ANHANG: MATHEMATIK

Der Anhang Mathematik fasst die mathematischen Grundlagen zusammen, die in der Lehrveranstaltung Finite-Elemente-Analyse angewendet werden. Diese Zusammenfassung enthält nur die wichtigsten Definitionen und Zusammenhänge. Es ist nur eine Aufzählung der Themen, die als Vorstudium-Kenntnisse voraussetzt werden.

A.1. Matrizenalgebra

<u>Die Matrix:</u> Eine Menge von skalaren Größen, Zahlen, die nach einer gegebenen Regel in einer Tabelle geordnet sind.

Die Matrizen werden mit doppelt unterstrichenen Buchstaben in rechteckigen Klammern bezeichnet, z.B.: $\left[\underline{\underline{A}}\right], \left[\underline{\underline{a}}\right]$, usw. Die Elemente (die Koordinaten) der Matrix werden mit unten indizierten Buchstaben bezeichnet z.B.: a_{13}, a_2, usw.

Das Matrixelement a_{13} steht in der ersten Zeile und in der dritten Spalte der Matrix.

Das Aussprechen der Bezeichnung des Matrixelementes a_{13} erfolgt in der Form: a eins drei.

$$\underset{(m\times n)}{\underline{\underline{A}}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Die Dimension der Matrix: Die obige Matrix $\left[\underline{\underline{A}}\right]$ vom Format $m\times n$ (m mal n) hat m Zeilen und n Spalten.

<u>Addition und Subtraktion von Matrizen:</u>

Die Addition und Subtraktion kann man nur mit Matrizen gleicher Dimensionen durchführen. ZB.:

$$\underline{\underline{A}} \pm \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}.$$

$$\underset{(2\times 2)}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} \pm \underset{(2\times 2)}{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}} = \underset{(2\times 2)}{\begin{bmatrix} (a_{11} \pm b_{11}) & (a_{12} \pm b_{12}) \\ (a_{21} \pm b_{21}) & (a_{22} \pm b_{22}) \end{bmatrix}}.$$

<u>Multiplikation von Matrizen (Kombination von Zeilen und Spalten):</u>

Die Matrizenmultiplikation kann man nur dann durchführen, wenn die Anzahl der Spalten der ersten Matrix mit der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix übereinstimmt.

Wenn man die Elemente / Koordinaten der Matrix $\underline{\underline{A}}$ mit $\left[a_{ij}\right]$ und die Elemente der Matrix $\underline{\underline{B}}$ mit $\left[b_{ij}\right]$ bezeichnet, dann man kann das Ergebnis der Matrizenmultiplikation $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}$ mit der Bezeichnung $\left[c_{ij}\right]$ folgendermaßen erhalten:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

Beispiel: Multiplikation von (2x2): Matrizen $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}$.

$$\underset{(2\times 2)}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} \underset{(2\times 2)}{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}} = \underset{(2\times 2)}{\begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) & (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) & (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \end{bmatrix}}.$$

Beispiel: Multiplikation einer (2x2) Matrix und einer Spaltenmatrix: $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{c}}$.

$$\underset{(2\times 2)}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} \underset{(2\times 1)}{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}} = \underset{(2\times 1)}{\begin{bmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 \end{bmatrix}}.$$

Beispiel: Multiplikation einer Zeilenmatrix und einer (2x2):Matrix $\underline{\underline{a}}^T\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{c}}^T$.

$$\underset{(1\times 2)}{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}} \underset{(2\times 2)}{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}} = \underset{(1\times 2)}{\begin{bmatrix} (a_1 b_{11} + a_2 b_{21}) & (a_1 b_{12} + a_2 b_{22}) \end{bmatrix}}.$$

Die Matrixmultiplikation ist eine nicht kommutative (nicht vertauschbare) Operation: $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$.

Spaltenmatrix, Zeilenmatrix:

$$\text{Spaltenmatrix: } \left[\underline{\underline{a}}\right] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \qquad \text{Zeilenmatrix: } \left[\underline{\underline{a}}^T\right] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}.$$

Die Spaltenmatrix hat immer nur eine Spalte und die Zeilenmatrix hat immer nur eine Zeile.
Die Zeilenmatrix ist die Transponierte derselben Spaltenmatrix. Die Zeilenmatrix wird immer mit einem Buchstaben T als oberen Index gekennzeichnet. Die Aussage der Bezeichnung $\underline{\underline{a}}^T$ ist a transponiert.

Transponierte Matrix – Transponieren:

Transponieren: Austausch der Zeilen und Spalten, oder Spiegelung auf die Hauptdiagonale.
Die Elemente mit gleichen Indizes bilden die Hauptdiagonale der Matrix.

$$\left[\underline{\underline{A}}\right] = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{(2\times 2)} \quad \Rightarrow \quad \left[\underline{\underline{A}}^T\right] = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}}_{(2\times 2)}.$$

Die Kennzeichnung der transponierten Matrix erfolgt mit dem Buchstaben T als oberen Index der Matrix.

Symmetrische Matrix: $\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}$.

Antisymmetrische Matrix: $\underline{\underline{A}}^T = -\underline{\underline{A}}$.

Einheitsmatrix: $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}$.

Die Determinante der Matrix:

Die Determinante der Matrix ist eine skalare Größe, die man nach der folgenden Berechnungsregel erhält:

$$\det\left|a_{ij}\right| = \det\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\left\{-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\right\} +$$

$$+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right).$$

Die adjungierte Matrix: das Element mit den Indizes ij der adjungierten Matrix ist gleich der vorzeichenbehafteten Subdeterminante des Matrixelementes mit den Indizes ij.

Bezeichnung: $\operatorname{adj}\left(a_{ij}\right) = \underline{\underline{A}}_{ij}, \quad (i = 1, 2, \ldots n; \quad j = 1, 2, \ldots n).$

Die inverse Matrix / Inverse: $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^{-1}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$.

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \left[a_{ij}^{-1}\right] = \frac{\operatorname{adj}\left(a_{ji}\right)}{\det\left|a_{ij}\right|}.$$

Beispiel: die Inverse von $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ist $\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & -\dfrac{b}{ad-bc} \\ -\dfrac{c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$.

<u>Lineares algebraisches Gleichungssystem:</u> $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{b}}$.

Ausführlich geschrieben:
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Nach der Durchführung der Matrizenmultiplikation:
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned}$$

Lösung des Gleichungssystems: $\underbrace{\underline{\underline{A}}^{-1}\,\underline{\underline{A}}}_{\underline{\underline{E}}}\,\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}^{-1}\,\underline{\underline{b}} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}^{-1}\,\underline{\underline{b}}$.

<u>Singuläre Matrix:</u> $\det\left|a_{ij}\right| = 0$.

<u>Schwach konditionierte Matrix</u>:

Wenn $\kappa\left(\underline{\underline{A}}\right) = \dfrac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \gg 1$ ist, dann ist die Matrix schwach konditioniert, wobei $\lambda_{\max}$ und $\lambda_{\min}$ der größte (höchste) und der kleinste Eigenwert der Matrix sind.

Der Koeffizient κ ist die Konditionszahl der Matrix.

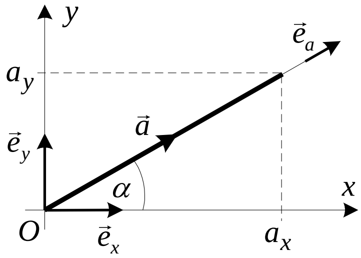
Die schwach konditionierten Matrizen entstehen bei der Lösung linearer Gleichungssysteme. In diesem Fall kann eine kleine Änderung in der Spaltenmatrix $\underline{\underline{b}}$ des Gleichungssystems eine große Änderung in der Spaltenmatrix der Unbekannten $\underline{\underline{x}}$ verursachen. Das heißt die Lösung wird ungenau.

A.2. Vektorenalgebra

<u>Skalare Größe</u>: eine geometrische, oder physikalische Größe, die durch eine vorzeichenbehaftete reelle Zahl und eine Maßeinheit charakterisiert ist.

<u>Vektorgröße</u>: eine gerichtete geometrische, oder physikalische Größe, die durch eine Länge (Betrag), ihre Richtung, ihren Richtungssinn (Vorzeichen) und eine Maßeinheit charakterisiert ist. Die Kennzeichnung als Vektor erfolgt im Folgenden durch einen über den Buchstaben gesetzten Pfeil.

<u>Angabe eines Vektors:</u>



Einheitsvektoren: $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$. (Vektor e *x*)

Die Einheitsvektoren haben eine Länge (Betrag) von eins: $|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = 1$. (Betrag von Vektor e *x* ist gleich eins)

Die Einheitsvektoren stehen aufeinander senkrecht: $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$, $\vec{e}_x \perp \vec{e}_y$

Angabe eines beliebigen Vektors mittels Einheitsvektoren: $\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y$.

