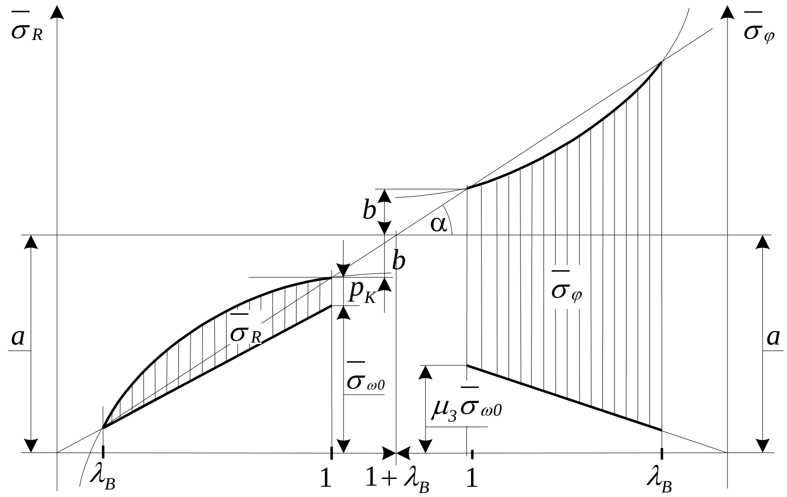
A lapátozásból származó kerületi (felületen megoszló) terhelés:

$$p_k = \frac{m_1 R_1 \omega^2}{2R_K \pi h} = \frac{1{,}5\cdot 0{,}135\cdot 1000^2}{2\cdot 0{,}12\cdot 3{,}1415\cdot 0{,}02} = 13{,}429\cdot 10^3\,\text{Pa} = 13{,}44\,\text{MPa}.$$

Feszültségek:
$$\left.\begin{aligned} \bar{\sigma}_R &= \text{a} - \frac{b}{\lambda} - \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda \\ \bar{\sigma}_{\varphi} &= \text{a} + \frac{b}{\lambda} - \mu_3 \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda \end{aligned}\right\},\quad \lambda = \frac{R^2}{R_K^2},\quad \bar{\sigma}_{\omega 0} = \frac{3+\nu}{8}\rho\left(R_K\omega\right)^2.$$

Peremfeltételek lazuláskor:
$$\left.\begin{aligned} \bar{\sigma}_R\left(\lambda = 1\right) &= \text{p} = \text{a} - b - \bar{\sigma}_{\omega 0}, \\ \bar{\sigma}_R\left(\lambda_B\right) &= \text{a} - \frac{b}{\lambda_B} - \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda_B. \end{aligned}\right\}$$

Tárcsa diagram:



Állandók meghatározása: $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\left(\bar{\sigma}_{\omega 0} + p_K\right) - \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda_B}{1-\lambda_B}$,

$$a = \frac{\bar{\sigma}_{\omega 0}\left(1-\lambda_B\right) + p_K}{1-\lambda_B} + \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda_B, \quad b = \frac{\bar{\sigma}_{\omega 0}\left(1-\lambda_B\right) + p_K}{1-\lambda_B}\lambda_B .$$

Az állandók kiszámítása: $\lambda_\mathrm{B} = \dfrac{\mathrm{R_B^2}}{\mathrm{R_K^2}} = \left(\dfrac{15}{120}\right)^2 = 15,63\cdot 10^{-3}, \ \mu_3 = \dfrac{1+3\nu}{3+\nu} = \dfrac{1,9}{3,3} = 0,5757 .$

$$\bar{\sigma}_{\omega 0} = \frac{3+\nu}{8}\rho R_K^2\omega^2 = \frac{3,3}{8}\cdot 7860\cdot 0,12^2\cdot 10^6 = 46,688\cdot 10^6\,\mathrm{Pa}{=}46,688\,\mathrm{MPa}\,,$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\bar{\sigma}_{\omega 0}\left(1-\lambda_B\right) + p_K}{1-\lambda_B} = 60,33\,\mathrm{MPa}\,,$$

$$\mathrm{a} = \mathrm{tg}\alpha + \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda_B = 60,33 + 46,688\cdot 15,63\cdot 10^{-3} = 61,06\,\mathrm{MPa}\,,$$

$$\mathrm{b} = \mathrm{tg}\alpha\cdot\lambda_B = 60,33\cdot 15,63\cdot 10^{-3} = 0,943\,\mathrm{MPa}\,.$$

