

## 3.2. Konvergenz der Finite Elemente Methode, Allgemeiner Aufbau der Finite Elemente Programmsysteme

### Konvergenz, mechanische Modellierung

*Fragestellung:*

- Wird die Näherungslösung genauer, wenn man immer dichtere FE-Vernetzungen anwendet? Kommen wir mit der Verfeinerung der FE-Verteilung der exakten Lösung näher?
- Für welche Aufgabe bekommen wir die exakte Lösung?

*Gedankengang bei der Lösung einer technischen / Ingenieur-Aufgabe:*

#### a) Die reale technische / Ingenieur-Aufgabe

- Bekannt sind:
- die Form und Dimensionen des Bauteiles,
  - die Materialkennwerte des Körpers,
  - die Belastungen, die bekannten Kräfte,
  - die Lagerung, bekannte Verschiebungen.

↓ Mechanische Modellierung (Vereinfachung).

#### b) Mechanische Aufgabe (mechanisches Modell):

- Geometrische Modellierung:
  - Stab / Balken-Konstruktionen,
  - Ebene Verzerrungsaufgabe,
  - Verallgemeinerter Spannungszustand,
  - Rotationssymmetrische Aufgabe,
  - Plattenkonstruktion,
  - Schalenkonstruktion,
  - 3D-Aufgaben.
- Modellierung des Materials:
  - Linear-elastischer isotroper Stoff,
  - Linear-elastischer orthotroper Stoff,
  - Elastisch-plastisches Material,
  - usw.
- Modellierung der Belastung:
  - Volumenkräfte: Eigengewicht, Massenkkräfte aus der Beschleunigung,
  - Flächenbelastung,
  - Linienbelastung,
  - Einzelkräfte, Einzelmomente.
- Modellierung der Lagerung / Abstützung:
  - an einer Oberfläche,
  - an einer Linie,
  - an einem Punkt.

↓ Finite-Elemente-Modellierung (Näherung / Vereinfachung).

#### c) Finite-Elemente-Analyse:

- Auswahl der geometrischen Form der anzuwendenden Elemente,
- Auswahl der Vernetzungsdichte,
- Auswahl der Ansatz- / Näherungsfunktionen.

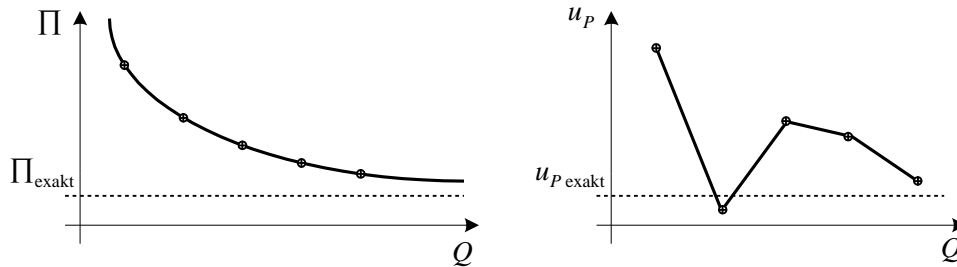
*Antwort auf die Fragestellung:*

- Man will die exakte Lösung der mechanischen Aufgabe möglichst genau annähern.
- Die Methode der finiten Elemente weist hinsichtlich der Energiebilanz eine monotone Konvergenz auf, wenn die Elemente bestimmte Anforderungen erfüllen.

*Monotone Konvergenz im Sinne der Energiebilanz:*

Mit immer dichter werdender FE-Vernetzung kommt es zu einer Annäherung des Wertes für die gesamte potentielle Energie an das exakte Minimum der gesamten potentiellen Energie  $\Pi$ .

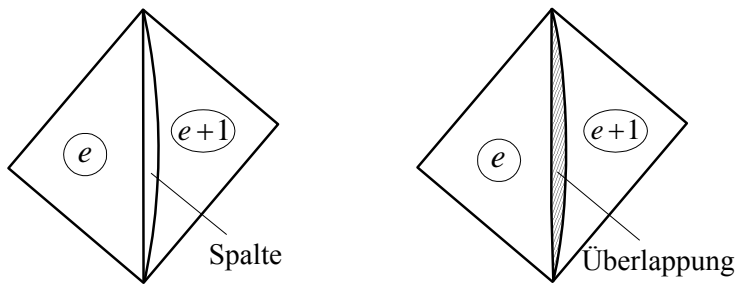
Die monotone Konvergenz gilt nur für  $\Pi$  Werte, aber nicht für Verschiebungs- oder Spannungswerte.



$Q$  - Anzahl der Elemente

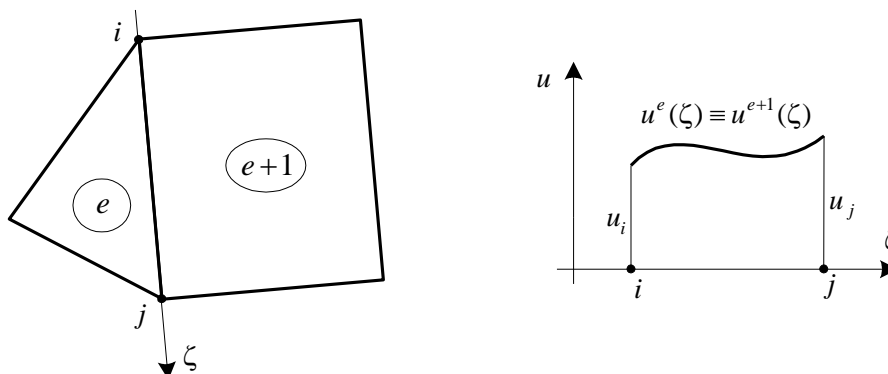
*Die Voraussetzungen der monotonen Konvergenz*

- a) Die Elementvernetzung und das Verschiebungsfeld müssen kompatibel / verträglich sein.  
 Bei der Verknüpfung der Elemente darf weder eine Spalte / Lücke noch eine Überlappung entstehen.



*Kompatibles Verschiebungsfeld:*

- Das Verschiebungsfeld muss an den Elementgrenzen stetig sein.
- Die Ableitungen des Verschiebungsfeldes bis hin zur Ordnung, die um eins kleiner ist, als die Ordnung des Funktionals, müssen an den Elementgrenzen stetig sein.



- b) Das Element muss vollständig sein.

*Definition der Vollständigkeit:*

- Die Näherungsfunktionen müssen einen konstanten Verzerrungszustand am Element exakt beschreiben.
- Im Falle einer Starrkörperbewegung dürfen keine Verzerrungen / Spannungen im Element auftreten.

Diese Bedingungen sind nur dann erfüllt, wenn die Ansatzfunktionen ein vollständiges Polynom ersten Grades enthalten.

Vollständige Polynome in ebenem Fall:

nullten Grades:	1
ersten Grades:	$x \quad y$
zweiten Grades:	$x^2 \quad xy \quad y^2$
dritten Grades:	$x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3$

Z. B.: Das Polynom dritten Grades enthält nicht nur die Potenzen in der Reihe, sondern auch alle vorangegangenen Potenzen in den Reihen darüber.

### 3.3. Stabtragwerke

Anwendungsbeispiele: Brückenkonstruktionen, Fahrzeugkonstruktionen, Fernleitungsmaste, usw.

Bei der Modellierung werden die folgenden Annahmen verwendet:

- Die Konstruktion besteht aus Stäben mit gerader Mittellinie.
- Die Achsen  $\xi, \eta$  sind die Hauptzentralachsen des Querschnittes.
- Die Stäbe unterliegen einer freien (*Saint-Venantschen*) Torsion.

