Segédlet a

Szerkezetek dinamikája

című tantárgyhoz

Készítette: Dr. Pere Balázs

1. Impulzus

Egy tömegpont $\vec{I}$ impulzusát a tömegpont m tömegének és $\vec{v}$ sebességének szorzata adja.

$$\vec{I} = m\vec{v}$$

Ha a folytonos tömegeloszlású testeket úgy képzeljük el, mint szorosan egymás mellett elhelyezkedő tömegpontok vagy elemi tömegek összességét, akkor a test impulzusát az őt alkotó elemi tömegek impulzusának összege adja meg.

$$\vec{I} = \int\limits_{(m)} \vec{v}_P dm \tag{1}$$

ahol $\vec{v}_P$ egy tetszőleges P pontban lévő dm elemi tömeg sebessége.

Tegyük fel hogy az általunk vizsgált test merev test, vagyis a test egy tetszőleges P pontjának $\vec{v}_P$ sebességét meg tudjuk határozni egy szintén tetszőlegesen választott A pont $\vec{v}_A$ sebességéből és a merev test $\vec{\omega}$ szögsebességéből a

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP} \tag{2}$$

összefüggéssel. Helyettesítsük be a test impulzusának (1) képletébe a (2) összefüggést, és emeljük ki a konstansokat az integrálás elé.

$$\vec{I} = \int\limits_{(m)} \vec{v}_P dm = \int\limits_{(m)} (\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP})\, dm = \vec{v}_A \underbrace{\int\limits_{(m)} dm}_{m} + \vec{\omega} \times \underbrace{\int\limits_{(m)} \vec{r}_{AP} dm}_{\vec{S}_A} =$$

$$= m\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{S}_A$$

vagyis tetszőleges A pontot választva az impulzusra az

$$\vec{I} = m\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{S}_A$$

képletet kapjuk. Az $\vec{S}_A$ mennyiséget a test A pontra számított statikai nyomatékának nevezzük. Könnyen belátható, hogy az $\vec{S}_A$ statikai nyomaték megkapható a test m tömegének és az A pontból a test T tömegközéppontjába mutató $\vec{r}_{AT}$ vektornak a szorzataként is.

$$\vec{S}_A = \int\limits_{(m)} \vec{r}_{AP} dm = \int\limits_{(m)} (\vec{r}_{AT} + \vec{r}_{TP})\, dm = \vec{r}_{AT} \underbrace{\int\limits_{(m)} dm}_{m} + \underbrace{\int\limits_{(m)} \vec{r}_{TP} dm}_{\vec{S}_T} =$$

$$= m\,\vec{r}_{AT} + \underbrace{\vec{S}_T}_{\vec{0}} = m\,\vec{r}_{AT}$$

Tetszőleges A pontot választva az impulzus az

$$\vec{I} = m\vec{v}_A + m\,\vec{\omega} \times \vec{r}_{AT} \tag{3}$$

összefüggéssel is írható. Ha az A pont egybeesik a T tömegközépponttal, azaz $A = T$, akkor $\vec{r}_{AT} = \vec{0}$, és

$$\vec{I} = m\vec{v}_T$$

2. Impulzus-tétel

Egy tömegpont impulzusának idő szerinti $\dot{\vec{I}}$ deriváltja egyenlő a tömegpontra ható erők $\vec{F}$ eredőjével.

$$\dot{\vec{I}} = \vec{F} \tag{4}$$

Ez a tömegpontra vonatkozó impulzus-tétel. Ha ugyan ezt merev testekre szeretnénk alkalmazni, akkor a (4) impulzus-tételbe a merev test (3) impulzusát kell behelyettesíteni. Először számítsuk ki a merev test impulzusának idő szerinti deriváltját.

$$\dot{\vec{I}} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}_A + m\,\vec{\omega}\times\vec{r}_{AT}\right) = m\vec{a}_A + m\,\vec{\varepsilon}\times\vec{r}_{AT} + m\,\vec{\omega}\times\underbrace{(\vec{\omega}\times\vec{r}_{AT})}_{\vec{v}_{AT}}$$

ahol

$$\vec{r}_{AT} = \vec{r}_T - \vec{r}_A$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{\vec{r}}_{AT} = \dot{\vec{r}}_T - \dot{\vec{r}}_A = \vec{v}_T - \vec{v}_A = \vec{v}_{AT}$$