Túlfedés: $\delta = \mathrm{R}_B\varepsilon_\varphi\left(\lambda_B\right) = \dfrac{\mathrm{R}_B}{E}\bar{\sigma}_\varphi\left(\lambda_B\right) = \dfrac{\mathrm{R}_B}{E}\left(a + \dfrac{b}{\lambda_B} - \mu_3\bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda_B\right) =$

$$= \frac{15}{2\cdot 10^5}\left(61,06 + 60,33 - 0,576\cdot 46,688\cdot 15,63\cdot 10^{-3}\right) = 9,1\cdot 10^{-3}\,\mathrm{mm}\,.$$

Feszültségek: $\bar{\sigma}_B\left(\lambda_B\right) = 0, \quad \bar{\sigma}_R\left(\lambda = 1\right) = \mathrm{p}_K = 13,44\,\mathrm{MPa}\,,$

$$\bar{\sigma}_\varphi\left(\lambda_B\right) = 121\,\mathrm{MPa}\,, \quad \bar{\sigma}_\varphi\left(\lambda = 1\right) = 35,1\,\mathrm{MPa}\,.$$

b) A tárcsa és a tengely között összeszerelés után fellépő p nyomás meghatározása, ha $\omega = 0$:

Feszültségeloszlás nyugalmi helyzetben: $\left.\begin{array}{l}\bar{\sigma}_R = a - b\,\psi,\\ \bar{\sigma}_\varphi = a + b\,\psi.\end{array}\right\}$

Peremfeltételek: $\left.\begin{aligned}\bar{\sigma}_R(\psi_K) &= 0 = a - b\,\psi_K,\\ \bar{\sigma}_R(\psi = 1) &= p = a - b.\end{aligned}\right\}\qquad \psi_K = \lambda_B = 15{,}63 \cdot 10^{-3}.$

$$\delta = \mathrm{R}_B \varepsilon_\varphi(\psi = 1) = \frac{\mathrm{R}_B}{E}\left[\bar{\sigma}_\varphi - \nu \bar{\sigma}_R\right]_{\psi=1} = \frac{\mathrm{R}_B}{E}\, p\left(\frac{1+\psi_K}{1-\psi_K} + \nu\right).$$

Ebből: $p = \dfrac{\delta E}{\mathrm{R}_B\left(\dfrac{1+\psi_K}{1-\psi_K} + \nu\right)} = \dfrac{2 \cdot 10^{11} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-6}}{0{,}0015\left(\dfrac{1{,}0156}{0{,}984} + 0{,}3\right)} = 87{,}44 \cdot 10^{6}\,\mathrm{Pa} \approx 87{,}44\ \mathrm{MPa}.$

c) Tönkremenetel (törés) szempontjából veszélyesebb állapot meghatározása:

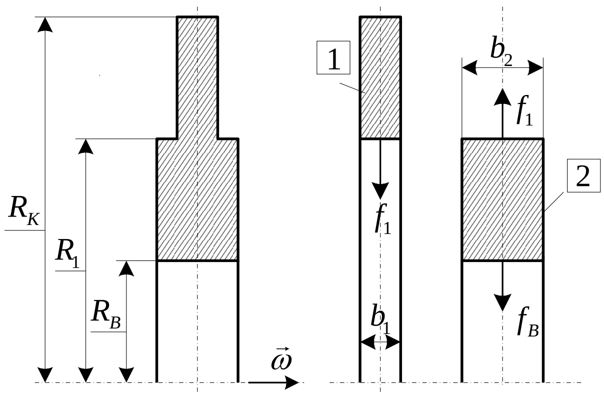
Ez a kérdés a $\sigma_{red\,\max}$ alapján dönthető el:

Gyors forgás: $\bar{\sigma}_{red\,\max f} = \bar{\sigma}_\varphi(\lambda_B) = 121\,\mathrm{MPa}.$

Nyugalmi állapot: $\bar{\sigma}_{red\,\max á} = 2\dfrac{p}{1-\psi_K} = 2\dfrac{87{,}44}{1-0{,}0156} = 177{,}72\,\mathrm{MPa}.$

A nyugalmi állapot a veszélyesebb.

6.10.4.9. feladat: Szakaszonként állandó vastagságú gyorsan forgó furatos körtárcsa



Adott:

A szakaszonként állandó vastagságú, gyorsan forgó tárcsát belső palástján állandó f_B sűrűségű, vonal mentén megoszló erőrendszer terheli

$\lambda_B = 0{,}25$, $\lambda_1 = 0{,}5$, $b_2 = 2b_1$,

$\mu_3 = 0{,}6$, $N_{\omega 0} = b_1 \bar{\sigma}_{\omega 0}$, f_B.