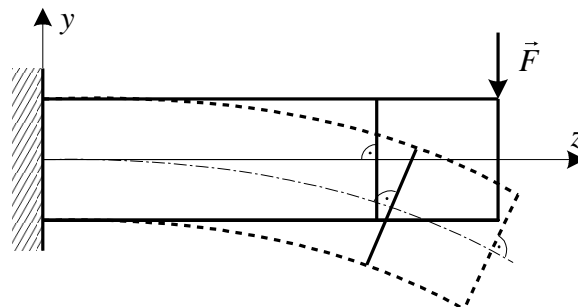
#### 3.3.1. Biegestab-Theorien

##### a) Die Bernoullische Theorie

Die Theorie vernachlässigt die Schubverzerrungen.

*Hypothese:* Bei der Biegung bleiben die Querschnitte des Stabes eben und senkrecht zur deformierten Mittellinie des Stabes.

Die Folge der Hypothese:  $\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 0$ .



##### b) Die Timoshenkosche Theorie

Die Theorie berücksichtigt die Schubverzerrungen.

*Hypothese:* Bei der Biegung bleiben die Querschnitte des Stabes eben, bleiben aber nicht senkrecht zu der deformierten Mittellinie des Stabes.

Die Folge der Hypothese:  $\gamma_{yz} = \psi_x \neq 0 \Rightarrow \tau_{yz} = G\gamma_{yz} = G\psi_x = konst.$

*Widerspruch:* Die aus den Gleichgewichtsbedingungen berechneten Schubspannungen  $\tau_{yx}$  sind nicht konstant. (Bei einem Rechteckquerschnitt ergibt sich eine parabolische Verteilung.)

Die Schubkraft / Querkraft: 
$$T_y = \int_{(A)} \tau_{yz} dA = A_T G \psi_x = \kappa A G \psi_x$$

$A_T = \kappa A$  - Schubfläche

Zur Berechnung der Schubverzerrungsenergie benötigt man die Schubfläche  $A_T$ .

Der Schubkoeffizient  $\kappa$  ist bei einem Rechteckquerschnitt  $5/6$ .

##### c) Zusammenfassung der Formeln zu den Theorien

Bei Stäben können alle mechanischen Größen aus den Verschiebungs- und Verdrehungsfeldern abgeleitet werden.

Verschiebungsfelder der Mittellinie:  $u(\zeta)$ ,  $v(\zeta)$ ,  $w(\zeta)$ .

Verdrehungsfelder der Querschnitte:  $\varphi_\xi(\zeta)$ ,  $\varphi_\eta(\zeta)$ ,  $\varphi_\zeta(\zeta)$ .

#### Zusammenhänge der Bernoullischen Theorie

Beziehungen zwischen den Verschiebungs- / Verdrehungsfeldern und den Beanspruchungen.

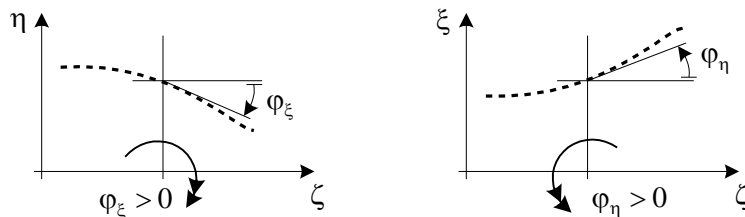
$$\left. \begin{array}{l} u(\zeta) \\ v(\zeta) \\ w(\zeta) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Biegung,} \\ \rightarrow \text{Zug-Druck,} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \varphi_\xi = -\frac{dv(\zeta)}{d\zeta} \\ \varphi_\eta = \frac{du(\zeta)}{d\zeta} \end{array} \right\} \rightarrow \text{Biegung,} \quad \varphi_\zeta(\zeta) \rightarrow \text{Torsion.}$$

Unabhängige Felder:  $u(\zeta)$ ,  $v(\zeta)$ ,  $w(\zeta)$ ,  $\varphi_\zeta(\zeta)$ .

Zug-Druck:  $\varepsilon_\zeta = \frac{dw}{d\zeta}$ ,  $\sigma_\zeta = E\varepsilon_\zeta$ ,  $N = A\sigma_\zeta = AE\varepsilon_\zeta = AEw'$ .

Schiefe Biegung:  $\kappa_\xi = \frac{d\varphi_\xi}{d\zeta} = -\frac{d^2v}{d\zeta^2}$ ,  $M_{h\xi} = I_\xi E\kappa_\xi = -I_\xi E v''$ ,

$\kappa_\eta = \frac{d\varphi_\eta}{d\zeta} = -\frac{d^2u}{d\zeta^2}$ ,  $M_{h\eta} = I_\eta E\kappa_\eta = -I_\eta E u''$ .



Torsion:  $M_c = I_c G \vartheta = I_c G \varphi'_\zeta$ ,  $I_c$  - Torsionsträgheitsmoment

Aus dem Konvergenzkriterium a) folgt:

- Wenn nur die ersten Ableitungen der unbekannt Felder in der potentiellen Energie  $\Pi$  vorkommen, dann müssen nur die unbekannt Felder selbst an den Elementgrenzen stetig sein.
- Wenn auch die zweiten Ableitungen der unbekannt Felder in der potentiellen Energie  $\Pi$  vorkommen, dann müssen sowohl die Felder als auch ihre ersten Ableitungen an den Elementgrenzen stetig sein.

Bei der *Bernoullischen* Theorie stehen in der potentiellen Energie sowohl die ersten Ableitungen  $w'$  und  $\varphi_\zeta$ , als auch die zweiten Ableitungen  $u''$  und  $v''$ .

Bei der *Bernoullischen* Theorie muss man die Stetigkeit der Verschiebungsfelder und ihrer ersten Ableitungen gewährleisten.

#### Zusammenhänge der Timoschenkoschen Theorie

Unabhängige Felder:  $u(\zeta)$ ,  $v(\zeta)$ ,  $w(\zeta)$ ,  $\varphi_\xi(\zeta)$ ,  $\varphi_\eta(\zeta)$ ,  $\varphi_\zeta(\zeta)$ .

Zug-Druck:  $\varepsilon_\zeta = \frac{dw}{d\zeta}$ ,  $N = AE\varepsilon_\zeta = AEw'$ .

Schiefe Biegung:  $\kappa_\xi = \frac{d\varphi_\xi}{d\zeta}$ ,  $M_{h\xi} = I_\xi E\kappa_\xi = -I_\xi E \varphi'_\xi$ ,

$$\kappa_\eta = -\frac{d\varphi_\eta}{d\zeta}, \quad M_{b\eta} = I_\eta E \kappa_\eta = -I_\eta E \varphi'_\eta.$$

Schub:  $\varphi_\xi = -\frac{dv}{d\zeta} + \psi_\xi \Rightarrow \psi_\xi = \varphi_\xi + \frac{dv}{d\zeta}, \quad T_\xi = GA_T (\varphi_\xi + v'),$

$$\varphi_\eta = -\frac{du}{d\zeta} - \psi_\eta \Rightarrow \psi_\eta = -\varphi_\eta - \frac{du}{d\zeta}, \quad T_\eta = GA_T (\varphi_\eta - u').$$

Torsion:  $\vartheta = \frac{d\varphi_\zeta}{d\zeta} \quad M_c = I_c G \vartheta = I_c G \varphi'_\zeta.$

Bei der *Timoschenkoschen* Theorie stehen die Felder ( $\varphi_\xi$  und  $\varphi_\eta$ ) und ihre ersten Ableitungen ( $w', \varphi'_\xi, \varphi'_\eta, v', u', \varphi'_\zeta$ ) in der potentiellen Energie. Deshalb muss man nur die Stetigkeit der Verschiebungsfelder gewährleisten.

### 3.3.2. Räumliche Stabtragwerke, räumliches Stabelement

Voraussetzung: zwischen den Stäben gibt es starre eine Verbindung / Kopplung.

