

3. Das Verschiebungsverfahren der Finiten Elemente Methode (FEM)

Der Grundgedanke der FEM

- Die unbekanntes Felder werden an Teilbereichen des Körpers angenähert.
- Die Näherungsfunktionen der Felder werden für den Gesamtkörper gekoppelt.
- Die Lösung der gestellten Aufgabe erfolgt mit Hilfe eines Energieprinzips:
 - mit dem Prinzip von *Lagrange* ($\delta\Pi = 0$),
 - mit dem Prinzip von *Castigliano* ($\delta K = 0$),
 - mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit.

3.1. Der Aufbau der Verschiebungsmethode

Der Gedankengang des Aufbaus:

- Das Bauteil / Der Körper wird in eine finite (endliche) Anzahl an Teilbereichen mit theoretisch beliebiger Form zerlegt. Die Teilbereiche heißen finite Elemente.
- Die Verschiebungsfelder werden gesondert für die einzelnen Elemente / Teilbereiche angenähert. Die Vorgehensweise heißt lokale Näherung / Approximation.
- Die Näherungsfunktionen, die sogenannten Ansatzfunktionen sind im Allgemeinen Polynome.
- An den Elementen / an den Elementrändern werden ausgewählte Punkte, sogenannte Knotenpunkte aufgenommen.
- Die Ansatzfunktionen werden mit den bestimmten Parametern / mit den Verschiebungswerten der Knotenpunkte gekoppelt.
- Mittels Anwendung des *Lagrangeschen* Variationsprinzips erhält man ein lineares algebraisches Gleichungssystem für die Parameter / für die Verschiebungen der Knotenpunkte.
- Aus dem algebraischen Gleichungssystem werden die Knotenpunktverschiebungen bestimmt.
- In der Kenntnis der Knotenpunktverschiebungen kann man die gesuchten unbekanntes Felder (wie Verschiebungen, Verzerrungen, Spannungen, usw.) in allen angegebenen Punkten / Stellen berechnen.

3.1.1. Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \bar{u}(\bar{r}) &\rightarrow \bar{u}(x, y, z) \rightarrow \bar{u}(X), \\ \underline{\underline{B}}(\bar{r}) &\rightarrow \underline{\underline{B}}(x, y, z) \rightarrow \underline{\underline{B}}(X). \end{aligned}$$

Der Spaltenvektor des Verschiebungsfeldes: $\underline{\underline{u}}(X) = \underbrace{\begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix}}_{(3 \times 1)}$.

Der Spaltenvektor des Verzerrungs – und Spannungsfeldes:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(X) = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_x(x, y, z) \\ \varepsilon_y(x, y, z) \\ \varepsilon_z(x, y, z) \\ \gamma_x(x, y, z) \\ \gamma_y(x, y, z) \\ \gamma_z(x, y, z) \end{bmatrix}}_{(6 \times 1)}, \quad \underline{\underline{\sigma}}(X) = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_x(x, y, z) \\ \sigma_y(x, y, z) \\ \sigma_z(x, y, z) \\ \tau_{xy}(x, y, z) \\ \tau_{yz}(x, y, z) \\ \tau_{xz}(x, y, z) \end{bmatrix}}_{(6 \times 1)}.$$

Die Koordinaten / Elemente des Verzerrungs – und Spannungstensors werden im Weiteren immer in Spaltenvektoren geordnet.

3.1.2. Die Formulierung der elastischen Randwertaufgabe

Gegeben sind:

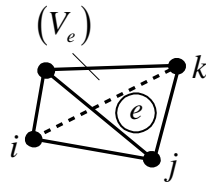
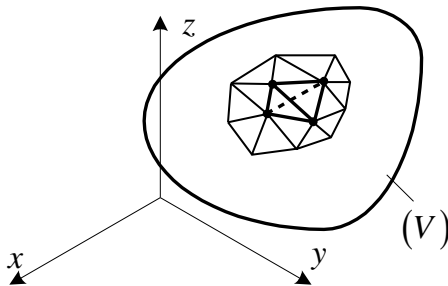
- die Form und Geometrie des Bauteiles,
- die Belastungen: $\vec{q}(x)$ an (V) und $\vec{p}_0(x)$ an (A_p) .
- die Unterstützung: $\vec{u}_0(x)$ an (A_u) .

Gesucht sind:

- das Verschiebungsfeld $\underline{u}(X)$,
- das Verzerrungsfeld $\underline{\varepsilon}(X)$,
- das Spannungsfeld $\underline{\sigma}(X)$.

3.1.3. Die Näherungslösung für die gestellte Aufgabe

Der Bauteil wird in eine finite Anzahl an Teilgebieten, in sogenannte finite Elemente zerlegt.



Ein Element, z.B. ein Tetraeder.

An den Elementen werden Knotenpunkte i, j, k , usw. definiert.

Das Verschiebungsfeld wird für die einzelnen Elemente gesondert angenähert /approximiert:

$$\underline{u}^e(X) = \underline{A}^e(X) \underline{q}^e, \text{ wobei}$$

(3×1) $(3 \times n)$ $(n \times 1)$

$\underline{u}^e(X)$ - das Verschiebungsfeld des Elementes ist.