Wenn man die Länge / den Betrag $|\vec{a}|$ und den Winkel α zwischen der Achse *x* und dem Vektor $\vec{a}$ kennt, dann folgt aus dem vorherigen Zusammenhang:

$\vec{a} = |\vec{a}|\cos\alpha\,\vec{e}_x + |\vec{a}|\sin\alpha\,\vec{e}_y = |\vec{a}|(\cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_y) = |\vec{a}|\,\vec{e}_a$, wobei $\vec{e}_a$ ein Einheitsvektor ist.

(Betrag von Vektor a mal in Klammern Kosinus Alpha mal Vektor e *x* plus …)

Die Länge des Vektors $\vec{a}$ kann man mit Hilfe des *Pythagoras*[1]-Satzes berechnen $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ und $|\vec{e}_a| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1$. (Quadratwurzel aus a x Quadrat plus a y Quadrat).

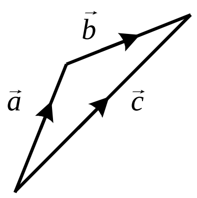
<u>Addition/Summation von Vektoren:</u>

Zwei Vektoren sind bekannt: $\vec{a} = a_x\,\vec{e}_x + a_y\,\vec{e}_y$, $\quad \vec{b} = b_x\,\vec{e}_x + b_y\,\vec{e}_y$.

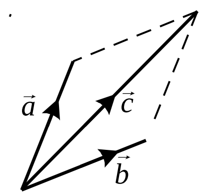
Berechnung der Summe zweier Vektoren:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x\,\vec{e}_x + a_y\,\vec{e}_y) + (b_x\,\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y) = \underbrace{(a_x + b_x)}_{c_x}\vec{e}_x + \underbrace{(a_y + b_y)}_{c_y}\vec{e}_y = \vec{c}\,.$$ (Vektor a plus Vektor b).

Darstellung der Summe zweier Vektoren:



Dreieck-Regel



Parallelogramm-Regel

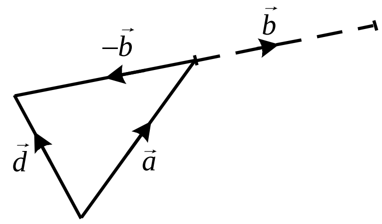
<u>Subtraktion von Vektoren:</u>

Zwei Vektoren sind bekannt: $\vec{a} = a_x\,\vec{e}_x + a_y\,\vec{e}_y$, $\quad \vec{b} = b_x\,\vec{e}_x + b_y\,\vec{e}_y$.

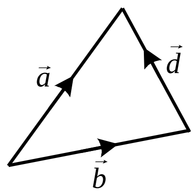
Die Berechnung der Differenz zweier Vektoren:

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x\,\vec{e}_x + a_y\,\vec{e}_y) - (b_x\vec{e}_x + b_y\,\vec{e}_y) = \underbrace{(a_x - b_x)}_{d_x}\vec{e}_x + \underbrace{(a_y - b_y)}_{d_y}\vec{e}_y = \vec{d}\,.$$ (Vektor a minus Vektor b).

Darstellung der Subtraktion zweier Vektoren:



$\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{d}$



$\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}$

Zwischen Vektoren kann man unterschiedliche Multiplikationen definieren.

<u>Skalare Multiplikation von Vektoren (das skalare Produkt von Vektoren):</u>

Das Ergebnis der skalaren Multiplikation ist eine skalare Größe.

Die Definition der skalaren Multiplikation: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\alpha$.

Die Berechnung eines skalaren Produktes: $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Die Aussprache der Bezeichnung $\vec{a}\cdot\vec{b}$: Vektor a skalar multipliziert mit Vektor b.

Die skalare Multiplikation der Einheitsvektoren: $\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x = 1$, $\quad \vec{e}_y\cdot\vec{e}_y = 1$, $\quad \vec{e}_z\cdot\vec{e}_z = 1$,

$\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y = 0$, $\quad \vec{e}_x\cdot\vec{e}_z = 0$, $\quad \vec{e}_y\cdot\vec{e}_z = 0$.

Die Verallgemeinerung der Ergebnisse:

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 \text{ und } \vec{a}\cdot\vec{b} = 0,\ \ (|\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0) \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}\,.$$

[1] Samos Pythagoras (B.C. 582-496) alt-griechischer Mathematiker und Philosoph

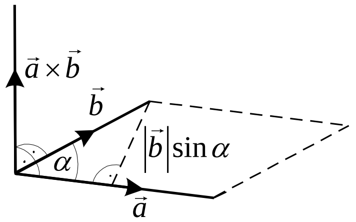
Die Aussprache der Bezeichnung $\vec{a} \perp \vec{b}$: Vektor a ist senkrecht zu Vektor b.

Das Kreuzprodukt von Vektoren (die vektorielle Multiplikation von Vektoren):

Das Ergebnis des Kreuzproduktes ist eine Vektorgröße.

Die Definition des Kreuzproduktes:

Die Größe des Ergebnisvektors:. $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}| \underbrace{|\vec{b}| \sin\alpha}_{\text{die Höhe des Parallelogramms}}$ (Vektor a Kreuz Vektor b Betrag ist gleich …)

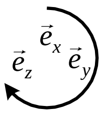


Die Richtung des Ergebnisvektors erhält man mit Hilfe der sogenannten Rechtehandregel:

Streckt man, im Winkel von 90 Grad zueinander, den Zeigefinger (Vektor a) und den Mittelfinger (Vektor b) der rechten Hand aus, dann zeigt der im Winkel von 90 Grad zu den anderen beiden Fingern ausgestreckte Daumen in Richtung des Ergebnisvektors. / Wenn man auf der rechten Hand den ausgestreckten Zeigefinger (Vektor a) in den 90 Grad dazu gespreizten Mittelfinger (Vektor b) dreht, dann zeigt der 90 Grad zu den beiden Fingern ausgestreckte Daumen in Richtung des Ergebnisvektors bzw. einer sich drehenden Rechtsschraube.

Der Ergebnisvektor ist zu den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht.

Das Kreuzprodukt von Einheitsvektoren:



$$\vec{e}_x\times\vec{e}_x=\vec{0}, \qquad \vec{e}_y\times\vec{e}_y=\vec{0}, \qquad \vec{e}_z\times\vec{e}_z=\vec{0},$$
$$\vec{e}_x\times\vec{e}_y=\vec{e}_z, \qquad \vec{e}_y\times\vec{e}_z=\vec{e}_x, \qquad \vec{e}_z\times\vec{e}_x=\vec{e}_y,$$
$$\vec{e}_y\times\vec{e}_x=-\vec{e}_z, \qquad \vec{e}_x\times\vec{e}_z=-\vec{e}_y, \qquad \vec{e}_z\times\vec{e}_y=-\vec{e}_x.$$

Regel: - Wenn man zwei Einheitsvektoren in der Reihenfolge (in der Richtung) des im Bild dargestellten Pfeiles multipliziert, dann erhält man den dritten Einheitsvektor mit positivem Vorzeichen.

- Wenn man zwei Einheitsvektoren in der umgekehrten Reihenfolge (in der Gegenrichtung) des im Bild dargestellten Pfeiles multipliziert, dann erhält man den dritten Einheitsvektor mit negativem Vorzeichen.

Die Berechnung eines Kreuzproduktes:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\vec{e}_x(a_yb_z-b_ya_z)-\vec{e}_y(a_xb_z-b_xa_z)+\vec{e}_z(a_xb_y-b_xa_y).$$

Die Verallgemeinerung der Ergebnisse: $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \quad (|\vec{a}|\neq 0, |\vec{b}|\neq 0) \quad \Rightarrow \quad \vec{a}\,||\,\vec{b}$.

Gemischtes Produkt von Vektoren:

Das Ergebnis dieser Operation ist eine skalare Größe.

Definition: $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})=(\vec{a}\times b)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

Berechnung: $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_x & b_x & c_x\\ a_y & b_y & c_y\\ a_z & b_z & c_z\end{vmatrix}$.

Eigenschaft: $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})=(\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b})=(\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a})=-(\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a})=-(\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b})=-(\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c})$.

Die Folge: Wenn $|\vec{a}|\neq\vec{0}, |\vec{b}|\neq\vec{0}$ und $|\vec{c}|\neq\vec{0}$ sowie $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})=0 \quad\Rightarrow$ Die Vektoren liegen in der gleichen

Ebene.

Doppeltes Kreuzprodukt von Vektoren:

Das Ergebnis dieser Operation ist ein Vektor.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}\text{, oder } \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}).$$

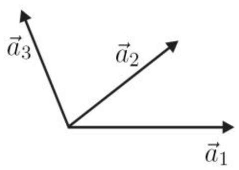
Für die Berechnung gibt es zwei Möglichkeiten:
- die Ausführung der zwei Kreuzprodukte in der durch die Klammern bestimmten Reihenfolge,
- die Anwendung der Berechnungsregel für das doppelte Kreuzprodukt:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})\text{, beziehungsweise } \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

Eigenschaften: - die Reihenfolge der Vektoren ist nicht vertauschbar,
- die Reihenfolge der Kreuzprodukte ist ebenfalls nicht vertauschbar.