Annahme:  $\xi, \eta, \zeta$  ist ein an das Stabelement gebundenes, lokales Koordinaten-System.

Die Linienbelastung ist gegeben:  $\vec{f}(\zeta) = f_\xi(\zeta)\vec{e}_\xi + f_\eta(\zeta)\vec{e}_\eta + f_\zeta(\zeta)\vec{e}_\zeta.$

*Bekannte Größen:*  $A$  - die Querschnittsfläche,

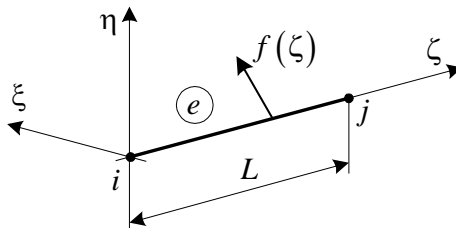
$I_c$  - das Torsionsträgheitsmoment des Querschnittes,

$I_\eta, I_\xi$  - die Hauptträgheitsmomente des Querschnittes,

$E$  - der *Youngsche* Elastizitätsmodul,

$G$  - der Schubmodul,

$L$  - die Länge des Stabelementes.



$e$  - Bezeichnung des Elementes,  $i, j$  - Bezeichnung der Knotenpunkte

Beim Aufbau der Zusammenhänge für das 3D-Stabelement wird die *Bernoullische* Theorie angewendet.

Der verallgemeinerte Knotenverschiebungsvektor des Elementes:

$$\underline{q}^e = \begin{bmatrix} q_{=i}^e \\ q_{=j}^e \end{bmatrix}, \quad \text{wobei} \quad q_{=i}^e = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \varphi_{\xi i} \\ \varphi_{\eta i} \\ \varphi_{\zeta i} \end{bmatrix}^e.$$

Verallgemeinert, weil nicht nur Verschiebungen, sondern auch Verdrehungen enthalten sind. Alle Verschiebungs- / Verdrehungsgrößen hängen nur von der Veränderlichen  $\zeta$  ab.

Der verallgemeinerte Verschiebungsfeldvektor:  $\underline{u}^e(\zeta) = \begin{bmatrix} u^e(\zeta) \\ v^e(\zeta) \\ w^e(\zeta) \\ \varphi_\zeta^e(\zeta) \end{bmatrix}^e$ .

Die Verschiebungsfelder am Element  $e$  werden im lokalen  $\xi, \eta, \zeta$ -KS angenähert:

$$\begin{aligned} u^e(\zeta) &= a_1^e + a_2^e \zeta + a_3^e \zeta^2 + a_4^e \zeta^3, \\ v^e(\zeta) &= a_5^e + a_6^e \zeta + a_7^e \zeta^2 + a_8^e \zeta^3, \\ w^e(\zeta) &= a_9^e + a_{10}^e \zeta, \\ \varphi_\zeta^e(\zeta) &= a_{11}^e + a_{12}^e \zeta. \end{aligned}$$

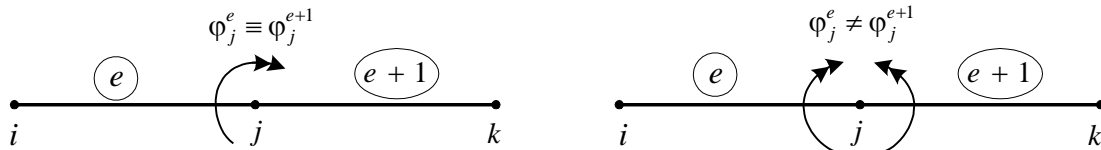
Bei den Feldern  $w^e(\zeta)$  und  $\varphi_\zeta^e(\zeta)$  muss man an den Elementgrenzen (in den Knotenpunkten  $i$  und  $j$ ) die Stetigkeit nur für die Felder gewährleisten.

Bei den Feldern  $u^e(\zeta)$  und  $v^e(\zeta)$  muss aber die Stetigkeit nicht nur für die Felder, sondern auch für die ersten Ableitungen der Felder gewährleistet werden.

Die obigen Anforderungen erfolgen aus den Kompatibilitätsbedingungen.

*Physikalischer Inhalt:*

- Wenn  $\varphi_j^e = \varphi_j^{e+1}$ , dann ist die Verbindung zwischen den Elementen  $e$  und  $e+1$  starr.
- Wenn  $\varphi_j^e \neq \varphi_j^{e+1}$ , dann ist die Verbindung zwischen den Elementen  $e$  und  $e+1$  gelenkig.



Die Verdrehungen um die Achsen  $\xi$  und  $\eta$  sind von den Verschiebungen  $u$  und  $v$  nicht unabhängig:

$$\varphi_\xi^e(\zeta) = -\frac{dv^e(\zeta)}{d\zeta} = -a_6^e - 2a_7^e \zeta - 3a_8^e \zeta^2, \quad \varphi_\eta^e(\zeta) = \frac{du^e(\zeta)}{d\zeta} = a_2^e + 2a_3^e \zeta + 3a_4^e \zeta^2.$$

Die Koeffizienten der Polynome werden durch die Knotenpunktverschiebungen ausgedrückt:

Im Knotenpunkt  $i$ :

$$\begin{aligned} u^e(\zeta_i) &= u^e(\zeta=0) = a_1^e = u_i^e, \\ v^e(\zeta_i) &= v^e(\zeta=0) = a_5^e = v_i^e, \\ w^e(\zeta_i) &= w^e(\zeta=0) = a_9^e = w_i^e, \\ \varphi_\xi^e(\zeta_i) &= -\left. \frac{dv^e}{d\zeta} \right|_{\zeta=0} = -a_6^e = \varphi_{\xi i}^e, \\ \varphi_\eta^e(\zeta_i) &= \left. \frac{du^e}{d\zeta} \right|_{\zeta=0} = a_2^e = \varphi_{\eta i}^e, \\ \varphi_\zeta^e(\zeta_i) &= \varphi_\zeta^e(\zeta=0) = a_{11}^e = \varphi_{\zeta i}^e. \end{aligned}$$

Im Knotenpunkt  $j$ :

$$\begin{aligned}
 u^e(\zeta_j) &= u^e(\zeta=L) = a_1^e + a_2^e L + a_3^e L^2 + a_4^e L^3 = u_j^e, \\
 v^e(\zeta_j) &= v^e(\zeta=L) = a_5^e + a_6^e L + a_7^e L^2 + a_8^e L^3 = v_j^e, \\
 w^e(\zeta_j) &= w^e(\zeta=L) = a_9^e + a_{10}^e L = w_j^e, \\
 \varphi_{\xi}^e(\zeta_j) &= -\left. \frac{dv^e}{d\zeta} \right|_{\zeta=L} = -a_6^e - 2a_7^e L - 3a_8^e L^2 = \varphi_{\xi j}^e, \\
 \varphi_{\eta}^e(\zeta_j) &= \left. \frac{du^e}{d\zeta} \right|_{\zeta=L} = a_2^e + 2a_3^e L + 3a_4^e L^2 = \varphi_{\eta j}^e, \\
 \varphi_{\zeta}^e(\zeta_j) &= \varphi_{\zeta}^e(\zeta=L) = a_{11}^e + a_{12}^e L = \varphi_{\zeta j}^e.
 \end{aligned}$$

Wir haben ein inhomogenes, lineares algebraisches Gleichungssystem für die Unbekannten  $a_1^e, a_2^e, \dots, a_{12}^e$  erhalten.