és $\dot{\vec{\omega}} = \vec{\varepsilon}$ a merev test szöggyorsulása. Ha a (4) összefüggésbe a P pont megegyezik a T tömegközépponttal, akkor

$$\vec{v}_T = \vec{v}_A + \vec{\omega}\times\vec{r}_{AT}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{v}_{AT} = \vec{v}_T - \vec{v}_A = \vec{\omega}\times\vec{r}_{AT}$$

Feltételeztük, hogy a test tömege nem változik, azaz $\dot{m} = 0$. Így a merev test impulzus-tételére az

$$m\vec{a}_A + m\,\vec{\varepsilon}\times\vec{r}_{AT} + m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{AT}) = \vec{F}$$

összefüggést kapjuk. Ha az A pont egybeesik a T tömegközépponttal, vagyis $A = T$, akkor $\vec{r}_{AT} = \vec{0}$, amiből következik, hogy

$$\dot{\vec{I}} = m\vec{a}_T$$

az impulzus-tétel pedig

$$m\vec{a}_T = \vec{F}$$

3. Perdület

Egy P pontban elhelyezkedő tömegpontnak egy tetszőleges A pontra számított perdülete megegyezik a tömegpont impulzusának az A pontra számított nyomatékával, vagyis

$$\vec{\Pi}_A = \vec{r}_{AP}\times\vec{v}_P m$$

Ebből kiindulva egy folytonos tömegeloszlású test A pontra számított perdülete a testet alkotó elemi tömegek A pontra számított perdületének összege.

$$\vec{\Pi}_A = \int\limits_{(m)} \vec{r}_{AP}\times\vec{v}_P dm \tag{5}$$

Helyettesítsük be a test perdületének (5) képletébe a (2) összefüggést, és emeljük ki a konstansokat az integrálás elé.

$$\vec{\Pi}_A = \int\limits_{(m)} \vec{r}_{AP}\times\vec{v}_P dm = \int\limits_{(m)} \vec{r}_{AP}\times\left(\vec{v}_A + \vec{\omega}\times\vec{r}_{AP}\right) dm =$$

$$= \underbrace{\left(\int\limits_{(m)} \vec{r}_{AP} dm\right)}_{\vec{S}_A = m\,\vec{r}_{AT}} \times\vec{v}_A + \int\limits_{(m)} \vec{r}_{AP}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_{AP}\right) dm =$$

$$= m\,\vec{r}_{AT}\times\vec{v}_A + \int\limits_{(m)} \Big(\left(r_{AP}\right)^2\vec{\omega} - \vec{r}_{AP}\left(\vec{r}_{AP}\cdot\vec{\omega}\right)\Big) dm =$$

$$= m\,\vec{r}_{AT} \times \vec{v}_A + \int\limits_{(m)} \left((r_{AP})^2\, \underline{\underline{I}} \cdot \vec{\omega} - (\vec{r}_{AP} \circ \vec{r}_{AP}) \cdot \vec{\omega} \right) dm =$$

$$= m\,\vec{r}_{AT} \times \vec{v}_A + \underbrace{\int\limits_{(m)} \left((r_{AP})^2\, \underline{\underline{I}} - (\vec{r}_{AP} \circ \vec{r}_{AP}) \right) dm}_{\underline{\underline{J}}_A} \cdot \vec{\omega} =$$

$$= m\,\vec{r}_{AT} \times \vec{v}_A + \underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{\omega}$$

vagyis

$$\vec{\Pi}_A = m\,\vec{r}_{AT} \times \vec{v}_A + \underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{\omega} \tag{6}$$

A $\underline{\underline{J}}_A$ mennyiséget a test A pontra számított tehetetlenségi tenzorának nevezzük. A számítás során felhasználtuk az

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \left(\vec{a} \cdot \vec{b} \right)$$

és

$$\vec{a} \left(\vec{b} \cdot \vec{c} \right) = \left(\vec{a} \circ \vec{b} \right) \cdot \vec{c}$$

azonosságokat. Ha az A pont egybeesik a T tömegközépponttal, azaz $A = T$, akkor $\vec{r}_{AT} = \vec{0}$ és

$$\vec{\Pi}_T = \underline{\underline{J}}_T \cdot \vec{\omega}$$

4. Perdület-tétel

Egy tömegpont A pontra számított perdületének idő szerinti deriváltja egyenlő a tömegpontra ható erők A pontra számított nyomatékával.