Reziproke Dreier-Vektoren:

Bekannt sind drei beliebige Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, die nicht in gleicher Ebene liegen: $\left(\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3\right)=v\neq 0$.



Die zu den Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ zugeordneten reziproken Dreier-Vektoren:

$$\vec{a}_1^*=\frac{\vec{a}_2\times\vec{a}_3}{\left(\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3\right)},\qquad \vec{a}_2^*=\frac{\vec{a}_3\times\vec{a}_1}{\left(\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3\right)},\qquad \vec{a}_3^*=\frac{\vec{a}_1\times\vec{a}_2}{\left(\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3\right)}.$$

Die reziproken Vektoren $\vec{a}_1^*, \vec{a}_2^*, \vec{a}_3^*$ stehen auf den Ebenen $\vec{a}_2\vec{a}_3$, $\vec{a}_3\vec{a}_1$ und $\vec{a}_1\vec{a}_2$ senkrecht.

Weiterhin gelten die folgenden Zusammenhänge: $\left(\vec{a}_1^*\vec{a}_2^*\vec{a}_3^*\right)=\frac{1}{v}$, sowie

$$\vec{a}_1=\frac{\vec{a}_2^*\times\vec{a}_3^*}{\left(\vec{a}_1^*\vec{a}_2^*\vec{a}_3^*\right)},\quad \vec{a}_2=\frac{\vec{a}_3^*\times\vec{a}_1^*}{\left(\vec{a}_1^*\vec{a}_2^*\vec{a}_3^*\right)},\quad \vec{a}_3=\frac{\vec{a}_1^*\times\vec{a}_2^*}{\left(\vec{a}_1^*\vec{a}_2^*\vec{a}_3^*\right)}.$$

Infolge der „Symmetrie“ der Definitionen und der Gültigkeit des Zusammenhanges

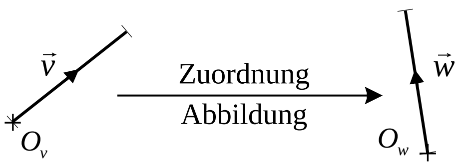
$$\left(\vec{a}_1^*\vec{a}_2^*\vec{a}_3^*\right)=\frac{1}{v}=\frac{}{\left(\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3\right)},$$

kann man bei den Dreier-Vektoren von einer Reziprozitätseigenschaft sprechen.

A.3. Definition und Bildung von Tensoren

Der Tensor: Eine Abbildung (Zuordnung), die durch eine homogene lineare Vektor-Vektor-Funktion realisiert ist.

$$\vec{w}=f(\vec{v})=\underline{\underline{T}}\cdot\vec{v}.$$



Der Tensor $\underline{\underline{T}}$ ordnet einem beliebigen Vektor $\vec{v}$ einen Bildvektor $\vec{w}$ zu.

Die Vektor-Vektor-Funktion stellt einen Zusammenhang dar, bei dem sowohl der Deutungsbereich $\vec{v}$ als auch der Wertevorrat $\vec{w}$ Vektorgrößen sind.

Die Eigenschaften des Tensors:

- Homogen linear: Wenn ein Vektor als eine lineare Kombination zweier Vektoren gebildet wird, dann sind die Linearkombinationen des Vektors $\vec{v}$ und des Bildvektors $\vec{w}$ gleich.

  Wenn $\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2$ und $\vec{w}_1 = f(\vec{v}_1)$, $\vec{w}_2 = f(\vec{v}_2)$, dann

  $$\vec{w} = f(\vec{v}) = f(\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2) = \lambda_1 f(\vec{v}_1) + \lambda_2 f(\vec{v}_2) = \lambda_1\vec{w}_1 + \lambda_2\vec{w}_2 .$$

  In dem Zusammenhang sind λ_1 und λ_2 beliebige skalare Koeffizienten.

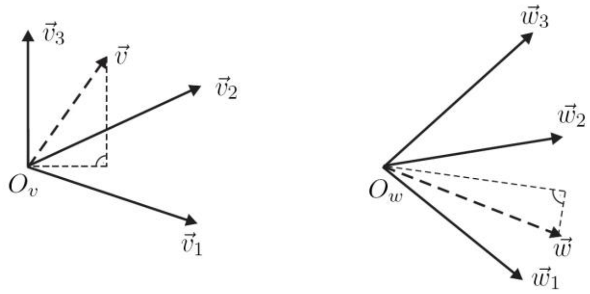
  Folge: Die Abbildung ordnet einem Null-Vektor einen weiteren Null-Vektor zu: $\vec{0} = f(\vec{0})$.

- Der Tensor ist eine vom Koordinatensystem unabhängige, physikalische (geometrische, mechanische) Größe.

Bildung des Tensors:

Satz: der Tensor ist durch drei Wertepaare eindeutig bestimmt, wenn die Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ nicht in gleicher Ebene liegen: $\left(\vec{v}_1\vec{v}_2\vec{v}_3\right) \neq 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_1 \longrightarrow \vec{w}_1 = f(\vec{v}_1) \\ \vec{v}_2 \longrightarrow \vec{w}_2 = f(\vec{v}_2) \\ \vec{v}_3 \longrightarrow \vec{w}_3 = f(\vec{v}_3) \end{array}\right\}, \text{ wobei } \vec{w}_1,\ \vec{w}_2,\ \vec{w}_3 \text{ Bildvektoren sind.}$$



Folge des Satzes: wenn man die zu den Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ gehörenden Bildvektoren $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, $\vec{w}_3$ kennt, dann kann man den zu dem beliebigen Vektor $\vec{v}$ gehörenden Bildvektor $\vec{w}$ bestimmen.

Dyadische (Allgemeine) Multiplikation von Vektoren:

Gegeben sind die beliebigen Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$.

Die Kennzeichnung der dyadischen Multiplikation zweier Vektoren: $\vec{a} \circ \vec{b}$.
Aussage: Vektor a dyadisch multipliziert mit Vektor b.

Das dyadische Produkt wird mittels Angabe der Eigenschaften der dyadischen Multiplikation definiert:

- die dyadischen und skalaren Multiplikationen sind *assoziativ* (das heißt die Reihenfolge der beiden Operationen kann vertauscht werden):

  $(\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \circ (\vec{b} \cdot \vec{c})$,

- das dyadische Produkt ist in Bezug auf die skalare Multiplikation *nicht kommutativ* (es ist nicht egal, ob man ein dyadisches Produkt von der linken oder von der rechten Seite mit einem dritten Vektor skalar multipliziert, weil die Ergebnisse der beiden Multiplikationen unterschiedlich sind.)

  $\vec{c} \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) \neq (\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Wenn die Multiplikation die obigen beiden Zusammenhänge erfüllt, dann kann man von einer dyadischen Multiplikation sprechen.
Berechnung der dyadischen Multiplikation zweier Vektoren in kartesischen Koordinaten:

$$\underline{\underline{T}} = \left[\underline{\underline{T}}\right]_{x,y,z} = \vec{a} \circ \vec{b} = \underset{(3\times1)}{\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}} \underset{(1\times3)}{\begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}} = \underset{(3\times3)}{\begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{bmatrix}}.$$

Der erste Vektor wird in der Form einer Spaltenmatrix, der zweite Vektor jedoch in der Form einer Zeilenmatrix aufgeschrieben und mit diesen Matrizen wird die Matrizenmultiplikation (Kombination von Zeilen und Spalten) durchgeführt.

Das Ergebnis der dyadischen Multiplikation ist ein spezieller Tensor. Das Ergebnis der Multiplikation kann man mittels einer Matrix mit neun skalaren Elementen und mittels der Angabe des Koordinatensystems charakterisieren.

Dyadische Multiplikation der Einheitsvektoren:

$$\left[\vec{e}_x \circ \vec{e}_x\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \left[\vec{e}_y \circ \vec{e}_y\right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\left[\vec{e}_z \circ \vec{e}_z\right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \left[\vec{e}_x \circ \vec{e}_y\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\left[\vec{e}_x \circ \vec{e}_z\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \left[\vec{e}_y \circ \vec{e}_z\right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\left[\vec{e}_y \circ \vec{e}_x\right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \left[\vec{e}_z \circ \vec{e}_x\right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\left[\vec{e}_z \circ \vec{e}_y\right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Die Multiplikation mit einer skalaren Größe ist immer dyadisch, oder anders ausgedrückt allgemein.

Die Formulierung des Tensors erfolgt mittels: – der Matrix des Tensors (neun skalare Größen),
– dem Koordinatensystem.