Die Lösung eingesetzt in den Näherungsansatz:

$$\begin{aligned}
 u^e(\zeta) &= A_1^e(\zeta)u_i^e - A_2^e(\zeta)\varphi_{\eta i}^e + A_3^e(\zeta)u_j^e - A_4^e(\zeta)\varphi_{\eta j}^e, \\
 v^e(\zeta) &= A_1^e(\zeta)v_i^e + A_2^e(\zeta)\varphi_{\xi i}^e + A_3^e(\zeta)v_j^e + A_4^e(\zeta)\varphi_{\xi j}^e, \\
 w^e(\zeta) &= A_5^e(\zeta)w_i^e + A_6^e(\zeta)w_j^e, \\
 \varphi_{\zeta}^e(\zeta) &= A_5^e(\zeta)\varphi_{\zeta i}^e + A_6^e(\zeta)\varphi_{\zeta j}^e.
 \end{aligned}$$

Die Approximationsfunktionen  $A_i^e(\zeta)$ ,  $i=1,2,\dots,6$ :

$$\begin{aligned}
 A_1^e(\zeta) &= 1 - 3\left(\frac{\zeta}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{\zeta}{L}\right)^3, & A_2^e(\zeta) &= L \left[ -\frac{\zeta}{L} + 2\left(\frac{\zeta}{L}\right)^2 - \left(\frac{\zeta}{L}\right)^3 \right], \\
 A_3^e(\zeta) &= 3\left(\frac{\zeta}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{\zeta}{L}\right)^3, & A_4^e(\zeta) &= L \left[ +\left(\frac{\zeta}{L}\right)^2 - \left(\frac{\zeta}{L}\right)^3 \right], \\
 A_5^e(\zeta) &= 1 - \frac{\zeta}{L}, & A_6^e(\zeta) &= \frac{\zeta}{L}.
 \end{aligned}$$

Die Näherung des Verschiebungsfeldes in Matrizenform:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u^e(\zeta) \\ v^e(\zeta) \\ w^e(\zeta) \\ \varphi_{\zeta}^e(\zeta) \end{bmatrix}}_{(4 \times 1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & -A_2 & 0 & A_3 & 0 & 0 & 0 & -A_4 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & A_2 & 0 & 0 & 0 & A_3 & 0 & A_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_6 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}^e(\zeta) \quad (4 \times 12)} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \varphi_{\xi 1} \\ \varphi_{\eta 1} \\ \varphi_{\zeta 1} \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \varphi_{\zeta 6} \end{bmatrix}}_{(12 \times 1)}.$$

Der Matrizenzusammenhang:  $\underline{\underline{u}}^e(\zeta) = \underline{\underline{A}}^e(\zeta) \underline{\underline{q}}^e$ .

$(4 \times 1) \quad (4 \times 12) \quad (12 \times 1)$

Der Verzerrungsvektor des Elementes:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\zeta) = \underbrace{\begin{bmatrix} \kappa_\eta(\zeta) \\ \kappa_\xi(\zeta) \\ \varepsilon_\zeta(\zeta) \\ \vartheta(\zeta) \end{bmatrix}}_{(4 \times 1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{d^2}{d\zeta^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{d\zeta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{d\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d}{d\zeta} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{D}}_\varepsilon^e (4 \times 4)} \underbrace{\begin{bmatrix} u(\zeta) \\ v(\zeta) \\ w(\zeta) \\ \varphi_\zeta(\zeta) \end{bmatrix}}_{(4 \times 1)}$$

Symbolisch / kurz geschrieben:  $\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\zeta) = \underline{\underline{D}}_\varepsilon^e \underline{\underline{u}}^e(\zeta) = \underline{\underline{D}}_\varepsilon^e \underline{\underline{A}}^e(\zeta) \underline{\underline{q}}^e = \underline{\underline{B}}^e(\zeta) \underline{\underline{q}}^e$ .

$\underline{\underline{D}}_\varepsilon^e$  - die Matrix der Differential-Operationen

Der Vektor der verallgemeinerten inneren Kräfte / Momente des Elementes:

$$\underline{\underline{\sigma}}^e(\zeta) = \begin{bmatrix} M_{h\eta} \\ M_{h\xi} \\ N \\ M_c \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I_\eta E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_\xi E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & AE & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_c G \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{C}}^e (4 \times 4)} \begin{bmatrix} \kappa_\eta \\ \kappa_\xi \\ \varepsilon_\zeta \\ \vartheta \end{bmatrix} = \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{\varepsilon}}^e$$

$\underline{\underline{C}}^e$  - die Matrix der Material-/ Querschnitt-Kennwerte

Kurz / symbolisch geschrieben:  $\underline{\underline{\sigma}}^e(\zeta) = \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{B}}^e(\zeta) \underline{\underline{q}}^e$ .

Die Elementsteifigkeitsmatrix im lokalen Koordinaten-System:

$$\underline{\underline{K}}^e = \int_{(L)} \underbrace{\left[ \underline{\underline{A}}^e(\zeta) \right]^T \left( \underline{\underline{D}}_\varepsilon^e \right)^T \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{D}}_\varepsilon^e \underline{\underline{A}}^e(\zeta) d\zeta}_{(12 \times 12)}$$

Verallgemeinerter Knotenpunktbelastungsvektor aus der Linienbelastung:

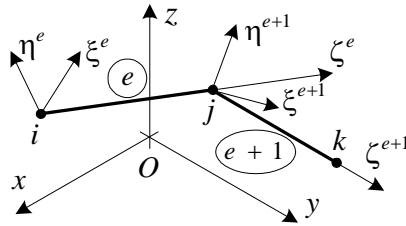
$$\underline{\underline{f}}_{=v}^e = \int_{(L)} \left[ \underline{\underline{A}}^e(\zeta) \right]^T \begin{bmatrix} f_\xi(\zeta) \\ f_\eta(\zeta) \\ f_\zeta(\zeta) \\ 0 \end{bmatrix} d\zeta, \quad \underline{\underline{f}}_{=v}^e = \begin{bmatrix} f_{=vi}^e \\ f_{=vj}^e \end{bmatrix}$$

Die Linienbelastung kann immer durch Kräfte in den Knotenpunkten ersetzt werden.

$$\underline{\underline{f}}_{=vi}^e = \begin{bmatrix} F_{\xi i} \\ F_{\eta i} \\ F_{\zeta i} \\ M_{\xi i} = 0 \\ M_{\eta i} = 0 \\ M_{\zeta i} = 0 \end{bmatrix}$$

Die starre Kopplung der Elemente:





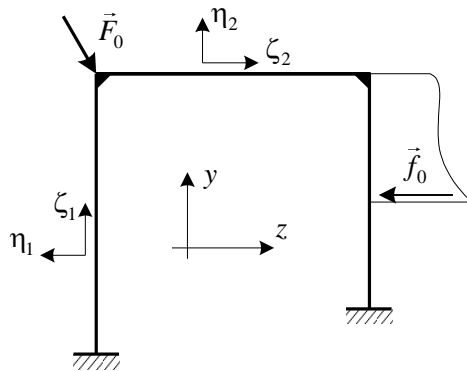
Problem: Die im lokalen Koordinatensystem aufgebauten Elemente können nicht gekoppelt werden.

Lösung: Zur Kopplung muss man den Knotenpunktvektor der verallgemeinerten Verschiebungen in ein globales  $x, y, z$  -KS transformieren.

### 3.3.3. Ebene Stabtragwerke - ebenes Stabelement

Annahmen:

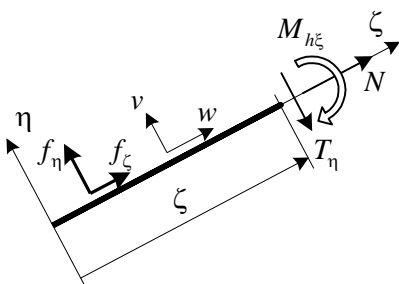
- Zwischen den Stabelementen gibt es eine starre Verbindung / Kopplung.
- Die Mittellinien der Stäbe liegen in derselben Ebene.
- Die Belastung wirkt in der Ebene der Mittellinien.
- Die Achse  $x \equiv \xi_i$  ist die Hauptträgheitsachse der Querschnitte  $\Rightarrow$  es ist eine gerade Biegung.