$$\dot{\vec{\Pi}}_A = \vec{M}_A \tag{7}$$

Ez a tömegpontra vonatkozó perdület-tétel. Ha ezt merev testekre szeretnénk vonatkoztatni, akkor a (7) perdület-tételbe a merev test A pontra számított (6) perdületét kell behelyettesíteni. Először számítsuk ki a merev test A pontra számított perdületének idő szerinti deriváltját.

$$\dot{\vec{\Pi}}_A = \frac{d}{dt} \left(\int\limits_{(m)} \vec{r}_{AP} \times \vec{v}_P dm \right) = \int\limits_{(m)} \vec{v}_{AP} \times \vec{v}_P dm + \int\limits_{(m)} \vec{r}_{AP} \times \vec{a}_P dm =$$

$$= \int\limits_{(m)} (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AP}) \times (\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP})\, dm + \int\limits_{(m)} \vec{r}_{AP} \times (\vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{AP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AP}))\, dm =$$

$$= \int\limits_{(m)} (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AP}) \times \vec{v}_A dm + \int\limits_{(m)} (\vec{r}_{AP} \times \vec{a}_A + \vec{r}_{AP} \times (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{AP}) + \vec{r}_{AP} \times (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AP})))\, dm =$$

$$= \left(\vec{\omega} \times \int\limits_{(m)} \vec{r}_{AP} dm \right) \times \vec{v}_A + \left(\int\limits_{(m)} \vec{r}_{AP} dm \right) \times \vec{a}_A + \int\limits_{(m)} \vec{r}_{AP} \times (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{AP})\, dm + \int\limits_{(m)} \vec{r}_{AP} \times (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AP}))\, dm =$$

$$= \left(\vec{\omega} \times \vec{S}_A \right) \times \vec{v}_A + \vec{S}_A \times \vec{a}_A + \underbrace{\left(\int\limits_{(m)} \left((r_{AP})^2\, \underline{\underline{I}} - \vec{r}_{AP} \circ \vec{r}_{AP} \right) dm \right)}_{\underline{\underline{J}}_A} \cdot \vec{\varepsilon} + \int\limits_{(m)} \vec{r}_{AP} \times \left((\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{AP})\, \vec{\omega} - \omega^2 \vec{r}_{AP} \right) dm =$$

$$= \left(\vec{\omega} \times \vec{S}_A \right) \times \vec{v}_A + \vec{S}_A \times \vec{a}_A + \underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{\varepsilon} + \int\limits_{(m)} \vec{r}_{AP} \times \left((\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{AP})\, \vec{\omega} - \omega^2 \vec{r}_{AP} \right) dm =$$

$$= \left(\vec{\omega} \times \vec{S}_A\right) \times \vec{v}_A + \vec{S}_A \times \vec{a}_A + \underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{\varepsilon} + \int\limits_{(m)} \left(\left(\vec{r}_{AP} \times \vec{\omega}\right) \circ \left(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{AP}\right) - \omega^2 \left(\vec{r}_{AP} \times \vec{r}_{AP}\right)\right) dm =$$

$$= \left(\vec{\omega} \times \vec{S}_A\right) \times \vec{v}_A + \vec{S}_A \times \vec{a}_A + \underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{\varepsilon} + \int\limits_{(m)} \left(\left(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{AP}\right) \circ \left(\vec{r}_{AP} \times \vec{\omega}\right)\right) dm =$$

$$= \left(\vec{\omega} \times \vec{S}_A\right) \times \vec{v}_A + \vec{S}_A \times \vec{a}_A + \underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{\varepsilon} + \int\limits_{(m)} \left(\vec{\omega} \cdot \left(\vec{r}_{AP} \circ \vec{r}_{AP}\right) \times \vec{\omega}\right) dm =$$