$\underline{A}^e(X)$ - die Approximationsmatrix des Elementes,

$\left(\underline{q}^e\right)^T = \left[\begin{matrix} \underline{q}_i^T & \underline{q}_j^T & \underline{q}_k^T & \dots & \underline{q}_N^T \end{matrix} \right]^e$ - die Matrix / der Vektor der Knotenpunktverschiebungen.

N - die Anzahl der Knotenpunkte des Elementes e .

Der Verschiebungsvektor des Knotenpunktes i am Element e im 3D Fall: $\underline{q}_i^e = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix}^e$.

Zerlegung der Approximationsmatrix:

$$\underline{\underline{A}}^e(X) \underline{\underline{q}}^e = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}_i^e(X) & \underline{\underline{A}}_j^e(X) & \underline{\underline{A}}_k^e(X) & \dots & \underline{\underline{A}}_N^e(X) \\ (3 \times 3) & (3 \times 3) & (3 \times 3) & & (3 \times 3) \end{bmatrix}}_{(3 \times 3N)} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\underline{q}}_i^e \\ \underline{\underline{q}}_j^e \\ \vdots \\ \underline{\underline{q}}_N^e \end{bmatrix} \quad (3N \times 1)$$

Zu jedem Knotenpunktverschiebungsvektor i gehört ein Matrixblock $\underline{\underline{A}}_i^e(X)$ der Approximationsmatrix:

$$\underline{\underline{A}}_i^e(X) = \begin{bmatrix} A_{xx}(X) & A_{xy}(X) & A_{xz}(X) \\ A_{yx}(X) & A_{yy}(X) & A_{yz}(X) \\ A_{zx}(X) & A_{zy}(X) & A_{zz}(X) \end{bmatrix}_i^e$$

Der kinematische Inhalt einer Koordinate / eines Elementes der Approximationsmatrix:

Z.B.: $A_{xzi}^e(X)$ - das Verschiebungsfeld im Element e in Richtung x infolge einer Einheitsverschiebung in Richtung z im Knotenpunkt i .

Die Anforderungen für die Approximationsmatrix:

- Das Verschiebungsfeld $\underline{\underline{u}}^e(X)$ muss kinematisch möglich sein $\Rightarrow \underline{\underline{A}}^e(X)$ muss differenzierbar sein.
- Die Blöcke der Approximationsmatrix müssen die folgenden Zusammenhänge erfüllen:

$$\underline{\underline{A}}_i^e(X_i) = \underline{\underline{E}},$$

$$\underline{\underline{A}}_i^e(X_j) = \underline{\underline{A}}_i^e(X_k) = \dots = \underline{\underline{A}}_i^e(X_N) = \underline{\underline{0}}.$$

Die Näherung des Verzerrungsfeldes am Element e :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e(X) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^e \underbrace{\begin{bmatrix} u^e(X) \\ v^e(X) \\ w^e(X) \end{bmatrix}}_{(3 \times 1)}$$

In kompakter Form geschrieben: $\underline{\underline{\varepsilon}}^e(X) = \underline{\underline{D}}_e^e \cdot \underline{\underline{u}}^e(X)$, wobei

$\underline{\underline{D}}_e^e$ - die Matrix der Differentialoperationen für das Element e ist.

Die Näherung für das Spannungsfeld am Element e :

$$\underbrace{\underline{\underline{\sigma}}^e(X)}_{(6 \times 1)} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}^e = \underbrace{\underline{\underline{C}}^e(X)}_{(6 \times 6)} \underbrace{[\underline{\underline{\varepsilon}}^e(X) - \underline{\underline{\varepsilon}}_T^e(X)]}_{(6 \times 1)}.$$

$\underline{\underline{C}}^e(X)$ - die Matrix der Materialkennwerte (im Allgemeinen hängt sie vom Ort ab)

$\underline{\underline{\varepsilon}}_T^e(X)$ - die Verzerrungen infolge der Wärmedehnung

Für linear elastisches, isotropes Material:

$$\underline{\underline{C}}^e = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_2 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix},$$

$$c_1 = E \frac{1-\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad c_2 = E \frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad c_3 = E \frac{1}{2(1+\nu)} = G.$$

Für linear elastisches, orthotropes Material:

$$\underline{\underline{C}}^e(X) = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} & \frac{\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}}{E_2 E_3 \Delta} & \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}}{E_2 E_3 \Delta} & \frac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} & \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} & \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} & \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{13} \end{bmatrix}^e,$$

wobei $\Delta = \frac{1}{E_1 E_2 E_3} (1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{21}\nu_{32}\nu_{13})$.