Das mechanische Modell des Stabes:

- Der Körper (der reale Stab) wird durch die Mittellinie ersetzt.
- Die mechanischen / Festigkeits-Kenngrößen sind an die Mittellinie gebunden.

Bezeichnungen:



$v(\zeta), w(\zeta)$  - die Verschiebungskoordinaten der Punkte auf der Mittellinie,

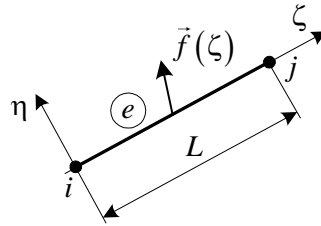
$N(\zeta), T_\eta(\zeta), M_{h_\zeta}$  - die Beanspruchungen,

$\vec{f}(\zeta) = f_\eta(\zeta)\vec{e}_\eta + f_\zeta(\zeta)\vec{e}_\zeta$  - eine bekannte Linienbelastung.

Bekannt sind weiterhin:

- $A$  - die Querschnittsfläche,
- $I_\zeta$  - das axiale Flächenträgheitsmoment,
- $E$  - der *Youngsche* Elastizitätsmodul des Materials,
- $L$  - die Länge des Stabelementes.

Das Stabelement:



Die Verschiebungsfelder werden im lokalen KS angenähert:

$$v^e(\zeta) = a_1^e + a_2^e \zeta + a_3^e \zeta^2 + a_4^e \zeta^3,$$

$$w^e(\zeta) = a_5^e + a_6^e \zeta.$$

Die Bezeichnung der Knotenpunkte:  $i, j$

Der Knotenpunktverschiebungsvektor:

$$\underline{q}^e = \begin{bmatrix} q_i^e \\ q_j^e \end{bmatrix} \quad (6 \times 1) \qquad \underline{q}_i^e = \begin{bmatrix} v_i^e \\ w_i^e \\ \phi_i^e \end{bmatrix} \quad (3 \times 1)$$

Die Koeffizienten der Polynome werden durch die Knotenpunktverschiebungen ausgedrückt.

Im Knotenpunkt  $i$ :

$$v^e(\zeta_i) = v^e(\zeta=0) = a_1^e = v_i^e,$$

$$w^e(\zeta_i) = w^e(\zeta=0) = a_5^e = w_i^e,$$

$$\phi^e(\zeta_i) = -\left. \frac{dv^e}{d\zeta} \right|_{\zeta=0} = -a_2^e = \phi_i^e,$$

Im Knotenpunkt  $j$ :

$$v^e(\zeta_j) = v^e(\zeta=L) = a_1^e + a_2^e L + a_3^e L^2 + a_4^e L^3 = v_j^e,$$

$$w^e(\zeta_j) = w^e(\zeta=L) = a_5^e + a_6^e L = w_j^e,$$

$$\phi^e(\zeta_j) = -\left. \frac{dv^e}{d\zeta} \right|_{\zeta=L} = -a_2^e - 2a_3^e L - 3a_4^e L^2 = \phi_j^e.$$

Nach der Lösung des Gleichungssystems und nach dem Einsetzen der Lösung in den Verschiebungsansatz erhält man:

$$v^e(\zeta) = A_1^e(\zeta)v_i^e + A_2^e(\zeta)\phi_i^e + A_3^e(\zeta)v_j^e + A_4^e(\zeta)\phi_j^e,$$

$$w^e(\zeta) = A_5^e(\zeta)w_i^e + A_6^e(\zeta)w_j^e.$$

In der Matrizenform geschrieben:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v^e(\zeta) \\ w^e(\zeta) \end{bmatrix}}_{(2 \times 1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_1^e(\zeta) & 0 & A_2^e(\zeta) & A_3^e(\zeta) & 0 & A_4^e(\zeta) \\ 0 & A_5^e(\zeta) & 0 & 0 & A_6^e(\zeta) & 0 \end{bmatrix}}_{(2 \times 6)} \underbrace{\begin{bmatrix} v_i^e \\ w_i^e \\ \phi_i^e \\ v_j^e \\ w_j^e \\ \phi_j^e \end{bmatrix}}_{(6 \times 1)}.$$

Kurz / symbolisch geschrieben:  $\underline{u}^e(\zeta) = \underline{A}^e(\zeta)\underline{q}^e$ .

Die Ansatz-/ Approximationsfunktionen:

$$A_1^e(\zeta) = 1 - 3\left(\frac{\zeta}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{\zeta}{L}\right)^3,$$

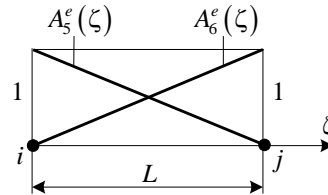
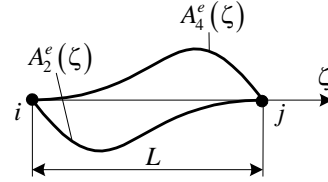
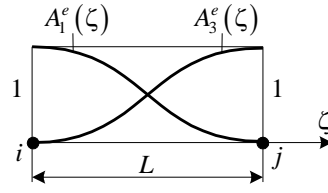
$$A_3^e(\zeta) = 3\left(\frac{\zeta}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{\zeta}{L}\right)^3,$$

$$A_2^e(\zeta) = L \left[ -\frac{\zeta}{L} + 2\left(\frac{\zeta}{L}\right)^2 - \left(\frac{\zeta}{L}\right)^3 \right],$$

$$A_4^e(\zeta) = L \left[ +\left(\frac{\zeta}{L}\right)^2 - \left(\frac{\zeta}{L}\right)^3 \right],$$

$$A_5^e(\zeta) = 1 - \frac{\zeta}{L},$$

$$A_6^e(\zeta) = \frac{\zeta}{L}.$$



Der Verzerrungsvektor des Elementes:  $\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\zeta) = \begin{bmatrix} \kappa_\zeta^e(\zeta) \\ \varepsilon_\zeta^e(\zeta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{d^2 v^e}{d\zeta^2} \\ \frac{dw^e}{d\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{d^2}{d\zeta^2} & 0 \\ 0 & \frac{d}{d\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^e(\zeta) \\ w^e(\zeta) \end{bmatrix}.$

Der Näherungsansatz in die Gleichung eingesetzt:

$$\begin{bmatrix} \kappa_\zeta^e(\zeta) \\ \varepsilon_\zeta^e(\zeta) \end{bmatrix}_{(2 \times 1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{d^2 A_1^e}{d\zeta^2} & 0 & -\frac{d^2 A_2^e}{d\zeta^2} & -\frac{d^2 A_3^e}{d\zeta^2} & 0 & -\frac{d^2 A_4^e}{d\zeta^2} \\ 0 & \frac{dA_5^e}{d\zeta} & 0 & 0 & \frac{dA_6^e}{d\zeta} & 0 \end{bmatrix}}_{(2 \times 6)} \begin{bmatrix} v_i^e \\ w_i^e \\ \varphi_i^e \\ v_j^e \\ w_j^e \\ \varphi_j^e \end{bmatrix}_{(6 \times 1)}.$$

Kurz / symbolisch geschrieben:  $\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\zeta) = \underline{\underline{D}}_\varepsilon^e \underline{\underline{A}}^e(\zeta) \underline{\underline{q}}^e = \underline{\underline{B}}^e(\zeta) \underline{\underline{q}}^e.$