Feladat:

a) Az $N_R(\lambda)$, $N_\varphi(\lambda)$ felületi feszültségi diagramok jelleghelyes megrajzolása.

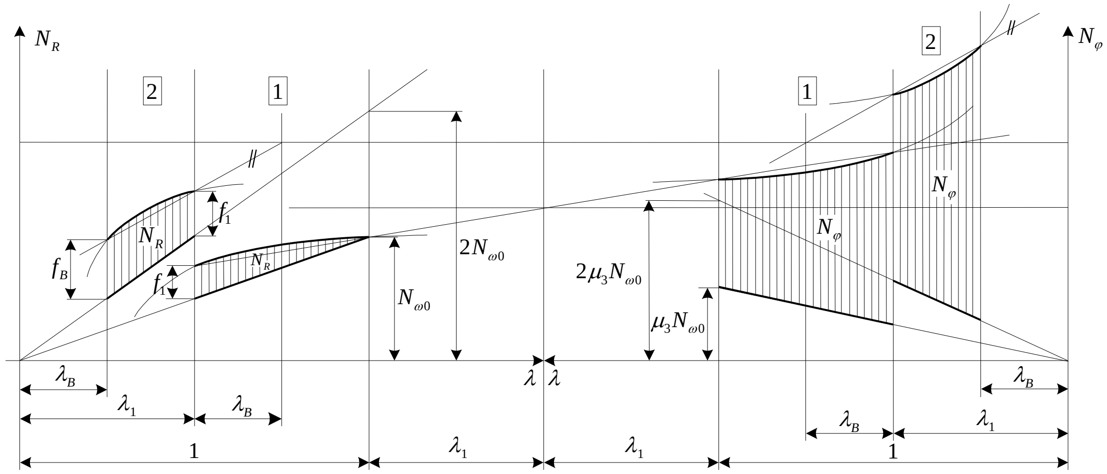
b) Az $N_R(\lambda)$ és $N_\varphi(\lambda)$ függvényekben szereplő állandók értékének meghatározása peremfeltételekből.

c) Az f_1 sűrűség értékének kiszámítása illesztési feltételekből.

Kidolgozás:

a) Az $N_R(\lambda)$, $N_\varphi(\lambda)$ felületi feszültségi diagramok jelleghelyes megrajzolása:

A tárcsát az R_1 sugárnál két körgyűrű tárcsára, az 1 és 2 jelű tárcsára bontjuk. Az 1 és 2 jelű tárcsa egymásra gyakorolt hatását az f_1 vonalmentés megoszló (belső) erőrendszerrel vesszük figyelembe.



b) Az $N_R(\lambda)$ és $N_\varphi(\lambda)$ függvényekben szereplő állandók értékének meghatározása peremfeltételekből:

Felületi feszültségek:

$$\boxed{1.}\ \text{tárcsa:}\quad \left.\begin{aligned} N_{R1} &= A_1 - \frac{B_1}{\lambda} - N_{\omega 0}\lambda \\ N_{\varphi 1} &= A_1 + \frac{B_1}{\lambda} - \mu_3 N_{\omega 0}\lambda \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{2.}\ \text{tárcsa:}\quad \left.\begin{aligned} N_{R2} &= A_2 - \frac{B_2}{\lambda} - 2N_{\omega 0}\lambda \\ N_{\varphi 2} &= A_2 + \frac{B_2}{\lambda} - 2\mu_3 N_{\omega 0}\lambda \end{aligned}\right\}$$

Peremfeltételek:

$$\left.\begin{aligned} N_{R1}(\lambda = 1) &= 0 \\ N_{R1}(\lambda = \lambda_1) &= f_1 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} N_{R2}(\lambda = \lambda_1) &= f_1 \\ N_{R2}(\lambda = \lambda_B) &= f_B \end{aligned}\right\}$$

Az állandók meghatározása a peremfeltételekből:

1. jelű tárcsa peremfeltételei:
$$\left.\begin{aligned} 0 &= A_1 - B_1 - N_{\omega 0} \\ f_1 &= A_1 - 2B_1 - 0{,}5N_{\omega 0} \end{aligned}\right\}$$

Az 1. egyenletből: $A_1 = B_1 + N_{\omega 0}$, $\quad A_1 = \frac{3}{2}N_{\omega 0} - f_1$.