Die Inverse der Matrix der Materialkennwerte kann in einfacherer Form aufgeschrieben werden:

$$[\underline{\underline{C}}^e(X)]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & -\frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} \end{bmatrix}^e$$

Die Matrix und die Inverse der Materialkennwerte müssen symmetrisch sein:

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}.$$

Die Richtungen $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sind die Material-Hauptrichtungen

Zur Anwendung des Materialgesetzes müssen die Spannungen und Verzerrungen in das 1,2,3 Koordinatensystem transformiert werden:

$$\underline{\underline{\sigma}}_{xyz}^e \Rightarrow \underline{\underline{\sigma}}_{123}^e \quad \underline{\underline{\varepsilon}}_{xyz}^e \Rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}}_{123}^e$$

Transformation der Spannungen:

Richtungseinheitsvektoren der Material-Hauptrichtungen:

$$\underline{\underline{e}}_1 = \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \\ e_{1z} \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{e}}_2 = \begin{bmatrix} e_{2x} \\ e_{2y} \\ e_{2z} \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{e}}_3 = \begin{bmatrix} e_{3x} \\ e_{3y} \\ e_{3z} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\rho}}_{\underline{\underline{1}}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{e}}_{\underline{\underline{1}}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \\ e_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x e_{1x} + \tau_{xy} e_{1y} + \tau_{xz} e_{1z} \\ \tau_{yx} e_{1x} + \sigma_y e_{1y} + \tau_{yz} e_{1z} \\ \tau_{zx} e_{1x} + \tau_{zy} e_{1y} + \sigma_z e_{1z} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \underline{\underline{\rho}}_{\underline{\underline{1}}}^T \underline{\underline{e}}_{\underline{\underline{1}}} &= \sigma_x e_{1x}^2 + \tau_{xy} e_{1x} e_{1y} + \tau_{xz} e_{1x} e_{1z} + \tau_{yx} e_{1x} e_{1y} + \sigma_y e_{1y}^2 + \tau_{yz} e_{1y} e_{1z} + \\ &+ \tau_{zx} e_{1x} e_{1z} + \tau_{yz} e_{1y} e_{1z} + \sigma_z e_{1z}^2 = \sigma_x e_{1x}^2 + \sigma_y e_{1y}^2 + \sigma_z e_{1z}^2 + \\ &+ 2\tau_{xy} e_{1x} e_{1y} + 2\tau_{yz} e_{1y} e_{1z} + 2\tau_{xz} e_{1x} e_{1z}, \end{aligned}$$

$$\sigma_2 = \underline{\underline{e}}_{\underline{\underline{2}}}^T \underline{\underline{F}} \underline{\underline{e}}_{\underline{\underline{2}}} = \sigma_x e_{2x}^2 + \sigma_y e_{2y}^2 + \sigma_z e_{2z}^2 + 2\tau_{xy} e_{2x} e_{2y} + 2\tau_{yz} e_{2y} e_{2z} + 2\tau_{xz} e_{2x} e_{2z},$$

$$\sigma_3 = \underline{\underline{e}}_{\underline{\underline{3}}}^T \underline{\underline{F}} \underline{\underline{e}}_{\underline{\underline{3}}} = \sigma_x e_{3x}^2 + \sigma_y e_{3y}^2 + \sigma_z e_{3z}^2 + 2\tau_{xy} e_{3x} e_{3y} + 2\tau_{yz} e_{3y} e_{3z} + 2\tau_{xz} e_{3x} e_{3z},$$

$$\begin{aligned} \tau_{21} = \underline{\underline{e}}_{\underline{\underline{2}}}^T \underline{\underline{F}} \underline{\underline{e}}_{\underline{\underline{1}}} &= \sigma_x e_{1x} e_{2x} + \tau_{xy} e_{2x} e_{1y} + \tau_{xz} e_{2x} e_{1z} + \tau_{yx} e_{1x} e_{2y} + \sigma_y e_{1y} e_{2y} + \tau_{yz} e_{1z} e_{2y} + \\ &+ \tau_{zx} e_{1x} e_{2z} + \tau_{zy} e_{1y} e_{2z} + \sigma_z e_{1z} e_{2z} = \sigma_x e_{1x} e_{2x} + \sigma_y e_{1y} e_{2y} + \sigma_z e_{1z} e_{2z} + \\ &+ \tau_{xy} (e_{2x} e_{1y} + e_{1x} e_{2y}) + \tau_{yz} (e_{1z} e_{2y} + e_{1y} e_{2z}) + \tau_{xz} (e_{2x} e_{1z} + e_{1x} e_{2z}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{31} = \underline{\underline{e}}_3^T \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{e}}_1 = & \sigma_x e_{1x} e_{3x} + \tau_{xy} e_{3x} e_{1y} + \tau_{xz} e_{3x} e_{1z} + \tau_{yx} e_{1x} e_{3y} + \sigma_y e_{1y} e_{3y} + \tau_{yz} e_{1z} e_{3y} + \\ & + \tau_{zx} e_{1x} e_{3z} + \tau_{zy} e_{1y} e_{3z} + \sigma_z e_{1z} e_{3z} = \sigma_x e_{1x} e_{3x} + \sigma_y e_{1y} e_{3y} + \sigma_z e_{1z} e_{3z} + \\ & + \tau_{xy} (e_{3x} e_{1y} + e_{1x} e_{3y}) + \tau_{yz} (e_{1z} e_{3y} + e_{1y} e_{3z}) + \tau_{xz} (e_{3x} e_{1z} + e_{1x} e_{3z}). \end{aligned}$$

Die Transformationsbeziehungen in Matrizenform:

$$\underline{\underline{\sigma}}_{xyz} = \underline{\underline{T}}_{\sigma} \underline{\underline{\sigma}}_{xyz}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}}_{xyz} = \underline{\underline{T}}_{\varepsilon} \underline{\underline{\varepsilon}}_{xyz}.$$