Der Vektor der verallgemeinerten inneren Kräfte / Momente des Elementes:

$$\begin{bmatrix} M_{h\zeta}(\zeta) \\ N(\zeta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_\zeta E v'' \\ AE w' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I_\zeta E & 0 \\ 0 & AE \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{C}}^e} \begin{bmatrix} \kappa_\zeta^e(\zeta) \\ \varepsilon_\zeta^e(\zeta) \end{bmatrix}.$$

Kurz / symbolisch geschrieben:  $\underline{\underline{\sigma}}^e(\zeta) = \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{B}}^e(\zeta) \underline{\underline{q}}^e.$

Die Elementsteifigkeitsmatrix im lokalen  $\zeta, \eta$ -Koordinatensystem:

$$\underline{\underline{K}}^e = \int_{(L)} \left[ \underline{\underline{B}}^e(\zeta) \right]^T \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{B}}^e(\zeta) d\zeta$$

Nach der Durchführung der Integration:

$$\underline{\underline{K}}^e = \frac{I_\xi E}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6L & -12 & 0 & -6L \\ 0 & \frac{AL^2}{I_\xi} & 0 & 0 & -\frac{AL^2}{I_\xi} & 0 \\ -6L & 0 & 4L^2 & 6L & 0 & 2L \\ -12 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & -\frac{AL^2}{I_\xi} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{I_\xi} & 0 \\ -6L & 0 & 2L^2 & -6L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Die Steifigkeitsmatrix kann in Blöcke zerlegt werden:

$$\Pi^e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \left( \underline{q}^e \right)_i^T & \left( \underline{q}^e \right)_j^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{ii} & \underline{\underline{K}}_{ij} \\ \underline{\underline{K}}_{ji} & \underline{\underline{K}}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{q}_i^e \\ \underline{q}_j^e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \left( \underline{q}^e \right)_i^T & \left( \underline{q}^e \right)_j^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{f}_i^e \\ \underline{f}_j^e \end{bmatrix}$$

Knotenpunktbelastungsvektor des Elementes im lokalen  $\zeta, \eta$ -Koordinatensystem:

- aus Linienkräften:

$$\underline{f}_{\nu}^e = \int_{(L)} \left[ \underline{A}^e(\zeta) \right]^T \begin{bmatrix} f_\eta \\ f_\zeta \end{bmatrix} d\zeta = \begin{bmatrix} \underline{f}_{\nu i}^e \\ \underline{f}_{\nu j}^e \end{bmatrix}$$

Wenn  $f_\eta = c_1 = \text{konstant}$  und  $f_\zeta = c_2 = \text{konstant}$  dann folgt nach der Integration:

$$\left( \underline{f}_{\nu}^e \right)^T = \frac{L}{2} \begin{bmatrix} f_\eta f_\zeta - \frac{L f_\eta}{6} f_\eta f_\zeta & \frac{L f_\eta}{6} \end{bmatrix}$$

- aus Einzelkräften

Es ist zweckmäßig, an dem Angriffspunkt der Einzelkraft einen Knotenpunkt anzunehmen.

Annahme: der Knotenpunkt  $i$  ist der Angriffspunkt der Einzelkraft / des Einzelmomentes:

$$\underline{f}_{\nu ki}^e = \begin{bmatrix} F_{\eta i} \\ F_{\zeta i} \\ M_{\xi i} \end{bmatrix}$$

Transformation in das globale  $z, y$ -Koordinatensystem:

Knotenpunktverschiebungsvektor im lokalen  $\zeta, \eta$ -KS:  $\left( \underline{q}^e \right)_k^T = [v_k \ w_k \ \varphi_k]$

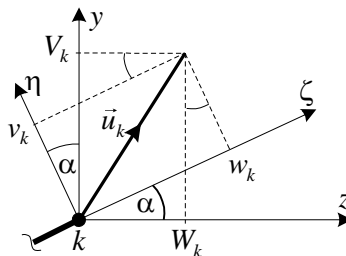
Knotenpunktverschiebungsvektor im globalen  $z, y$ -KS:  $\left( \underline{Q}^e \right)_k^T = [V_k \ W_k \ \Phi_k]$

Transformationsbeziehungen:

$$v_k = V_k \cos \alpha - W_k \sin \alpha,$$

$$w_k = V_k \sin \alpha + W_k \cos \alpha,$$

$$\varphi_k = \Phi_k.$$



Der Zusammenhang in Matrizenform:

$$\begin{bmatrix} v_k \\ w_k \\ \varphi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_k \\ W_k \\ \Phi_k \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{q}}_k^e = \underline{\underline{T}}_0^e \underline{\underline{Q}}_k^e.$$

$(3 \times 1)$        $(3 \times 3)$        $(3 \times 1)$

Die Transformation des Knotenpunktverschiebungsvektors des Elementes  $e$ :

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{q}}_i^e \\ \underline{\underline{q}}_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{T}}_0^e & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{T}}_0^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{Q}}_i^e \\ \underline{\underline{Q}}_j^e \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{q}}^e = \underline{\underline{T}}^e \underline{\underline{Q}}^e.$$

$(6 \times 1)$        $(6 \times 6)$        $(6 \times 1)$

Die Transformation der Elementkenngrößen:

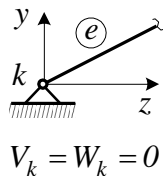
$$\underline{\underline{\hat{K}}}^e = (\underline{\underline{T}}^e)^T \underline{\underline{K}}^e \underline{\underline{T}}^e, \quad \underline{\underline{\hat{f}}}^e = (\underline{\underline{T}}^e)^T \underline{\underline{f}}^e.$$

$\underline{\underline{\hat{K}}}^e$  - die Steifigkeitsmatrix im globalen KS,

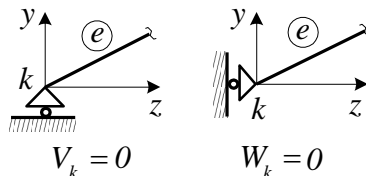
$\underline{\underline{\hat{f}}}^e$  - die Knotenpunktverschiebungsvektor im globalen KS.

Die Berücksichtigung der Randbedingungen:

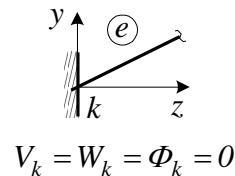
Das Gelenk (die gelenkige Lagerung)



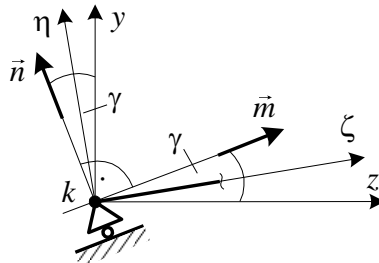
Das Einrollen-Lager



Die Einspannung



Das schiefe Einrollen-Lager:

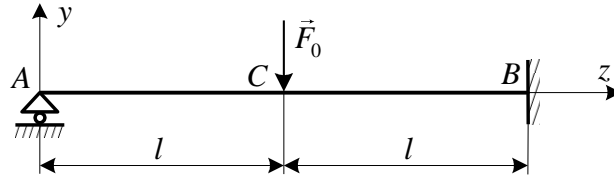


Die Elementkenngrößen (die Steifigkeitsmatrix und der Knotenpunktbelastungsvektor) müssen im Knotenpunkt  $k$  in das  $\tilde{m}\tilde{n}$ -KS transformiert werden:

$$\begin{bmatrix} V_k \\ W_k \\ \Phi_k \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v}_k \\ \tilde{w}_k \\ \tilde{\Phi}_k \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{Q}}_k^e = \underline{\underline{\tilde{T}}}_k^e \underline{\underline{\tilde{q}}}_k^e.$$

**Beispiel:** Die Deformation eines statisch unbestimmten Trägers

Bei der Anwendung der FE-Methode muss man sich mit der Frage der statischen Bestimmung der Konstruktion nicht beschäftigen.