Anordnung der Koordinaten des Tensors in einer Matrix: $\left[\underline{\underline{T}}\right]_{x,y,z} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}.$

Dyadische Bildung des Tensors:

Satz: Jeder Tensor $\underline{\underline{T}}$ kann als Summe von drei Dyaden gebildet werden:

$$\vec{w} = f(\vec{v}) = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{v}.$$

Drei bekannte Wertepaare:
$$\vec{v}_1 \longrightarrow \vec{w}_1,$$
$$\vec{v}_2 \longrightarrow \vec{w}_2,$$
$$\vec{v}_3 \longrightarrow \vec{w}_3.$$

Dyadische Bildung des Tensors: : $\underline{\underline{T}} = \vec{w}_1 \circ \vec{v}_1^* + \vec{w}_2 \circ \vec{v}_2^* + \vec{w}_3 \circ \vec{v}_3^*.$

Dyadische Bildung des transponierten Tensors: $\underline{\underline{T}}^T = \vec{v}_1^* \circ \vec{w}_1 + \vec{v}_2^* \circ \vec{w}_2 + \vec{v}_3^* \circ \vec{w}_3$.

Symmetrischer Tensor: $\underline{\underline{T}}^T = \underline{\underline{T}}$.

Antisymmetrischer Tensor: $\underline{\underline{T}}^T = -\underline{\underline{T}}$.

Einheitstensor: $\vec{v} = \underline{\underline{E}} \cdot \vec{v} = \underline{\underline{I}} \cdot \vec{v}$.

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{I}} = \vec{v}_1 \circ \vec{v}_1^* + \vec{v}_2 \circ \vec{v}_2^* + \vec{v}_3 \circ \vec{v}_3^* = \vec{v}_1^* \circ \vec{v}_1 + \vec{v}_2^* \circ \vec{v}_2 + \vec{v}_3^* \circ \vec{v}_3.$$

$$\left[\, \underline{\underline{E}} \,\right] = \left[\, \underline{\underline{I}} \,\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Satz: Jeder Tensor kann in einen symmetrischen Teil und in einen antisymmetrischen Teil zerlegt werden:

$$\underline{\underline{T}} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}}^T\right)}_{\underline{\underline{T}}_{\mathrm{s}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{T}} - \underline{\underline{T}}^T\right)}_{\underline{\underline{T}}_{\mathrm{as}}}.$$

Bildung des Tensors in kartesischen Koordinaten:

Satz 1.: - Jeder Tensor kann im 3D Fall mit drei, zueinander senkrechten Einheitsvektoren und mit ihren Bildvektoren (drei Wertepaare) eindeutig angegeben werden.

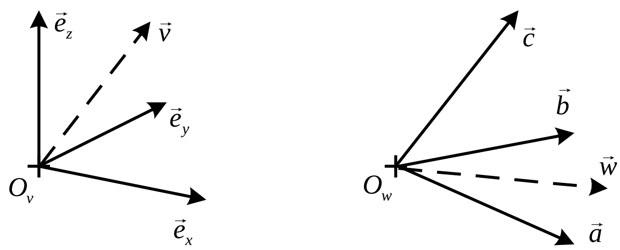
- Jeder Tensor kann im 2D Fall mit zwei, zueinander senkrechten Einheitsvektoren und mit ihren Bildvektoren (zwei Wertepaare) eindeutig angegeben werden.

Satz 2.: - Jeder Tensor kann im 3D Fall in Form einer Summe dreier Dyaden gebildet werden.

- Jeder Tensor kann im 2D Fall in Form einer Summe zweier Dyaden gebildet werden.

Bekannt sind drei Wertepaare:

$$\begin{aligned} \vec{e}_x &\rightarrow \vec{a} = f(\vec{e}_x), & \vec{a} &= a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z, \\ \vec{e}_y &\rightarrow \vec{b} = f(\vec{e}_y), & \vec{b} &= b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y + b_z\vec{e}_z, \\ \vec{e}_z &\rightarrow \vec{c} = f(\vec{e}_z), & \vec{c} &= c_x\vec{e}_x + c_y\vec{e}_y + c_z\vec{e}_z. \end{aligned}$$



Dyadische Bildung des Tensors: $\underline{\underline{T}} = (\vec{a} \circ \vec{e}_x + \vec{b} \circ \vec{e}_y + \vec{c} \circ \vec{e}_z)$.

Die Matrix des Tensors: $\left[\underline{\underline{T}}\right]_{xyz} = \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{bmatrix}$.

Die Matrix des Tensors erhält man nach Ausführung der dyadischen Multiplikationen und Additionen.

Die Spalten der Matrix enthalten die Koordinaten der Bildvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. In der ersten Zeile der Matrix stehen die *x*-Koordinaten der Bildvektoren, in der zweiten und dritten Zeile stehen die *y*- und *z*-Koordinaten.

Doppeltes skalares Produkt von Tensoren

Jeder Tensor kann als eine Summe dreier Dyaden dargestellt werden. Das doppelte skalare Produkt wird mit Hilfe von Dyaden definiert:

$$\left(\vec{a}\circ\vec{b}\right)\cdot\cdot\left(\vec{c}\circ\vec{d}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right),\qquad\qquad \left(\vec{a}\circ\vec{b}\right)\cdot\cdot\left(\vec{c}\circ\vec{d}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{d}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right).$$

Das Ergebnis der doppelten skalaren Multiplikation zweier Tensoren (zweier Dyaden) ist eine skalare Größe.

Die doppelte skalare Multiplikation zwischen zwei Tensoren (zwei Dyaden) kann man auch in unterschiedlicher Weise vornehmen. Damit bekommt man auch unterschiedliche Ergebnisse. Das Ergebnis ist aber im Fall von symmetrischen Tensoren dieselbe skalare Größe.

Bekannt sind:

$$\left[\underline{\underline{A}}\right]=\begin{array}{c}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\\ -------\\ \begin{array}{ccc}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3\end{array}\end{array}\quad \text{und}\quad \left[\underline{\underline{B}}\right]=\begin{array}{c}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{bmatrix}\\ -------\\ \begin{array}{ccc}\vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3\end{array}\end{array}$$

Ausführung der doppelten Multiplikation:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{A}}\cdot\cdot\underline{\underline{B}} &=\left(\vec{a}_1\circ\vec{e}_x+\vec{a}_2\circ\vec{e}_y+\vec{a}_3\circ\vec{e}_z\right)\cdot\cdot\left(\vec{b}_1\circ\vec{e}_x+\vec{b}_2\circ\vec{e}_y+\vec{b}_3\circ\vec{e}_z\right)=\\ &=\left(\vec{a}_1\circ\vec{e}_x\right)\cdot\cdot\left(\vec{b}_1\circ\vec{e}_x\right)+\left(\vec{a}_1\circ\vec{e}_x\right)\cdot\cdot\left(\vec{b}_2\circ\vec{e}_y\right)+\left(\vec{a}_1\circ\vec{e}_x\right)\cdot\cdot\left(\vec{b}_3\circ\vec{e}_z\right)+\\ &+\left(\vec{a}_2\circ\vec{e}_y\right)\cdot\cdot\left(\vec{b}_1\circ\vec{e}_x\right)+\left(\vec{a}_2\circ\vec{e}_y\right)\cdot\cdot\left(\vec{b}_2\circ\vec{e}_y\right)+\left(\vec{a}_2\circ\vec{e}_y\right)\cdot\cdot\left(\vec{b}_3\circ\vec{e}_z\right)+\\ &+\left(\vec{a}_3\circ\vec{e}_{\mathbf{z}}\right)\cdot\cdot\left(\vec{b}_1\circ\vec{e}_x\right)+\left(\vec{a}_3\circ\vec{e}_{\mathbf{z}}\right)\cdot\cdot\left(\vec{b}_2\circ\vec{e}_y\right)+\left(\vec{a}_3\circ\vec{e}_{\mathbf{z}}\right)\cdot\cdot\left(\vec{b}_3\circ\vec{e}_z\right).\end{aligned}$$

Doppelte skalare Multiplikation von Dyaden:

$$\left(\vec{a}\circ\vec{b}\right)\cdot\cdot\left(\vec{c}\circ\vec{d}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right)$$

Es wird die folgende Regel angewendet:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{A}}\cdot\cdot\underline{\underline{B}} &=\left(\vec{a}_1\cdot\vec{b}_1\right)\underbrace{\left(\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x\right)}_{1}+\left(\vec{a}_1\cdot\vec{b}_2\right)\underbrace{\left(\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y\right)}_{0}+\left(\vec{a}_1\cdot\vec{b}_3\right)\underbrace{\left(\vec{e}_x\cdot\vec{e}_z\right)}_{0}+\\ &+\left(\vec{a}_2\cdot\vec{b}_1\right)\underbrace{\left(\vec{e}_y\cdot\vec{e}_x\right)}_{0}+\left(\vec{a}_2\cdot\vec{b}_2\right)\underbrace{\left(\vec{e}_y\cdot\vec{e}_y\right)}_{1}+\left(\vec{a}_2\cdot\vec{b}_3\right)\underbrace{\left(\vec{e}_y\cdot\vec{e}_z\right)}_{0}+\\ &+\left(\vec{a}_3\cdot\vec{b}_1\right)\underbrace{\left(\vec{e}_z\cdot\vec{e}_x\right)}_{0}+\left(\vec{a}_3\cdot\vec{b}_2\right)\underbrace{\left(\vec{e}_z\cdot\vec{e}_y\right)}_{0}+\left(\vec{a}_3\cdot\vec{b}_3\right)\underbrace{\left(\vec{e}_z\cdot\vec{e}_z\right)}_{1}=\vec{a}_1\cdot\vec{b}_1+\vec{a}_2\cdot\vec{b}_2+\vec{a}_3\cdot\vec{b}_3=\\ &=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{13}b_{13}+a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{23}+a_{31}b_{31}+a_{32}b_{32}+a_{33}b_{33}.\end{aligned}$$

Beispiel: Berechnung der spezifischen Formänderungsenergie mit doppelter skalarer Multiplikation.