Detailliert geschrieben:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{1x}^2 & e_{1y}^2 & e_{1z}^2 & 2e_{1x}e_{1y} & 2e_{1y}e_{1z} & 2e_{1x}e_{2z} \\ e_{2x}^2 & e_{2y}^2 & e_{2z}^2 & 2e_{2x}e_{2y} & 2e_{2z}e_{2y} & 2e_{2x}e_{2z} \\ e_{3x}^2 & e_{3y}^2 & e_{3z}^2 & 2e_{3x}e_{3y} & 2e_{3y}e_{3z} & 2e_{3x}e_{3z} \\ e_{1x}e_{2x} & e_{1y}e_{2y} & e_{1z}e_{2z} & (e_{2x}e_{1y} + e_{1x}e_{2y}) & (e_{1z}e_{2y} + e_{1y}e_{2z}) & (e_{2x}e_{1z} + e_{1x}e_{2z}) \\ e_{2x}e_{3x} & e_{2y}e_{3y} & e_{2z}e_{3z} & (e_{3x}e_{2y} + e_{2x}e_{3y}) & (e_{2z}e_{3y} + e_{2y}e_{3z}) & (e_{3x}e_{2z} + e_{2x}e_{3z}) \\ e_{1x} & e_{1y}e_{3y} & e_{1z}e_{3z} & (e_{3x}e_{1y} + e_{1x}e_{3y}) & (e_{1z}e_{3y} + e_{1y}e_{3z}) & (e_{3x}e_{1z} + e_{1x}e_{3z}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}$$

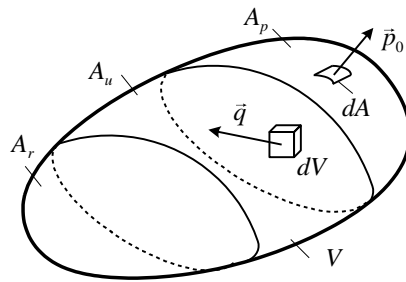
Verzerrungen infolge der Wärmedehnung: $\underline{\underline{\varepsilon}}_{T(X)}^e = \underline{\underline{\alpha}}^e \Delta T(X).$

$\Delta T^e(X)$ - das bekannte Temperaturfeld am Element e .

Der Spaltenvektor der Wärmedehnungskoeffizienten: $\underline{\underline{\alpha}}^e = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

Im isotropen Fall gilt für die Wärmedehnungskoeffizienten: $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z$

Die Berücksichtigung der elastischen Lagerung:

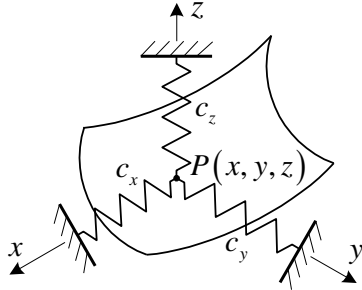


- auf der Oberfläche A_p ist die Flächenbelastung \vec{p}_0 bekannt,
- auf der Oberfläche A_u ist die Verschiebung \vec{u}_0 bekannt,
- auf der Oberfläche A_r modelliert man den Einfluß anderer elastischer Körper /Bauteile mit einer elastischen Lagerung.

Es wird angenommen, dass auf der Oberfläche A_r eine Flächenlast \vec{p}_r auftritt, die proportional zur Verschiebung der Punkte auf der Oberfläche ist:

$$\underbrace{\underline{\underline{p}}^e(X)}_{(3 \times 1)} = - \underbrace{\underline{\underline{R}}^e(X)}_{(3 \times 3)} \underbrace{\underline{\underline{u}}^e(X)}_{(3 \times 1)}.$$

Matrix der elastischen Bettung / der Federkoeffizienten: $\underline{\underline{R}}^e(X) = \begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & c_z \end{bmatrix}.$



c_x, c_y, c_z - Federkoeffizienten in den Richtungen x, y und z .

Die gesamte potentielle Energie des Elementes e :

$$\Pi^e = \frac{1}{2} \int_{(V^e)} (\underline{\underline{\varepsilon}}^e)^T \underline{\underline{\sigma}}^e dV - \int_{(V^e)} (\underline{\underline{u}}^e)^T \underline{\underline{q}}^e dV - \int_{(A_p^e)} (\underline{\underline{u}}^e)^T \underline{\underline{p}}^e dA - \frac{1}{2} \int_{(A_r^e)} (\underline{\underline{u}}^e)^T \underline{\underline{p}}^e dA.$$

Die Bedeutung der einzelnen Glieder:

- $\frac{1}{2} \int_{(V^e)} (\underline{\underline{\varepsilon}}^e)^T \underline{\underline{\sigma}}^e dV$ die Formänderungsenergie,
- $\int_{(V^e)} (\underline{\underline{u}}^e)^T \underline{\underline{q}}^e dV$ die Arbeit der Volumenkräfte,
- $\int_{(A_p^e)} (\underline{\underline{u}}^e)^T \underline{\underline{p}}^e dA$ die Arbeit der Flächenkräfte,
- $\frac{1}{2} \int_{(A_r^e)} (\underline{\underline{u}}^e)^T \underline{\underline{p}}^e dA$ die Arbeit an der elastischen Lagerung / Bettung.