A 2. egyenletből: $f_1 = B_1 - 2B_1 + 0{,}5N_{\omega 0}$, $B_1 = \frac{N_{\omega 0}}{2} - f_1$.

2. jelű tárcsa peremfeltételei:
$$f_B = A_2 - 4B_2 - \frac{1}{4}2N_{\omega 0}$$
$$f_1 = A_2 - 2B_2 - \frac{1}{2}2N_{\omega 0} \quad /\cdot 2 \quad \Rightarrow \quad B_2 = \frac{1}{2}\left(A_2 - f_1 - N_{\omega 0}\right).$$

$$f_B - 2f_1 = -A_2 \quad \Rightarrow \quad A_2 = 2f_1 - f_B \qquad\qquad B_2 = 0{,}5\left(f_1 - f_B - N_{\omega 0}\right)$$

c) Az f_1 sűrűség értékének kiszámítása illesztési feltételekből:

Illesztési feltétel: $\left.u_1\right|_{\lambda 1} = \left.u_2\right|_{\lambda 1} \quad \Rightarrow \quad R_1 \left.\varepsilon_{\varphi 1}\right|_{\lambda 1} = R_1 \left.\varepsilon_{\varphi 2}\right|_{\lambda 1}$

Hooke törvény: $2G\left(\overline{\sigma}_{\varphi 1}-\nu\dfrac{\overline{\sigma}_{\varphi 1}+f_1}{1+\nu}\right)\Bigg|_{\lambda 1}=2G\left(\overline{\sigma}_{\varphi 2}-\nu\dfrac{\overline{\sigma}_{\varphi 2}+f_1}{1+\nu}\right)\Bigg|_{\lambda 1}$

$u_1\big|_{\lambda 1}=u_2\big|_{\lambda 1} \quad\Rightarrow\quad \sigma_{\varphi 1}\big|_{\lambda 1}=\sigma_{\varphi 2}\big|_{\lambda 1}$ - ez a feszültségekre vonatkozó illesztési feltétel.

$$N_{\varphi 1}\big|_{\lambda 1}=\left[N_{\omega 0}-\frac{f_1}{1-\lambda_1}\right](1+\lambda_1)+N_{\omega 0}(1-\mu_3\lambda_1)=2{,}2N_{\omega 0}-3f_1 .$$

$$N_{\varphi 2}\big|_{\lambda 1}=\left[2N_{\omega 0}+\frac{f_1-f_B}{\lambda_1-\lambda_B}\right]2\lambda_B+2N_{\omega 0}\lambda_1+f_1-2N_{\omega 0}\mu_3\lambda_1=$$

$$=2N_{\omega 0}+(2\lambda_B+\lambda_1-\mu_3\lambda_1)+\frac{f_1}{\lambda_1-\lambda_B}(2\lambda_B+1)-f_B\frac{2\lambda_B}{\lambda_1-\lambda_B} .$$

$$N_{\varphi 2}\big|_{\lambda 1}=1{,}4N_{\omega 0}+3f_1-2f_B$$

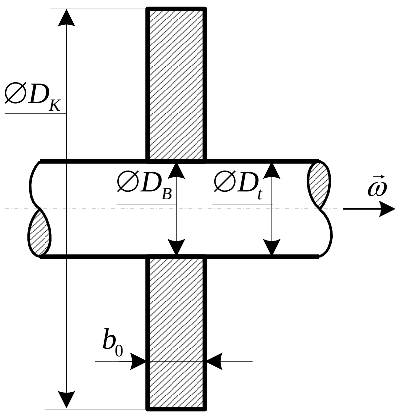
Illesztési feltétel a feszültségekre: $\dfrac{N_{\varphi 1}}{b_1}\Bigg|_{\lambda 1}=\dfrac{N_{\varphi 2}}{2b_1}\Bigg|_{\lambda 1} \quad\Rightarrow\quad 2N_{\varphi 1}\big|_{\lambda 1}=N_{\varphi 2}\big|_{\lambda 1}$

Behelyettesítve: $4{,}4N_{\omega 0}-6f_1=1{,}4N_{\omega 0}+3f_1-2f_B$

$$3N_{\omega 0}+2f_B=9f_1$$

$$f_1=\frac{1}{3}N_{\omega 0}+\frac{2}{9}f_B$$

6.10.4.10. feladat: Merev tengelyre túlfedéssel illesztett gyorsan forgó furatos körgyűrű tárcsa



Adott:

Állandó b_0 vastagságú tárcsát felmelegítve a D_t átmérőjű tengelyre húzunk. A lehűtés után a tárcsa $\delta=(D_t-D_B)/2$ túlfedéssel illeszkedik a tengelyre. Ekkor a szerkezetet forgatni kezdjük.