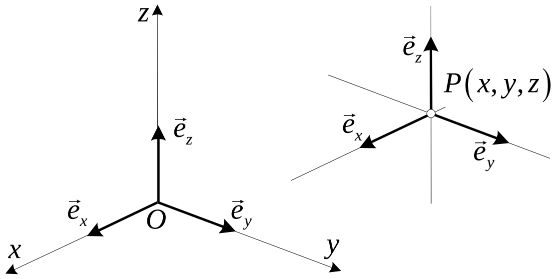
$$\begin{aligned}u &=\frac{1}{2}\underline{\underline{F}}\cdot\cdot\underline{\underline{A}}=\frac{1}{2}\left(\vec{\rho}_x\circ\vec{e}_x+\vec{\rho}_y\circ\vec{e}_y+\vec{\rho}_z\circ\vec{e}_z\right)\cdot\cdot\left(\vec{\alpha}_x\circ\vec{e}_x+\vec{\alpha}_y\circ\vec{e}_y+\vec{\alpha}_z\circ\vec{e}_z\right)=\\ &=\frac{1}{2}\Bigg(\vec{\rho}_x\cdot\vec{\alpha}_x\underbrace{\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x}_{=1}+\vec{\rho}_x\cdot\vec{\alpha}_y\underbrace{\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y}_{=0}+\vec{\rho}_x\cdot\vec{\alpha}_z\underbrace{\vec{e}_x\cdot\vec{e}_z}_{=0}+\vec{\rho}_y\cdot\vec{\alpha}_x\underbrace{\vec{e}_y\cdot\vec{e}_x}_{=0}+\vec{\rho}_y\cdot\vec{\alpha}_y\underbrace{\vec{e}_y\cdot\vec{e}_y}_{=1}+\\ &\quad+\vec{\rho}_y\cdot\vec{\alpha}_z\underbrace{\vec{e}_y\cdot\vec{e}_z}_{=0}+\vec{\rho}_z\cdot\vec{\alpha}_x\underbrace{\vec{e}_z\cdot\vec{e}_x}_{=0}+\vec{\rho}_z\cdot\vec{\alpha}_y\underbrace{\vec{e}_z\cdot\vec{e}_y}_{=0}+\vec{\rho}_z\cdot\vec{\alpha}_z\underbrace{\vec{e}_z\cdot\vec{e}_z}_{=1}\Bigg)=\\ &=\frac{1}{2}\left(\vec{\rho}_x\cdot\vec{\alpha}_x+\vec{\rho}_y\cdot\vec{\alpha}_y+\vec{\rho}_z\cdot\vec{\alpha}_z\right)=\frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_x\varepsilon_x+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{zx}\gamma_{zx}\right).\end{aligned}$$

Sowohl der Verzerrungstensor als auch der Spannungstensor sind symmetrisch. Deshalb erhält man für die Formänderungsenergie einen eindeutigen Wert.

A.4. Koordinatensysteme

Über Bewegungen, über Verschiebungen kann man immer nur auf der Grundlage einer Basis, eines Bezugssystems sprechen. Bei der Formulierung / bei der Beschreibung der Bewegung bildet das Koordinatensystem diese Basis.

A.4.1. Descartessches / Kartesisches Koordinatensystem



Unabhängige Veränderlichen (Ortskoordinaten): x, y, z.

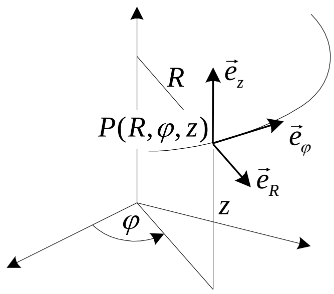
Koordinatenlinien: $y_P, z_P =$ konstant $\rightarrow$ Gerade,
$x_P, z_P =$ konstant $\rightarrow$ Gerade,
$x_P, y_P =$ konstant $\rightarrow$ Gerade.

Basisvektoren: die tangentialen Einheitsvektoren der Koordinatenlinien.

$$\vec{e}_x = \text{konstant},\quad \vec{e}_y = \text{konstant},\quad \vec{e}_z = \text{konstant},\qquad |\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z| = 1,\qquad \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_x = 0.$$

Die Basisvektoren des *Descartesschen*[2] Koordinatensystems hängen nicht vom Ort ab und sie sind in jedem Punkt senkrecht zueinander. Das *Descartessche* Koordinatensystem ist ein geradliniges senkrechtes Koordinatensystem mit Einheitsbasis.

A.4.2. Zylinderkoordinatensystem



Unabhängigen Veränderlichen (Ortskoordinaten): R, φ, z.

Koordinatenlinien: $\varphi_P, z_P =$ konstant $\rightarrow$ Gerade,
$R_P, z_P =$ konstant $\rightarrow$ Kreis,
$R_P, \varphi_P =$ konstant $\rightarrow$ Gerade.

Basisvektoren: die tangentialen Einheitsvektoren der Koordinatenlinien.

$$\vec{e}_R = \vec{e}_R(\varphi),\quad \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi(\varphi),\quad \vec{e}_z = \text{konstant},\qquad |\vec{e}_R| = |\vec{e}_\varphi| = |\vec{e}_z| = 1,\qquad \vec{e}_R \cdot \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_R = 0.$$

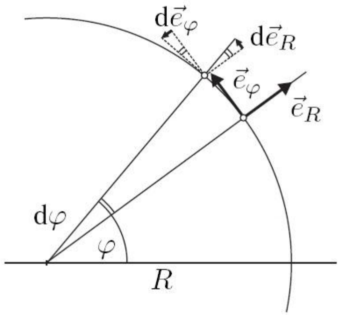
Die Basisvektoren $\vec{e}_R$ und $\vec{e}_\varphi$ sind vom Ort abhängig (sie hängen von der Koordinate φ ab), sie sind aber in jedem Punkt senkrecht zueinander. Das Zylinderkoordinatensystem ist ein krummliniges, senkrechtes Koordi-

[2] René Descartes (1596 – 1650) französischer Mathematiker und Philosoph.

natensystem mit Einheitsbasis.

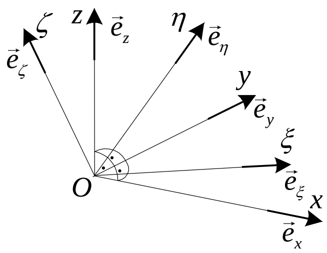
Die Ableitungen der Basisvektoren nach dem Ort: $\frac{\mathrm{d}\vec{e}_R}{\mathrm{d}\varphi} = \vec{e}_\varphi, \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{e}_\varphi}{\mathrm{d}\varphi} = -\vec{e}_R.$

Veranschaulichung der Änderung der Basisvektoren in Abhängigkeit vom Ort:



A.5. Koordinaten-Transformation

Gegeben sind zwei Koordinatensysteme (x,y,z) und (ξ,η,ζ) mit einem gemeinsamen Ursprung *O*. Sie sind zueinander verdreht. Beide Koordinatensysteme sind *Descartessche* Systeme.



<u>Koordinaten-Transformation</u>: Der Zusammenhang zwischen den in einem *x,y,z*- und einem ξ,η,ζ-Koordinatensystem aufgeschriebenen, gegebenen Größen (Vektorgrößen, Tensorgrößen).

Transformation von Vektoren:

Bezeichnung: $\underset{xyz}{[\vec{v}\,]}$ ist ein beliebiger, im xyz-Koordinatensystem aufgeschriebener Vektor,

$\underset{\xi\eta\zeta}{[\vec{v}\,]}$ ist der gleiche beliebige Vektor, aber jetzt im $\xi\eta\zeta$-Koordinatensystem aufgeschrieben.