V^e - das Volumen des Elementes e ,

A_p^e - der Oberflächenanteil des Elementes e , auf den die Flächenbelastung wirkt,

A_r^e - der Oberflächenanteil des Elementes e mit elastischer Bettung.

Die gesamte potentielle Energie in Abhängigkeit von den Knotenpunktverschiebungen / Knotenpunktparametern:

$$\begin{aligned} \Pi^e = & \frac{1}{2} (\underline{\underline{q}}^e)^T \int_{(V^e)} \left[[\underline{\underline{B}}^e(X)]^T \underline{\underline{C}}^e(X) \underline{\underline{B}}^e(X) \right] dV \underline{\underline{q}}^e - \\ & - \frac{1}{2} (\underline{\underline{q}}^e)^T \int_{(V^e)} \left[[\underline{\underline{B}}^e(X)]^T \underline{\underline{C}}^e(X) \underline{\underline{\varepsilon}}_T^e(X) \right] dV - \\ & - (\underline{\underline{q}}^e)^T \int_{(V^e)} \left[\underline{\underline{A}}^e(X) \right]^T \underline{\underline{q}}^e(X) dV - (\underline{\underline{q}}^e)^T \int_{(A_p^e)} \left[\underline{\underline{A}}^e(X) \right]^T \underline{\underline{p}}_0^e(X) dA + \\ & + \frac{1}{2} (\underline{\underline{q}}^e)^T \int_{(A_r^e)} \left[\underline{\underline{A}}^e(X) \underline{\underline{R}}^e(X) \underline{\underline{A}}^e(X) \right] dA \underline{\underline{q}}^e. \end{aligned}$$

Bezeichnungen:

Die Steifigkeitsmatrix des Elementes e :
$$\underline{\underline{K}}^e = \int_{(V^e)} \underbrace{\left[\underline{\underline{B}}^e(X) \right]^T}_{(n \times 6)} \underbrace{\underline{\underline{C}}^e(X)}_{(6 \times 6)} \underbrace{\underline{\underline{B}}^e(X)}_{(6 \times n)} dV$$

Die Steifigkeitsmatrix ist symmetrisch.

n ist der Freiheitsgrad des Elementes e (die Anzahl der Knotenpunktparameter / der Knotenpunktverschiebungs koordinaten des Elementes e).

Die Zerlegung der Steifigkeitsmatrix in Blöcken:

Der Block ist ein bestimmter Teil der Matrix.

$$\begin{pmatrix} \underline{q}^e \\ \underline{q}^e \\ \underline{q}^e \\ \dots \\ \underline{q}^e \end{pmatrix}^T \underline{\underline{K}}^e \underline{q}^e = \begin{bmatrix} \left(\underline{q}^e \right)^T & & & & \\ & \left(\underline{q}^e \right)^T & & & \\ & & \left(\underline{q}^e \right)^T & & \\ & & & \dots & \\ & & & & \left(\underline{q}^e \right)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{K}_{ii}^e & \underline{K}_{ij}^e & \underline{K}_{ik}^e & \dots & \underline{K}_{iN}^e \\ \underline{K}_{ji}^e & \underline{K}_{jj}^e & \underline{K}_{jk}^e & \dots & \underline{K}_{jN}^e \\ \underline{K}_{ki}^e & \underline{K}_{kj}^e & \underline{K}_{kk}^e & \dots & \underline{K}_{kN}^e \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \underline{K}_{Ni}^e & \underline{K}_{Nj}^e & \underline{K}_{Nk}^e & \dots & \underline{K}_{NN}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{q}_i^e \\ \underline{q}_j^e \\ \underline{q}_k^e \\ \cdot \\ \underline{q}_N^e \end{bmatrix}$$

N ist die Anzahl der Knotenpunkte des Elementes.

Ein beliebiger (3x3) Block der Steifigkeitsmatrix:
$$\underline{\underline{K}}_{ij}^e = \begin{bmatrix} \underline{K}_{xx}^e & \underline{K}_{xy}^e & \underline{K}_{xz}^e \\ \underline{K}_{yx}^e & \underline{K}_{yy}^e & \underline{K}_{yz}^e \\ \underline{K}_{zx}^e & \underline{K}_{zy}^e & \underline{K}_{zz}^e \end{bmatrix}_{ij}$$

Der physikalische Inhalt der Elemente der Steifigkeitsmatrix:

Z.B.: \underline{K}_{xzi} bedeutet die Kraft in x -Richtung im Knotenpunkt i , die aus der Einheitsverschiebung in z -Richtung im Knotenpunkt j des Elementes e stammt.

Die Steifigkeitsmatrix aus der elastischen Bettung des Elementes:

$$\underline{\underline{K}}_{rr}^e = \int_{(A_r^e)} \left[\left[\underline{\underline{A}}^e(X) \right]^T \underline{\underline{R}}^e(X) \underline{\underline{A}}^e(X) \right] dA$$

$\underline{\underline{K}}_{rr}^e$ ist ebenfalls symmetrisch.