$$= \left(\vec{\omega} \times \vec{S}_A\right) \times \vec{v}_A + \vec{S}_A \times \vec{a}_A + \underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{\varepsilon} + \int\limits_{(m)} \left(\vec{\omega} \cdot \left(\vec{r}_{AP} \circ \vec{r}_{AP}\right) \times \vec{\omega}\right) dm - \underbrace{\int\limits_{(m)} \left(r_{AP}\right)^2 \vec{\omega} \cdot \underline{\underline{I}} \times \vec{\omega} dm}_{\vec{0}} =$$

$$= \left(\vec{\omega} \times \vec{S}_A\right) \times \vec{v}_A + \vec{S}_A \times \vec{a}_A + \underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{\varepsilon} - \vec{\omega} \cdot \underbrace{\left(\int\limits_{(m)} \left(\left(r_{AP}\right)^2 \underline{\underline{I}} - \left(\vec{r}_{AP} \circ \vec{r}_{AP}\right)\right) dm\right)}_{\underline{\underline{J}}_A} \times \vec{\omega} =$$

$$= \left(\vec{\omega} \times \vec{S}_A\right) \times \vec{v}_A + \vec{S}_A \times \vec{a}_A + \underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times \underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{\omega} =$$

$$= m \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{AT}\right) \times \vec{v}_A + m \vec{r}_{AT} \times \vec{a}_A + \underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times \underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{\omega}$$

Így a merev test A pontra felírt perdület-tételére az

$$m \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{AT}\right) \times \vec{v}_A + m \vec{r}_{AT} \times \vec{a}_A + \underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times \underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{\omega} = \vec{M}_A$$

összefüggés adódik. Ha az A pont egybeesik a T tömegközépponttal, azaz $A = T$, akkor $\vec{r}_{AT} = \vec{0}$ és

$$\dot{\vec{\Pi}}_T = \underline{\underline{J}}_T \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times \underline{\underline{J}}_T \cdot \vec{\omega}$$

5. Kinetikai (mozgási) energia

Egy m tömegű és $\vec{v}_P$ sebességű tömegpont kinetikai energiáját az

$$E = \frac{1}{2} m v_P^2$$

összefüggéssel kapjuk meg. Ebből kiindulva egy folytonos tömegeloszlású test kinetikai energiáját a testet alkotó elemi tömegek kinetikai energiájának összege adja.

$$E = \frac{1}{2} \int\limits_{(m)} v_P^2 dm \tag{8}$$

Helyettesítsük be a test kinetikai energiájának (8) képletébe a (2) összefüggést, és emeljük ki a konstansokat az integrálás elé.

$$E = \frac{1}{2} \int\limits_{(m)} v_P^2 dm = \frac{1}{2} \int\limits_{(m)} \vec{v}_P \cdot \vec{v}_P \, dm = \frac{1}{2} \int\limits_{(m)} \left(\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP}\right) \cdot \left(\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP}\right) dm =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{(m)} \left(\vec{v}_A \cdot \vec{v}_A + \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{AP}\right) \cdot \vec{v}_A + \vec{v}_A \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{AP}\right) + \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{AP}\right) \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{AP}\right)\right) dm =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{(m)} \left(v_A^2 + 2 \left(\vec{r}_{AP} \times \vec{v}_A\right) \cdot \vec{\omega} + \left(\vec{r}_{AP} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{AP}\right)\right) \cdot \vec{\omega}\right) dm =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{(m)} v_A^2 dm + \int_{(m)} (\vec{r}_{AP} \times \vec{v}_A) \cdot \vec{\omega} dm + \frac{1}{2} \int_{(m)} (\vec{r}_{AP} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AP})) \cdot \vec{\omega} dm =$$

$$= \frac{1}{2} v_A^2 \underbrace{\int_{(m)} dm}_{m} + \Bigg(\underbrace{\int_{(m)} \vec{r}_{AP} dm}_{\vec{S}_A} \times \vec{v}_A \Bigg) \cdot \vec{\omega} + \frac{1}{2} \int_{(m)} ((\vec{r}_{AP} \cdot \vec{r}_{AP}) \vec{\omega} - (\vec{r}_{AP} \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_{AP}) \cdot \vec{\omega} dm =$$

$$= \frac{1}{2} m v_A^2 + \left(\vec{S}_A \times \vec{v}_A \right) \cdot \vec{\omega} + \frac{1}{2} \int_{(m)} \left(r_{AP}^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{AP}) \vec{r}_{AP} \right) \cdot \vec{\omega} dm =$$