Die Transformationsformel für Vektoren: $\underset{(3\times1)}{\underset{\xi\eta\zeta}{[\vec{v}]}} = \underset{(3\times3)}{[\underline{\underline{K}}]}\underset{(3\times1)}{\underset{xyz}{[\vec{v}]}}$,

die Transformationsmatrix ist:

$$[\underline{\underline{K}}] = \begin{bmatrix} (\vec{e}_\xi\cdot\vec{e}_x) & (\vec{e}_\xi\cdot\vec{e}_y) & (\vec{e}_\xi\cdot\vec{e}_z) \\ (\vec{e}_\eta\cdot\vec{e}_x) & (\vec{e}_\eta\cdot\vec{e}_y) & (\vec{e}_\eta\cdot\vec{e}_z) \\ (\vec{e}_\zeta\cdot\vec{e}_x) & (\vec{e}_\zeta\cdot\vec{e}_y) & (\vec{e}_\zeta\cdot\vec{e}_z) \end{bmatrix}.$$

Nach der Durchführung der skalaren Multiplikationen:

$$[\underline{\underline{K}}] = \begin{bmatrix} \cos(\xi,x) & \cos(\xi,y) & \cos(\xi,z) \\ \cos(\eta,x) & \cos(\eta,y) & \cos(\eta,z) \\ \cos(\zeta,x) & \cos(\zeta,y) & \cos(\zeta,z) \end{bmatrix}.$$

Eigenschaft der Transformationsmatrix: $\underset{xyz}{[\vec{v}]} = \underbrace{\left[\underline{\underline{K}}\right]^{-1} \underset{\xi\eta\zeta}{[\vec{v}]} = \left[\underline{\underline{K}}\right]^{T} \underset{\xi\eta\zeta}{[\vec{v}]}}.$

$$\Downarrow$$

$$\left[\underline{\underline{K}}\right]^{-1} = \left[\underline{\underline{K}}\right]^{T} \text{ orthogonale Matrix}$$

$$\left[\underline{\underline{K}}\right]^{-1}\left[\underline{\underline{K}}\right] = \left[\underline{\underline{K}}\right]\left[\underline{\underline{K}}\right]^{-1} = \left[\underline{\underline{K}}\right]^{T}\left[\underline{\underline{K}}\right] = \left[\underline{\underline{K}}\right]\left[\underline{\underline{K}}\right]^{T} = \left[\underline{\underline{E}}\right].$$

Transformation von Tensoren:

Der Tensor (nach Definition) ist eine Koordinatensystem-unabhängige Zuordnung / Abbildung:

$$\underset{xyz}{[\vec{w}]} = \underset{xyz}{\left[\underline{\underline{T}}\right]} \underset{xyz}{[\vec{v}]}, \qquad \underset{\xi\eta\zeta}{[\vec{w}]} = \underset{\xi\eta\zeta}{\left[\underline{\underline{T}}\right]} \underset{\xi\eta\zeta}{[\vec{v}]}.$$

Transformation der beide Vektoren $\underset{xyz}{[\vec{w}]}$, $\underset{xyz}{[\vec{v}]}$ im ersten Zusammenhang:

$$\left[\underline{\underline{K}}\right] / \qquad \left[\underline{\underline{K}}\right]^{T} \underset{\xi\eta\zeta}{[\vec{w}]} = \underset{xyz}{\left[\underline{\underline{T}}\right]} \left[\underline{\underline{K}}\right]^{T} \underset{\xi\eta\zeta}{[\vec{v}]}.$$

Multiplikation der beiden Seiten der Gleichung:

$$\left[\underline{\underline{E}}\right] \underset{\xi\eta\zeta}{[\vec{w}]} = \underbrace{\left[\underline{\underline{K}}\right] \underset{xyz}{\left[\underline{\underline{T}}\right]} \left[\underline{\underline{K}}\right]^{T}}_{\underset{\xi\eta\zeta}{\left[\underline{\underline{T}}\right]}} \underset{\xi\eta\zeta}{[\vec{v}]},$$

Transformationsformel für Tensoren: $\underset{\xi\eta\zeta}{\left[\underline{\underline{T}}\right]} = \left[\underline{\underline{K}}\right] \underset{xyz}{\left[\underline{\underline{T}}\right]} \left[\underline{\underline{K}}\right]^{T}.$

Definition des Tensors: Eine aus neun Zahlenwerten bestehende Größe (Z.B. eine Matrix von Format 3×3) kann in einem gegebenen Koordinatensystem einen Tensor bilden, den man nach der obigen Regel in ein anderes Koordinatensystem transformieren kann.

A.6. Differentiation nach dem Ort

A.6.1. Die Ableitungen nach dem Ort eines Vektors in kartesischen Koordinaten

$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z.$

Die partiellen Ableitungen nach den Ortskoordinaten des Vektors:

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial a_y}{\partial x}\vec{e}_y + \frac{\partial a_z}{\partial x}\vec{e}_z,$$

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial y} = \frac{\partial a_x}{\partial y}\vec{e}_x + \frac{\partial a_y}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial a_z}{\partial y}\vec{e}_z,$$

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial z} = \frac{\partial a_x}{\partial z}\vec{e}_x + \frac{\partial a_y}{\partial z}\vec{e}_y + \frac{\partial a_z}{\partial z}\vec{e}_z.$$

Man muss hier nur die Koordinaten des Vektors differenzieren, die Basisvektoren hängen nicht vom Ort ab.

A.6.2. Die Ableitungen nach dem Ort eines Vektors in Zylinderkoordinaten

$\vec{a} = a_R \vec{e}_R + a_\varphi \vec{e}_\varphi + a_z \vec{e}_z.$

Die partiellen Ableitungen nach den Ortskoordinaten des Vektors: $\frac{\partial \vec{a}}{\partial R} = \frac{\partial a_R}{\partial R}\vec{e}_R + \frac{\partial a_\varphi}{\partial R}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial a_z}{\partial R}\vec{e}_z,$

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial\varphi}=\underbrace{\frac{\partial a_R}{\partial\varphi}\vec{e}_R+a_R\frac{\partial\vec{e}_R}{\partial\varphi}}_{\frac{\partial(a_R\vec{e}_R)}{\partial\varphi}}+\underbrace{\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi+a_\varphi\frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\varphi}}_{\frac{\partial(a_\varphi\vec{e}_\varphi)}{\partial\varphi}}+\frac{\partial a_z}{\partial\varphi}\vec{e}_z,$$

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial z}=\frac{\partial a_R}{\partial z}\vec{e}_R+\frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\vec{e}_\varphi+\frac{\partial a_z}{\partial z}\vec{e}_z,$$

Hier hängen auch die Basisvektoren $\vec{e}_R$ und $\vec{e}_\varphi$ vom Ort ab.

A.7. Der *Hamiltonsche* Differentialoperator (nabla)

Der *Hamilton*[3]*sche* oder ∇ (nabla) Differentialoperator:

In kartesischen Koordinaten: $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$,

In Zylinderkoordinaten: $\nabla=\frac{\partial}{\partial R}\vec{e}_R+\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi+\frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$.

A.7.1. Divergenz (skalare Multiplikation)

a) Divergenz eines Vektors:

$$\vec{a}\cdot\nabla=\left(a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y+a_z\vec{e}_z\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z\right)=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

$$\vec{a}\cdot\nabla=\left(a_R\vec{e}_R+a_\varphi\vec{e}_\varphi+a_z\vec{e}_z\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial R}\vec{e}_R+\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi+\frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z\right)=$$
$$=\frac{\partial a_R}{\partial R}+\frac{1}{R}\left[a_R\frac{\partial\vec{e}_R}{\partial\varphi}\cdot\vec{e}_\varphi+\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right]+\frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Werden die Zusammenhänge $\frac{\partial\vec{e}_R}{\partial\varphi}=\vec{e}_\varphi$ und $\vec{e}_\varphi\cdot\vec{e}_\varphi=1$ berücksichtigt, erhält man das Ergebnis:

$$\vec{a}\cdot\nabla=\frac{\partial a_R}{\partial R}+\frac{1}{R}\left[a_R+\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right]+\frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Die Eigenschaft der Divergenz des Vektors: $\vec{a}\cdot\nabla=\nabla\cdot\vec{a}$.