In dieser Steifigkeitsmatrix erscheinen Blöcke bei den Knotenpunkten, die an der elastisch gebetteten Oberfläche des Elementes e liegen.

Der Vektor der Knotenlasten besteht aus drei Teilen:

- Knotenlasten aus den Volumenkräften:

$$\underline{f}_{=q}^e = \int_{(V^e)} \underbrace{\left[\underline{\underline{A}}^e(X) \right]^T}_{(n \times 3)} \underbrace{\underline{q}^e(X)}_{(3 \times 1)} dV, \quad \underline{q}^e(X) - \text{bekannte Volumenkraft.}$$

- Knotenlasten aus der Temperaturänderung:

$$\underline{f}_{=T}^e = \int_{(V^e)} \left[\underline{\underline{B}}^e(X) \right]^T \underline{\underline{C}}^e(X) \underline{\underline{\alpha}}^e(X) \Delta T^e(X) dV$$

Bekannte Größen: $\underline{\underline{\alpha}}^e(X)$ Wärmedehnungskoeffizienten,
 $\Delta T^e(X)$ Temperaturfeld,
 $\underline{\underline{C}}^e(X)$ Materialkennwerte.

- Knotenlasten aus den Flächenkräften:

$$f_{=p}^e = \int_{(A_p^e)} [A^e(X)]^T p_{=0}^e(X) dA, \quad p_{=0}^e(X) \text{ - bekannte Flächenkraft.}$$

Der Vektor der Knotenlasten des Elementes: $f_{=}^e = f_{=q}^e + f_{=p}^e + f_{=T}^e$

Der Knotenlastvektor kann ebenfalls in Blöcke zerlegt werden:

$$\begin{pmatrix} q_{=}^e \end{pmatrix}^T f_{=}^e = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} q_{=i}^e \end{pmatrix}^T & \begin{pmatrix} q_{=j}^e \end{pmatrix}^T & \begin{pmatrix} q_{=k}^e \end{pmatrix}^T & \cdots & \begin{pmatrix} q_{=N}^e \end{pmatrix}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{=i}^e \\ f_{=j}^e \\ \vdots \\ f_{=N}^e \end{bmatrix}$$

Ein beliebiger (3x1) Block des Knotenlastvektors: $f_{=j}^e = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}_j$

f_{yj}^e bedeutet die Knotenkraft in y-Richtung in dem Knotenpunkt j , die aus den äußeren Kräften stammt.

Die gesamte potentielle Energie des Elementes:

$$\Pi^e = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q_{=}^e \end{pmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} K_{=}^e & K_{=r}^e \end{bmatrix}}_{(n \times n)} \begin{pmatrix} q_{=}^e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_{=}^e \end{pmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} f_{=q}^e & f_{=p}^e & f_{=T}^e \end{bmatrix}}_{(n \times 1)}$$

Die gesamte potentielle Energie erhält man mittels Addition / Summation: $\Pi = \sum_{e=1}^Q \Pi^e$.

Q - die Anzahl der Elemente / der Teilbereiche.

Anwendung des Prinzips von Lagrange: $\delta \Pi = \delta (\Pi^1 + \Pi^2 + \dots + \Pi^Q) = \delta \left(\sum_{e=1}^Q \Pi^e \right) = 0$.

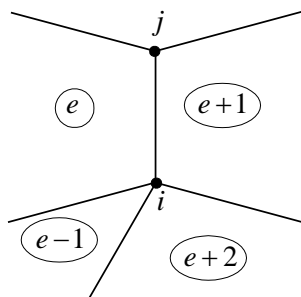
Das Lagrangesche Variationsprinzip ist nur für den ganzen Körper gültig:

$$\delta \Pi = 0, \text{ aber } \delta \Pi^e \neq 0!$$

Bei der Addition der potentiellen Energie muss man berücksichtigen, dass die Verschiebungen der Kopp-lungs-Knotenpunkte gleich sind.

Unter der Berücksichtigung der obigen Aussage / Tatsache erhält man die gesamte potentielle Energie in fol-gender Form:

$$\Pi = \sum_{e=1}^Q \Pi^e = \frac{1}{2} q_{=}^T K q_{=} - q_{=}^T \left(f_{=q} + f_{=p} + f_{=T} \right).$$



$$q_{=i}^{e-1} = q_{=i}^e = q_{=i}^{e+1} = q_{=i}^{e+2}$$

$$q_{=j}^e = q_{=j}^{e+1} = \dots$$

Der Vektor der Knotenverschiebungen für den ganzen Körper / Bauteil:

$$q_{=}^T = \begin{bmatrix} q_{=1}^T & q_{=2}^T & \cdots & q_{=i}^T & \cdots & q_{=M}^T \end{bmatrix},$$

daraus ein beliebiger Vektorblock: $\underline{q}_i^T = [u_i \quad v_i \quad w_i]$.

M ist die Anzahl der Knotenpunkte des Körpers, und $3M$ die Anzahl der Freiheitsgrade des Körpers.