Gegeben: Geometrie, Material, Belastung:  $l, E, I_x, F_0$

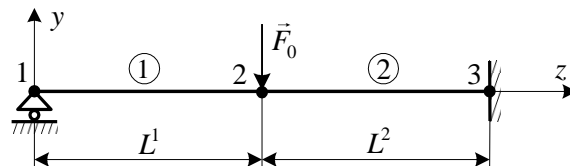
Aufgabe: Die Berechnung der Durchbiegung  $v_c$  und der Verdrehung  $\varphi_c$  des Querschnittes  $C$ .

Lösung:

Die Gestaltung des FE-Netzes

- Wir wählen zwei Biegestabelemente.
- Die Numerierung der Knotenpunkte: 1, 2, 3.
- Die Bezeichnung der Elemente 1, 2.
- Die Länge der Stabelemente:  $L^1 = L^2 = L$ .
- KS:  $\zeta_1, \eta_1 = \zeta_2, \eta_2 = z, y \Rightarrow$  Man braucht keine Koordinatentransformation.
- Es gibt keine Belastung in  $z$ -Richtung  $\Rightarrow w = 0, N = 0$ .

Das FE-Modell der Aufgabe:



Der Knotenpunktverschiebungsvektor:  $\underline{q}_i = \begin{bmatrix} v_i \\ \varphi_i \end{bmatrix}, (i=1,2,3)$ .

Die Elementsteifigkeitsmatrix:

$$\underline{K}^1 = \underline{K}^2 = \frac{I_x E}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & -6l \\ -6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{11} & \underline{K}_{12} \\ \underline{K}_{21} & \underline{K}_{22} \end{bmatrix}^e, \quad e=1,2.$$

Das zu lösende lineare algebraische Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{11}^1 & \underline{K}_{12}^1 & \underline{0} \\ \underline{K}_{21}^1 & (\underline{K}_{22}^1 + \underline{K}_{22}^2) & \underline{K}_{23}^2 \\ \underline{0} & \underline{K}_{32}^2 & \underline{K}_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{q}_1 \\ \underline{q}_2 \\ \underline{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f}_1^1 \\ \underline{f}_2^1 + \underline{f}_2^2 \\ \underline{f}_3^2 \end{bmatrix}.$$

Nach dem Einsetzen, ausführlich geschrieben:

$$\frac{I_x E}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l & 0 & 0 \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 & 0 & 0 \\ 12 & 6l & 24 & -12l & -12 & -6l \\ -6l & 2l^2 & -12l & 8l^2 & 6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & -12 & 6l & 12 & -6l \\ 0 & 0 & -6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1y} \\ 0 \\ F_0 \\ 0 \\ F_{3y} \\ M_{3x} \end{bmatrix}$$

Die Koordinaten der unbekanntem Lager- / Stützkräfte:  $F_{1y}, F_{3y}, M_{3x}$

Die kinematischen Randbedingungen:  $v_1 = v_3 = \varphi_3 = 0$ .

Berücksichtigung der Randbedingungen:

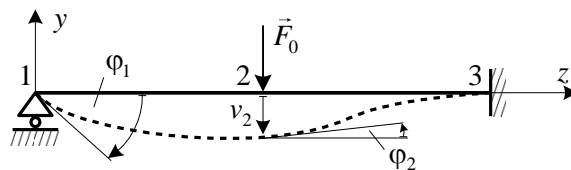
Die Zeilen und Spalten 1., 5. und 6. werden gestrichen.

$$\frac{I_x E}{l^3} \begin{bmatrix} 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ 6l & 24 & -12l \\ 2l^2 & -12l & 8l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -F_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die Lösung des linearen algebraischen Gleichungssystems:

$$\varphi_1 = \frac{1}{8} \frac{l^2}{I_x E} F_0 \curvearrowright, \quad v_2 = -\frac{7}{96} \frac{l^3}{I_x E} F_0 \downarrow, \quad \varphi_2 = -\frac{1}{32} \frac{l^2}{I_x E} F_0 \curvearrowright$$

Die Veranschaulichung der Ergebnisse:



Wir haben eine exakte Lösung erhalten.

Erklärung:

Aus der Festigkeitslehre ist es bekannt, dass die Beanspruchungen bei Einzelkraftbelastung die folgenden sind:

- die Zug-Druckkräfte  $N$  und Schubkräfte  $T_y$  sind abschnittsweise konstant,
- die Biegemomente  $M_{hx}$  sind abschnittsweise linear.

Bei der angewandten Finite Elemente Näherung:

bei linearer Näherung von  $w(\zeta)$  ist die Zugkraft  $N$  elementweise konstant,

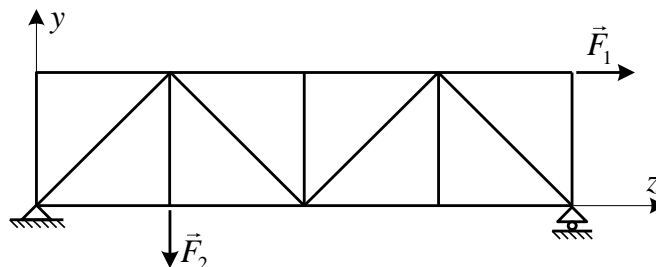
bei kubischer Näherung von  $v(\zeta)$  ist das Biegemoment  $M_{hx} = -I_x E v''$  elementweise linear,

bei kubischer Näherung von  $v(\zeta)$  ist die Schubkraft  $T_y = -\frac{dM_{hx}}{d\zeta} = -I_x E v'''$  elementweise konstant.

Die FE-Lösung enthält also auch die exakte Lösung  $\Rightarrow$  Aus dem Prinzip des Minimum der gesamten potentiellen Energie  $\Pi$  enthält man die exakte Lösung.

### 3.3.4. Ebene Fachwerke, ebene Zug-Druck Stabelemente

Fachwerk:

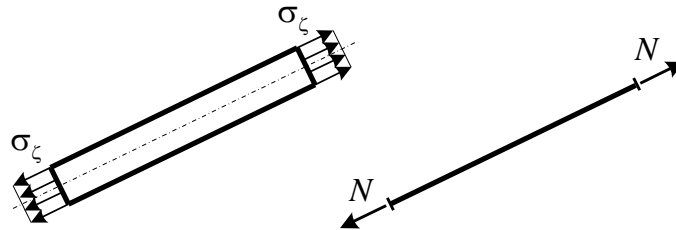


Annahmen:

- Die Mittellinien der Stäbe liegen in derselben Ebene.
- Die Mittellinien der Stäbe sind Geraden.
- Die Gelenk-Kopplungen liegen an den Enden der Stäbe.

- Die Kopplungspunkte heißen Knotenpunkte.
- Die Einzelkräfte der Belastung greifen ausschließlich an den Knotenpunkten an.
- Die Linienbelastung erfolgt in Richtung der Mittellinie.

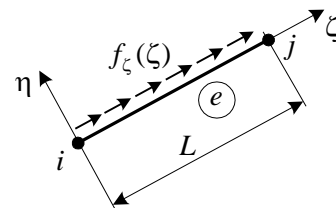
Folge: Die Beanspruchung der Stäbe in Fachwerken ist ausschließlich Zug-Druck.



### Ebenes Zug-Druck Element

Bekannt:

- die axiale Linienbelastung  $\vec{f}(\zeta) = f_\zeta(\zeta)\vec{e}_\zeta$ ,
- die Querschnittsfläche  $A$ ,
- der Elastizitätsmodul  $E$  des Stoffes,
- die Länge  $L$  der Mittellinie des Stabelementes.



In diesem Fall muss nur das Verschiebungsfeld in Stabrichtung approximiert werden:

$$w(\zeta) = a_1^e + a_2^e \zeta.$$

Der Knotenpunktverschiebungsvektor:  $\underline{q}^e = \begin{bmatrix} w_i \\ w_j \end{bmatrix}^e_{(2 \times 1)}$ .