Die rechtseitige Divergenz des Vektors ist gleich der linkseitigen Divergenz des Vektors. (Die Faktoren bei einer skalaren Multiplikation kann man vertauschen.)

b) Rechtseitige Divergenz des Tensors:

$$\underline{\underline{A}}\cdot\nabla=\left(\vec{a}_1\circ\vec{e}_x+\vec{a}_2\circ\vec{e}_y+\vec{a}_3\circ\vec{e}_z\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z\right)=$$
$$=\frac{\partial\vec{a}_1}{\partial x}\circ\underbrace{\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x}_{=1}+\frac{\partial\vec{a}_2}{\partial y}\circ\underbrace{\vec{e}_y\cdot\vec{e}_y}_{=1}+\frac{\partial\vec{a}_3}{\partial z}\circ\underbrace{\vec{e}_z\cdot\vec{e}_z}_{=1}=\frac{\partial\vec{a}_1}{\partial x}+\frac{\partial\vec{a}_2}{\partial y}+\frac{\partial\vec{a}_3}{\partial z}.$$

Im Allgemeinen ist die rechtseitige Divergenz des Tensors nicht gleich der linkseitigen Divergenz des Tensors: $\underline{\underline{A}}\cdot\nabla\neq\nabla\cdot\underline{\underline{A}}$.

[3]William Rowan Hamilton (1805 – 1865) irischer Mathematiker, Physiker und Astronom.

Ordnung der Größen:
(Anzahl der Indizes)

Größe		Ordnung	Bezeichnung
skalare Größe		0	(a)
Vektorengröße		1	(a_i)
Tensor	zweiter Ordnung	2	(a_{ij})
Tensor	dritter Ordnung	3	(a_{ijk})

Eigenschaft: Die skalare Multiplikation mit dem *Hamiltonschen* Operator vermindert die Ordnung jeder Größe um eins. Z.B. die Divergenz eines Vektors ist eine skalare Größe und die Divergenz eines Tensors zweiter Ordnung ist ein Vektor.

A.7.2. Rotation (Kreuzprodukt)

a) Rechtsseitige Rotation des Vektors:

$$\vec{a}\times\nabla=\left(a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y+a_z\vec{e}_z\right)\times\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z\right)=$$

$$=\frac{\partial a_y}{\partial x}\underbrace{\vec{e}_y\times\vec{e}_x}_{-\vec{e}_z}+\frac{\partial a_z}{\partial x}\underbrace{\vec{e}_z\times\vec{e}_x}_{\vec{e}_y}+\frac{\partial a_x}{\partial y}\underbrace{\vec{e}_x\times\vec{e}_y}_{\vec{e}_z}+\frac{\partial a_z}{\partial y}\underbrace{\vec{e}_z\times\vec{e}_y}_{-\vec{e}_x}+\frac{\partial a_x}{\partial z}\underbrace{\vec{e}_x\times\vec{e}_z}_{-\vec{e}_y}+\frac{\partial a_y}{\partial z}\underbrace{\vec{e}_y\times\vec{e}_z}_{\vec{e}_x}=$$

$$=\left(\frac{\partial a_y}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial y}\right)\vec{e}_x-\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y+\left(\frac{\partial a_x}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial x}\right)\vec{e}_z.$$

Im Allgemeinen ist die rechtsseitige Rotation des Vektors nicht gleich der linksseitigen Rotation des Vektors:

$$\vec{a}\times\nabla\neq\nabla\times\vec{a}.$$

b) Rechtsseitige Rotation des Tensors:

$$\underline{\underline{A}}\times\nabla=\left(\vec{a}_1\circ\vec{e}_x+\vec{a}_2\circ\vec{e}_y+\vec{a}_3\circ\vec{e}_z\right)\times\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z\right)=$$

$$=\frac{\partial\vec{a}_2}{\partial x}\circ\underbrace{\vec{e}_y\times\vec{e}_x}_{-\vec{e}_z}+\frac{\partial\vec{a}_3}{\partial x}\circ\underbrace{\vec{e}_z\times\vec{e}_x}_{\vec{e}_y}+\frac{\partial\vec{a}_1}{\partial y}\circ\underbrace{\vec{e}_x\times\vec{e}_y}_{\vec{e}_z}+\frac{\partial\vec{a}_3}{\partial y}\circ\underbrace{\vec{e}_z\times\vec{e}_y}_{-\vec{e}_x}+\frac{\partial\vec{a}_1}{\partial z}\circ\underbrace{\vec{e}_x\times\vec{e}_z}_{-\vec{e}_y}+\frac{\partial\vec{a}_2}{\partial z}\circ\underbrace{\vec{e}_y\times\vec{e}_z}_{\vec{e}_x}=$$

$$=\left(\frac{\partial\vec{a}_2}{\partial z}-\frac{\partial\vec{a}_3}{\partial y}\right)\circ\vec{e}_x+\left(\frac{\partial\vec{a}_3}{\partial x}-\frac{\partial\vec{a}_1}{\partial z}\right)\circ\vec{e}_y+\left(\frac{\partial\vec{a}_1}{\partial y}-\frac{\partial\vec{a}_2}{\partial x}\right)\circ\vec{e}_z.$$

Im Allgemeinen ist die rechtsseitige Rotation des Tensors nicht gleich der linksseitigen Rotation des Tensors:

$$\underline{\underline{A}}\times\nabla\neq\nabla\times\underline{\underline{A}}.$$

Eigenschaft: Die vektorielle Multiplikation mit dem *Hamiltonschen* Operator ändert die Ordnung jeder Größe nicht. Z.B. die Rotation eines Vektors ist ein Vektor und die Rotation eines Tensors zweiter Ordnung ist ein Tensor zweiter Ordnung.

A.7.3. Gradient (dyadische Multiplikation)

a) Gradient einer skalaren Größe: $a\nabla=\nabla a=\dfrac{\partial a}{\partial x}\vec{e}_x+\dfrac{\partial a}{\partial y}\vec{e}_y+\dfrac{\partial a}{\partial z}\vec{e}_z$.

b) Rechtsseitiger Gradient eines Vektors:

$$\vec{a}\circ\nabla=\left(a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y+a_z\vec{e}_z\right)\circ\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z\right)=$$

$$= \frac{\partial a_x}{\partial x}\vec{e}_x \circ \vec{e}_x + \frac{\partial a_y}{\partial x}\vec{e}_y \circ \vec{e}_x + \frac{\partial a_z}{\partial x}\vec{e}_z \circ \vec{e}_x + \frac{\partial a_x}{\partial y}\vec{e}_x \circ \vec{e}_y + \frac{\partial a_y}{\partial y}\vec{e}_y \circ \vec{e}_y + \frac{\partial a_z}{\partial y}\vec{e}_z \circ \vec{e}_y +$$

$$+ \frac{\partial a_x}{\partial z}\vec{e}_x \circ \vec{e}_z + \frac{\partial a_y}{\partial z}\vec{e}_y \circ \vec{e}_z + \frac{\partial a_z}{\partial z}\vec{e}_z \circ \vec{e}_z .$$

Der rechtsseitige Gradient des Vektors ist gleich der Transponierten des linksseitigen Gradienten des Vektors:

$$\vec{a} \circ \nabla \neq \nabla \circ \vec{a}, \qquad \vec{a} \circ \nabla = \left(\nabla \circ \vec{a}\right)^T .$$

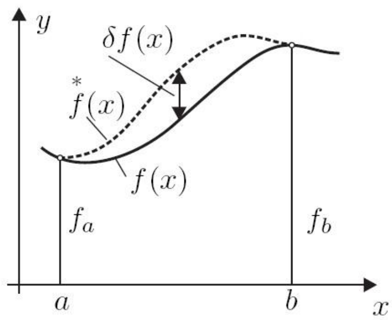
Die Matrix des Gradienten-Tensors: $[\vec{a} \circ \nabla] = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_x}{\partial x} & \frac{\partial a_x}{\partial y} & \frac{\partial a_x}{\partial z} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} & \frac{\partial a_y}{\partial y} & \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \frac{\partial a_z}{\partial x} & \frac{\partial a_z}{\partial y} & \frac{\partial a_z}{\partial z} \end{bmatrix}.$

Eigenschaft: Die dyadische Multiplikation mit dem *Hamiltonschen* Operator vergrößert die Ordnung jeder Größe um eins. Z.B. der Gradient einer skalaren Größe ist ein Vektor und der Gradient eines Vektors ist ein Tensor zweiter Ordnung.

A.8. Grundgedanke der Variationsrechnung

$\delta f(x)$ ist die Variation der Funktion $f(x)$. $\Rightarrow$ $\delta f(x)$ ist eine Änderung der Funktion $f(x)$. Bedeutung der Variation: Änderung, Abweichung, Unterschied.

Man nimmt an, dass es keine Änderung an den Stellen $x=a$ und $x=b$ gibt: $\delta f(x)\big|_{x=a} = \delta f(x)\big|_{x=b} = 0.$



Das Funktional: eine Abbildung / Zuordnung, wobei

– der Deutungsbereich von $J[f]$ die Menge der Funktionen $f(x)$ ist,

– der Wertevorrat von $J[f]$ eine Menge von realen Zahlen ist.

Bezeichnung des Funktionals: $J[f]$.

Allgemeine Form des Funktionals: $J[f] = \int\limits_{x=a}^{b} F\left(x, f, f'\right)\mathrm{d}x$,

wobei $F(x, f, f')$ ein gegebener (bekannter) Ausdruck ist.