Die Steifigkeitsmatrix des ganzen Körpers:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \sum_{e \in 1,1} K_{11}^e & \sum_{e \in 1,2} K_{12}^e & \cdots & \sum_{e \in 1,j} K_{1j}^e & \cdots & \sum_{e \in 1,M} K_{1M}^e \\ \sum_{e \in 2,1} K_{21}^e & \sum_{e \in 2,2} K_{22}^e & \cdots & \sum_{e \in 2,j} K_{2j}^e & \cdots & \sum_{e \in 2,M} K_{2M}^e \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sum_{e \in i,1} K_{i1}^e & \sum_{e \in i,2} K_{i2}^e & \cdots & \sum_{e \in i,j} K_{ij}^e & \cdots & \sum_{e \in i,M} K_{iM}^e \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sum_{e \in M,1} K_{M1}^e & \sum_{e \in M,2} K_{M2}^e & \cdots & \sum_{e \in M,j} K_{Mj}^e & \cdots & \sum_{e \in M,M} K_{MM}^e \end{bmatrix}.$$

($3M \times 3M$)

Die Bedeutung des Blockes $\sum_{e \in i,j} K_{ij}^e$:

Man muss alle Blöcke K_{ij}^e des Elementes e für alle Elemente, die die Knotenpunkte i und j enthalten, aufsummieren

Der Knotenpunktbelastungsvektor des ganzen Körpers:

$$\underline{f} = \underline{f}_{=q} + \underline{f}_{=p} + \underline{f}_{=T} = \begin{bmatrix} \sum_{e \in 1=q1} f^e \\ \sum_{e \in 2=q2} f^e \\ \vdots \\ \sum_{e \in M=qM} f^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{e \in 1=p1} f^e \\ \sum_{e \in 2=p2} f^e \\ \vdots \\ \sum_{e \in M=pM} f^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{e \in 1=T1} f^e \\ \sum_{e \in 2=T2} f^e \\ \vdots \\ \sum_{e \in M=TM} f^e \end{bmatrix}.$$

Die Bedeutung des Blockes $\sum_{e \in i} f^e$:

Man muss alle Blöcke $f_{=i}^e$ des Elementes e für alle Elemente, die den Knotenpunkt i enthalten, aufsummieren

Die Berücksichtigung der kinematischen Randbedingungen:

Es seien z.B.: $\underline{q}_{=i} = \underline{0}$ und $\underline{q}_{=j} = \underline{0}$.

Die gesamte potentielle Energie des ganzen Körpers:

$$\Pi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \underline{q}_{=1}^T & \cdots & \underline{q}_{=i}^T & \underline{q}_{=j}^T & \cdots & \underline{q}_{=M}^T \\ & & \underline{0} & \underline{0} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1i} & K_{1j} & \cdots & K_{1M} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{i1} & & K_{ii} & K_{ij} & & K_{iM} \\ K_{j1} & & K_{ji} & K_{jj} & & K_{jM} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{M1} & & K_{Mi} & K_{Mj} & & K_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{q}_{=1} \\ \vdots \\ \underline{q}_{=i} = \underline{0} \\ \underline{q}_{=j} = \underline{0} \\ \vdots \\ \underline{q}_{=M} \end{bmatrix}.$$

$$- \begin{bmatrix} \underline{q}_1^T & \cdots & \underline{q}_i^T & \underline{q}_j^T & \cdots & \underline{q}_M^T \\ & & \underline{=0} & \underline{=0} & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{f}_1 \\ \vdots \\ \underline{f}_i \\ \underline{f}_j \\ \vdots \\ \underline{f}_M \end{bmatrix}.$$

Die Konsequenzen:

- Multiplikation von der linken Seite mit \underline{q}_i^T : die Blockzeilen i und j der Steifigkeitsmatrix \underline{K} werden mit Null multipliziert – die Blockreihen i und j werden gestrichen / verschwindet.
- Multiplikation von der linken Seite mit \underline{q}_i^T : die Blockzeile i des Belastungsvektors \underline{f} wird mit Null multipliziert – die Blockzeile i wird gestrichen / verschwinden.
- Multiplikation von der rechten Seite mit \underline{q}_i : die Blockspalten i und j der Steifigkeitsmatrix \underline{K} werden mit Null multipliziert – die Blockspalten i und j werden gestrichen.

Im weiteren werden die Blöcke \underline{q}_i und \underline{q}_j nicht mehr vorkommen.

Die übrigbleibenden Teile werden mit \underline{q} , \underline{K} , \underline{f} bezeichnet. $\tilde{q} - q$ Schlange.

Wenn wir die den Randbedingungen entsprechenden Zeilen und Spalten gestrichen haben, dann lautet das Prinzip von *Lagrange*:

$$\delta \Pi = \delta \left[\frac{1}{2} \tilde{q}^T \underline{K} \tilde{q} - \tilde{q}^T \left(\tilde{f}_{=q} + \tilde{f}_{=p} + \tilde{f}_{=r} \right) \right] = \left(\delta \tilde{q}^T \right) \underline{K} \tilde{q} - \left(\delta \tilde{q}^T \right) \underbrace{\left(\tilde{f}_{=q} + \tilde{f}_{=p} + \tilde{f}_{=r} \right)}_{\underline{f}} = 0.$$

$$\delta \Pi = \left(\delta \tilde{q}^T \right) \left[\underline{K} \tilde{q} - \underline{f} \right] = 0.$$

Alle Koordinaten von $\delta \tilde{q}^T$ sind beliebig, weil der Vektor $\delta \tilde{q}$ die vorgeschriebenen Randbedingungen nicht mehr enthält.