$$= \frac{1}{2} m v_A^2 + \left(\vec{S}_A \times \vec{v}_A \right) \cdot \vec{\omega} + \frac{1}{2} \int_{(m)} \left(\vec{\omega} \cdot \underline{\underline{I}} r_{AP}^2 - \vec{\omega} \cdot \vec{r}_{AP} \circ \vec{r}_{AP} \right) \cdot \vec{\omega} dm =$$

$$= \frac{1}{2} m v_A^2 + \left(\vec{S}_A \times \vec{v}_A \right) \cdot \vec{\omega} + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \underbrace{\int_{(m)} \left(r_{AP}^2 \underline{\underline{I}} - \vec{r}_{AP} \circ \vec{r}_{AP} \right) dm}_{\underline{\underline{J}}_A} \cdot \vec{\omega} =$$

$$= \frac{1}{2} m v_A^2 + \left(\vec{S}_A \times \vec{v}_A \right) \cdot \vec{\omega} + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{\omega}$$

vagyis

$$E = \frac{1}{2} m v_A^2 + \left(\vec{S}_A \times \vec{v}_A \right) \cdot \vec{\omega} + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{\omega}$$

Ha az A pont egybeesik a T tömegközépponttal, azaz $A = T$, akkor

$$E = \frac{1}{2} m v_T^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \underline{\underline{J}}_T \cdot \vec{\omega}$$

Ha az A pont sebessége nulla, vagyis $\vec{v}_A = \vec{0}$, akkor

$$E = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{\omega}$$

Ha a merev test $\vec{\omega}$ szögsebessége nulla, vagyis $\vec{\omega} = \vec{0}$, akkor

$$E = \frac{1}{2} m v_A^2$$

6. Teljesítmény

Egy szerkezetre ható erők és nyomatékok teljesítményét a

$$P = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \sum_{j=1}^{m} \vec{M}_j \cdot \vec{\omega}_j$$

képlettel számolhatjuk ki, ahol $\vec{v}_i$ az i-edik erő támadáspontja, az $\vec{\omega}_j$ pedig annak a tagnak a szögsebessége, amelyre a j-edik nyomaték hat.

Amennyiben az erők és nyomatékok egy merev testre hatnak, és szeretnénk kiszámítani a teljesítményüket, akkor érdemes alkalmazni a (2) összefüggést, amelyben a P helyére i-t írunk.

$$P = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \sum_{j=1}^{m} \vec{M}_j \cdot \vec{\omega} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot (\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{Ai}) + \sum_{j=1}^{m} \vec{M}_j \cdot \vec{\omega} =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i}_{\vec{F}} \cdot \vec{v}_A + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{Ai}) + \sum_{j=1}^{m} \vec{M}_j \cdot \vec{\omega} =$$

$$= \vec{F} \cdot \vec{v}_A + \sum_{i=1}^{n} \vec{\omega} \cdot \left(\vec{r}_{Ai} \times \vec{F}_i\right) + \sum_{j=1}^{m} \vec{M}_j \cdot \vec{\omega} =$$

$$= \vec{F} \cdot \vec{v}_A + \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_{Ai} \times \vec{F}_i\right) \cdot \vec{\omega} + \sum_{j=1}^{m} \vec{M}_j \cdot \vec{\omega} =$$

$$= \vec{F} \cdot \vec{v}_A + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_{Ai} \times \vec{F}_i\right) + \sum_{j=1}^{m} \vec{M}_j\right)}_{\vec{M}_A} \cdot \vec{\omega} =$$

$$= \vec{F} \cdot \vec{v}_A + \vec{M}_A \cdot \vec{\omega}$$

Kihasználtuk, hogy a merev test ellentétben egy szerkezettel csak egy szögsebességgel rendelkezik. Vagyis a testre ható erőrendszer tetszőleges A pontba redukált vektorkettősének erőjét kell skalárisan szorozni az A pont sebességével és az A pontra számított nyomatékot kell skalárisan szorozni a test szögsebességével.

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}_A + \vec{M}_A \cdot \vec{\omega}$$

Ha az A pont egybeesik a T tömegközépponttal, azaz $A = T$, akkor

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}_T + \vec{M}_T \cdot \vec{\omega}$$