$b_0=8$ mm, $D_K=400$ mm, $D_B=200$ mm, $\delta=0{,}021$ mm.

Feltételezzük, hogy a tárcsa anyaga lineárisan rugalmas: $E=2\cdot 10^5$ MPa, $\nu=1/3$, $\rho=8\cdot 10^3$ kg/m^3, a tengely pedig tökéletesen merev.

$\lambda_B=\dfrac{R_B^2}{R_K^2}=\dfrac{1}{4}$.

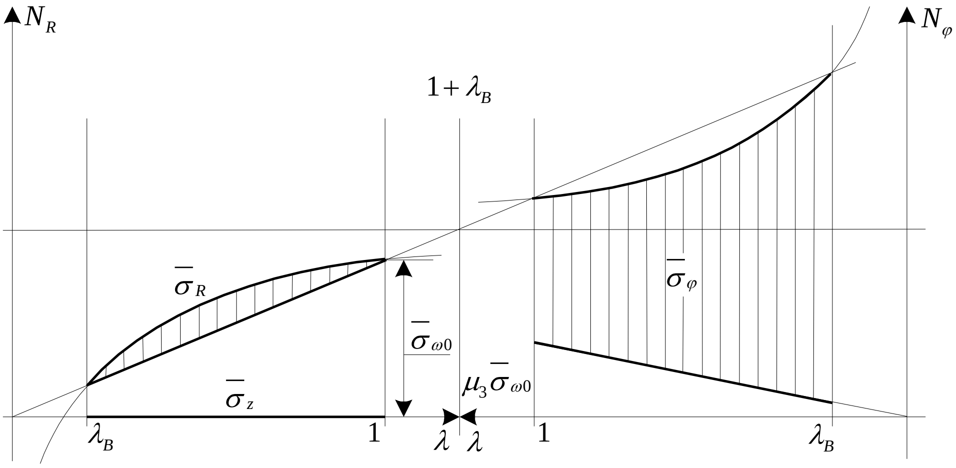
Kérdés: Mekkora fordulatszámnál lazul meg a tárcsa a tengelyen?

Kidolgozás:

Lazulás feltétele: $\Delta D_B=2\delta$.

$$\text{Feszültségeloszlás:} \quad \left.\begin{aligned} \bar{\sigma}_R &= a - \frac{b}{\lambda} - \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda \\ \bar{\sigma}_\varphi &= a + \frac{b}{\lambda} - \mu_3 \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda \\ \bar{\sigma}_z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Feszültségi diagram:



$$\bar{\sigma}_\varphi(\lambda_B) = \bar{\sigma}_{\omega 0}(2+\lambda_B) - \bar{\sigma}_{\omega 0}\mu_3\lambda_B = \bar{\sigma}_{\omega 0}\left[2+\lambda_B(1-\mu_3)\right].$$

$$\bar{\varepsilon}_\varphi(\lambda_B) = \frac{1}{E}\bar{\sigma}_\varphi(\lambda_B); \quad \Delta D_B = 2n(\lambda_B) = 2R_B\bar{\varepsilon}_\varphi(\lambda_B) = \frac{D_B}{E}\bar{\varepsilon}_\varphi(\lambda_B).$$

Lazulási feltétel: $\quad D_B\varepsilon_\varphi(\lambda_B) = 2\delta$.

$$\bar{\sigma}_{\omega 0} = \frac{2\delta E}{D_B\left[2+\lambda_B(1-\mu_3)\right]} = \frac{4,2\cdot 10^{-2}\cdot 2\cdot 10^5}{100[2+0,1]} = 40\ \text{N/mm}^2 = 40\cdot 10^6\ \text{N/m}^2.$$

$$\bar{\sigma}_{\omega 0} = (3+\nu)\frac{\rho}{8}\left(R_K\omega^2\right) = 4\cdot 10^7.$$

$$\left(R_K\omega\right)^2 = 0,3\cdot 4\cdot 10^4.$$

$$R_K\omega = 100\sqrt{1,2} = 109,54.$$

$$\omega = \frac{109,54}{0,4} = 273,86\frac{1}{s}.$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{60}n, \qquad n = \frac{30\omega}{\pi} = \frac{30\cdot 273,86}{3,14} = 2615,26\ \frac{1}{\min}.$$