Da der Vektor beliebig ist, muss der Ausdruck in eckigen Klammern verschwinden:

$$\underline{K} \tilde{q} - \underline{f} = \underline{0}.$$

So erhält man für die Knotenverschiebungen ein inhomogenes lineares algebraisches Gleichungssystem:

$$\underline{K} \tilde{q} = \underline{f}.$$

Typische Datenvorbereitungsfehler bei einer FE (Finite Elemente)- Berechnung:

- Die Materialkennwerte werden nicht eingegeben.
- Die kinematischen Randbedingungen werden nicht vorgeschrieben / berücksichtigt.

Bei beiden Fehlern wird die Steifigkeitsmatrix \underline{K} des Systems (Körpers) singulär.

Im singulären Fall gibt es für das lineare Gleichungssystem keine Lösung.

Die Behandlung einer kinematischen Belastung:

Eine *Kinematische Belastung* entsteht, wenn man keine Null-Verschiebungen in bestimmten Knotenpunkten vorschreibt:

Z.B.: $\underline{q}_{=k}$ und $\underline{q}_{=l}$ seien gegebene bekannte Werte.

Wenn die Konstruktion nur kinematisch belastet ist, dann gilt $\tilde{f} = \underline{0}$.

Das *Lagrangesche* Variationsprinzip im Falle einer kinematischen Belastung:

$$\delta \Pi = (\delta \underline{q})^T \underline{K} \underline{q} = \left[(\delta \underline{q}_{\underline{1}})^T \quad (\delta \underline{q}_{\underline{2}})^T \quad \cdots \quad (\delta \underline{q}_{\underline{k}})^T \quad (\delta \underline{q}_{\underline{l}})^T \quad \cdots \quad (\delta \underline{q}_{\underline{M}})^T \right] \underline{K} \begin{bmatrix} q_{\underline{1}} \\ q_{\underline{2}} \\ \vdots \\ q_{\underline{k}} \\ q_{\underline{l}} \\ \vdots \\ q_{\underline{M}} \end{bmatrix} = \underline{0}.$$

$q_{\underline{k}}$ und $q_{\underline{l}}$ sind gegeben, deshalb ist $\delta q_{\underline{k}} = \delta q_{\underline{l}} = \underline{0}$.

$\underline{K}_{\underline{ki}}$ und $\underline{K}_{\underline{li}}$ der Steifigkeitsmatrix \underline{K} werden mit Null multipliziert, das heißt die Gleichungen werden gelöscht.

Die Blockspalten $\underline{K}_{\underline{ki}}$ und $\underline{K}_{\underline{li}}$ der Steifigkeitsmatrix \underline{K} werden mit den gegebenen Verschiebungen multipliziert und damit sind diese Werte bekannt; sie können dann auf die rechte Seite des Gleichungssystems umgeordnet werden.

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{\underline{11}} & \underline{K}_{\underline{12}} & \cdots & \underline{K}_{\underline{1M}} \\ \underline{K}_{\underline{21}} & \underline{K}_{\underline{22}} & \cdots & \underline{K}_{\underline{2M}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{K}_{\underline{M1}} & \underline{K}_{\underline{M2}} & \cdots & \underline{K}_{\underline{MM}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{\underline{1}} \\ q_{\underline{2}} \\ \vdots \\ q_{\underline{M}} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{K}_{\underline{1k}} q_{\underline{k}} + \underline{K}_{\underline{1l}} q_{\underline{l}} \\ \underline{K}_{\underline{2k}} q_{\underline{k}} + \underline{K}_{\underline{2l}} q_{\underline{l}} \\ \vdots \\ \underline{K}_{\underline{Mk}} q_{\underline{k}} + \underline{K}_{\underline{Ml}} q_{\underline{l}} \end{bmatrix}}_{\text{bekannt}} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \vdots \\ \underline{0} \end{bmatrix}.$$

Das zu lösende Gleichungssystem mit kinematischer Belastung:

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{\underline{11}} & \underline{K}_{\underline{12}} & \cdots & \underline{K}_{\underline{1M}} \\ \underline{K}_{\underline{21}} & \underline{K}_{\underline{22}} & \cdots & \underline{K}_{\underline{2M}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{K}_{\underline{M1}} & \underline{K}_{\underline{M2}} & \cdots & \underline{K}_{\underline{MM}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{\underline{1}} \\ q_{\underline{2}} \\ \vdots \\ q_{\underline{M}} \end{bmatrix} = - \underbrace{\begin{bmatrix} -\underline{K}_{\underline{1k}} q_{\underline{k}} - \underline{K}_{\underline{1l}} q_{\underline{l}} \\ -\underline{K}_{\underline{2k}} q_{\underline{k}} - \underline{K}_{\underline{2l}} q_{\underline{l}} \\ \vdots \\ -\underline{K}_{\underline{Mk}} q_{\underline{k}} - \underline{K}_{\underline{Ml}} q_{\underline{l}} \end{bmatrix}}_{\text{kinematischer Knotenpunktbelastungsvektor}}.$$