Variation des Funktionals:

- Statt der Funktion $f(x)$ setzen wir in das Funktional $J[f]$ die Funktion $f(x)+\alpha\delta f(x)$ ein, wobei α ein realer Parameter ist.
- So erhält man für die unterschiedlichen Werte von α unterschiedliche Funktionen im Funktional $J[f]$.
- Entwickeln wir das Funktional $J[f(x)+\alpha\delta f(x)]$ an der Stelle $f(x)$ in eine *Taylorsche* Reihe so, als ob

die Funktion $f(x)$ eine Veränderliche wäre und $\alpha\,\delta f\left(x\right)$ eine kleine Änderung der Funktion $f(x)$ ist, wobei $\delta f\left(x\right)$ ein konstanter Wert ist.

$$J\left[f+\alpha\,\delta f\right]=J\left[f+\alpha\,\delta f\right]\Big|_{\alpha=0}+\frac{d}{d\alpha}J\left[f+\alpha\,\delta f\right]\Big|_{\alpha=0}\alpha+\frac{d^2}{d\alpha^2}J\left[f+\alpha\,\delta f\right]\Big|_{\alpha=0}\alpha^2+\ \cdots\ ,$$

Die Ableitungen in der Reihenentwicklung nennt man *Gâteaux*[4]*sche* (gato) oder Richtungsableitungen *n*-ter Ordnung.

Bezeichnung: $D^n J\left[f,\delta f\right]=\dfrac{d^n}{d\alpha^n}J\left[f+\alpha\,\delta f\right]\Big|_{\alpha=0}$.

Die erste Variation des Funktionales δf ist nach *Gâteaux* die erste Ableitung des Funktionals $J[f]$:

$$DJ[f,\delta f]=\frac{d}{d\alpha}J[f+\alpha\,\delta f]\Big|_{\alpha=0}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{J[f+\alpha\,\delta f]-J[f]}{\alpha}.$$

Die Definition der zweiten Variation des Funktionals $J[f]$ nach *Gâteaux*:

$$D^2 J[f,\delta f]=\frac{d^2}{d\alpha^2}J[f+\alpha\,\delta f]\Big|_{\alpha=0}.$$

Zielstellung: Suche / Finden des Extremwertes des Funktionals.

Die Randbedingungen: $\left.\begin{array}{l} f(x=a)=f_a \\ f(x=b)=f_b \end{array}\right\}$ sind bekannt.

Aufgabe: Ermittlung / Suche der Funktion $f_0(x)$ aus der Funktionenmenge $f(x)$, die für das Funktional $J\left[f\right]$ einen Extremwert liefert.

Extremwertbedingung für Funktionale:

$$\delta J=0 \ \text{ und } \begin{cases}\text{im Falle des Minimums } \ \delta^2 J>0,\\ \text{im Falle des Maximums } \ \delta^2 J<0.\end{cases}$$

Die Variation (Variationsoperation) bildet man ähnlich wie eine Ableitung, aber

– Die Variation ist keine Ableitung nach dem Ort, sondern eine Ableitung nach unterschiedlichen Parametern,

– Bei der Variation (Änderung) muss man die Randbedingungen immer befriedigen.

Z.B. im Fall des Verschiebungsfeldes:

– die Ableitung: $\mathrm{d}u=\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\dfrac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z$,

– die Variation: $\delta u=\dfrac{\partial u}{\partial c_1}\delta c_1+\dfrac{\partial u}{\partial c_2}\delta c_2+\ \ldots\ +\dfrac{\partial u}{\partial c_n}\delta c_n$.

Z.B.: im Fall einer Funktion $f(x)$:

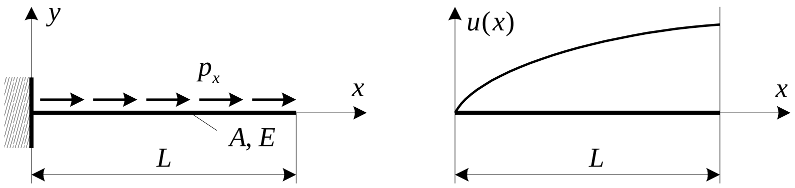
– die Ableitung: $\mathrm{d}f=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$,

– die Variation: $\delta f=\dfrac{\partial f}{\partial c_1}\delta c_1+\dfrac{\partial f}{\partial c_2}\delta c_2+\ \ldots\ +\dfrac{\partial f}{\partial c_n}\delta c_n$.

[4]René Gâteaux (1889-1914) französischer Mathematiker

Beispiel zur Darstellung der ersten und zweiten Variation eines Funktionals:

<u>Gegeben:</u> ein eingespannter Zug-Stab (siehe Bild) mit der Länge L, dem Querschnitt A und der Linienlast $p_x =$ konstant. E ist der Elastizitätsmodul des Stabmaterials.



<u>Aufgabe:</u> Darstellung der ersten und zweiten Variationen der gesamten potentiellen Energie Π (berücksichtigt als ein Funktional $\Pi[u]$).

Die gesamte potentielle Energie des Stabes mit einer Linienzugkraft: $\Pi[u] = \frac{1}{2}\int\limits_{x=0}^{L} AE(u')^2\,dx - \int\limits_{x=0}^{L} p_x u\,dx.$

Die Funktion $u(x)$ ist die Verschiebung der Punkte der Mittellinie des Stabes in axialer x-Richtung.

Die erste Variation der gesamten potentiellen Energie:

$$\delta\Pi[u,\delta u] = \frac{d}{d\alpha}\Pi[u,\alpha\,\delta u]\bigg|_{\alpha=0} = \frac{d}{d\alpha}\left\{\frac{1}{2}\int\limits_{x=0}^{L} AE(u'+\alpha\,\delta u')^2\,dx - \int\limits_{x=0}^{L} p_x(u+\alpha\,\delta u)dx\right\}\bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \left\{\int\limits_{x=0}^{L} AE(u'+\alpha\,\delta u')\,\delta u'\,dx - \int\limits_{x=0}^{L} p_x\,\delta u dx\right\}\bigg|_{\alpha=0} = \int\limits_{x=0}^{L} AEu'\delta u' dx - \int\limits_{x=0}^{L} p_x\,\delta u dx\,.$$

Die zweite Variation der gesamten potentiellen Energie:

$$\delta^2\Pi[u,\delta u] = \frac{d^2}{d\alpha^2}\Pi[u,\alpha\,\delta u]\bigg|_{\alpha=0} = \frac{d^2}{d\alpha^2}\left\{\frac{1}{2}\int\limits_{x=0}^{L} AE(u'+\alpha\,\delta u')^2\,dx - \int\limits_{x=0}^{L} p_x(u+\alpha\,\delta u)dx\right\}\bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \left\{\int\limits_{x=0}^{L} AE\,(\delta u')^2\,dx\right\}\bigg|_{\alpha=0} = \int\limits_{x=0}^{L} AE\,(\delta u')^2\,dx\,.$$

FACHLITERATUR

[1] Bathe K. – J.: *Finite element procedures,* Prentice Hall, Inc. 1996.

[2] Szabó B., Babuška I.: *Finite element analysis*, John Wiley & Sons, Inc. 1991.

[3] Altenbach J., Fischer U.: *Finite-element Praxis*, Fachbuchverlag Leipzig, 1991.

[4] Matthews F. L., Davies G. A. O., Hitchings D., Soutis C.: *Finite Element modelling of composite materials and structures*, Woodhead Ltd., 2000.

[5] Budynas R. G.: *Advanced Strength and Applied Stress Analysis*, Mc. Graw-Hill, 1999.

[6] Kleiber M.: *Handbook of Computational Solid Mechanics*, Springer Verlag, 1998.

[7] Krätzig W. B., Basar Y.: *Tragwerke 3, Theorie und Anwendung der Methode der Finiten Elemente*, Springer Verlag, 1997.

[8] Papastavridis J. G.: *Tensor calculus and analytical dynamics*, CRC Press, 1999.

[9] Reddy J. N. : *Mechanics of laminated composite plates and shells* – Theory and Analysis, CRC Press, 2004.

[10] Barbero E.J.: *Finite Element Analysis of Composite Materials*, CRC Press, 2008.

[11] Berlioz A., Trompette Ph.: *Solid Mechanics using the Finite Element Method*, John Wiley & Sons Inc., 2010.

[12] Smith I. M., Griffiths D. V.: *Programming the Finite Element Method*, John Wiley & Sons Inc., 2004.

[13] Zienkiewicz O. C., Taylor R.L.: The *Finite Element Method, Vol. 1.: The Basis,* Butterworth – Heinemann, 2000.

[14] Zienkiewicz O. C., Taylor R.L.: *The Finite Element Method, Vol. 2.: Solid Mechanics*, Butterworth – Heinemann, 2000.