Das Ersetzen der Koeffizienten des Polynoms durch die Knotenpunktparameter:

$$w^e(\zeta_i) = w^e(\zeta = 0) = w_i^e = a_1^e,$$

$$w^e(\zeta_j) = w^e(\zeta = L) = w_j^e = a_1^e + a_2^e L.$$

Die Lösung des Gleichungssystems:  $a_1^e = w_i^e$ ,  $a_2^e = \frac{w_j^e - w_i^e}{L}$ .

Die Näherung des Verschiebungsfeldes mittels der Knotenpunktverschiebungen:

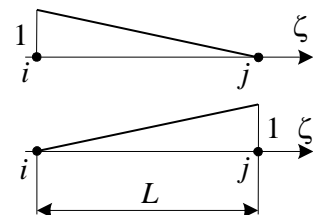
$$w^e(\zeta) = w_i^e + \frac{w_j^e - w_i^e}{L} \zeta.$$

In Matrizenform geschrieben:  $w^e(\zeta) = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{\zeta}{L}\right) \frac{\zeta}{L} \\ \frac{\zeta}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i^e \\ w_j^e \end{bmatrix} = \underline{A}^e(\zeta) \underline{q}^e.$

Die Ansatzfunktionen / Approximationsfunktionen:

$$A_1^e(\zeta) = 1 - \frac{\zeta}{L},$$

$$A_2^e(\zeta) = \frac{\zeta}{L}.$$



Der Verzerrungsvektor des Elementes  $e$ :



$$\underline{\varepsilon}_\zeta^e = \frac{dw^e}{d\zeta} = \frac{w_j^e - w_i^e}{L} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i^e \\ w_j^e \end{bmatrix} = \underline{\underline{B}}^e(\zeta) \underline{q}^e.$$

Der Spannungsvektor:  $\underline{\sigma}_\zeta^e = E \underline{\varepsilon}_\zeta^e = \frac{E}{L} \underline{\underline{B}}^e(\zeta) \underline{q}^e$ ,  $N^e = A \underline{\sigma}_\zeta^e$ .

Die Elementsteifigkeitsmatrix im lokalen  $\eta, \zeta$ -Koordinatensystem:

$$\underline{\underline{K}}^e = \int_{(V^e)} \left[ \underline{\underline{B}}^e(\zeta) \right]^T \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{B}}^e(\zeta) d\zeta = E \left( \underline{\underline{B}}^e \right)^T \underline{\underline{B}}^e \int_{(V^e)} A d\zeta.$$

Nach der Durchführung der Multiplikation und der Integration:

$$\underline{\underline{K}}^e = \frac{EA^e}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix}^e$$

Der Knotenpunktbelastungsvektor des Elementes  $e$  im lokalen  $\eta, \zeta$ -Koordinatensystem:

- aus Linienlasten:  $\underline{f}_v^e = \int_{(L)} \left[ \underline{\underline{A}}^e(\zeta) \right]^T f_\zeta(\zeta) d\zeta$ .

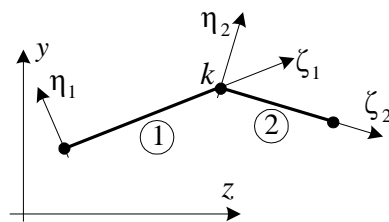
der Fall  $f_\zeta = \text{konstant}$ :  $\underline{f}_v^e = f_\zeta \int_{(L)} \begin{bmatrix} 1 - \frac{\zeta}{L} \\ \frac{\zeta}{L} \end{bmatrix} d\zeta = f_\zeta \int_{\zeta=0}^L \begin{bmatrix} \zeta - \frac{\zeta^2}{2L} \\ \frac{\zeta^2}{2L} \end{bmatrix} d\zeta = \frac{f_\zeta L}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

- aus Knotenpunkt – Einzelkräften:  $\underline{f}_k^e = \begin{bmatrix} F_{i\zeta} \\ F_{j\zeta} \end{bmatrix}.$

Die potentielle Energie des Elementes:

$$\begin{aligned} \Pi^e &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (q_{=i}^e)^T & (q_{=j}^e)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{=i}^e \\ q_{=j}^e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (q_{=i}^e)^T & (q_{=j}^e)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{=i}^e \\ f_{=j}^e \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} w_i^e & w_j^e \end{bmatrix} \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i^e \\ w_j^e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_i^e & w_j^e \end{bmatrix} \left\{ \frac{f_\zeta L}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{i\zeta} \\ F_{j\zeta} \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Die Kopplung der Elemente / Transformation:



Die Steifigkeitsmatrizen und die Knotenpunktbelastungsvektoren stehen im lokalen KS zur Verfügung.

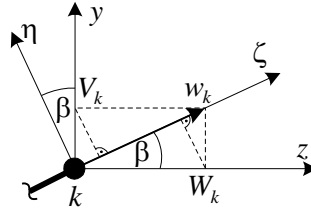
Im Knotenpunkt  $k$ :  $\underline{q}_k^1 = \begin{bmatrix} w_k^1 \end{bmatrix} \neq \underline{q}_k^2 = \begin{bmatrix} w_k^2 \end{bmatrix}.$

Die Elementkenngrößen  $\underline{\underline{K}}^e$  und  $\underline{f}_v^e$  müssen in das globale  $z, y$ -KS transformiert werden:

Knotenpunktverschiebungen

im lokalen KS:  $\underline{q}_k = [w_k]$ ,

im globalen KS:  $\underline{Q}_k = \begin{bmatrix} V_k \\ W_k \end{bmatrix}$ .



Transformationsbeziehung in skalarer Form:  $w_k = V_k \sin\beta + W_k \cos\beta$ .

Transformationsbeziehung für das Element  $e$  in Matrizenform:

$$\underline{q}^e = \begin{bmatrix} w_i \\ w_j \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ W_i \\ V_j \\ W_j \end{bmatrix} = \underline{T}^e \underline{Q}^e$$

Abkürzungen:  $\sin\beta = s$ ,  $\cos\beta = c$ .

Durchführung der Transformation:

$$\underline{\hat{K}}^e = (\underline{T}^e)^T \underline{K}^e \underline{T}^e = \begin{bmatrix} s & 0 \\ c & 0 \\ 0 & s \\ 0 & c \end{bmatrix} \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} s^2 & sc & -s^2 & -sc \\ sc & c^2 & -sc & -c^2 \\ -s^2 & -sc & s^2 & sc \\ -sc & -c^2 & sc & c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{K}_{ii}^e & \hat{K}_{ij}^e \\ \hat{K}_{ji}^e & \hat{K}_{jj}^e \end{bmatrix},$$

$$\underline{\hat{f}}^e = (\underline{T}^e)^T \underline{f}^e = \begin{bmatrix} s & 0 \\ c & 0 \\ 0 & s \\ 0 & c \end{bmatrix} \frac{f_z L}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ c \\ s \\ c \end{bmatrix} \frac{f_z L}{2} = \begin{bmatrix} \hat{f}_{vi}^e \\ \hat{f}_{vj}^e \end{bmatrix}.$$

**Beispiel:** Ebenes Fachwerk mit einer Einzelkraftbelastung.

Bekannt:  $L_1 = L_2 = L$ ,  $A_1 = A_2 = A$ ,  $E_1 = E_2 = E$ .

Aufgabe: Bestimmung der Verschiebung  $\vec{u}_c$  mit der FEM,

$$\vec{u}_c = V_c \vec{e}_y + W_c \vec{e}_z.$$

Lösung der Aufgabe:

FE Einteilung: 2 Zug-Druck Elemente, Elemente: 1, 2.

Knotenpunkte: 1, 2, 3.

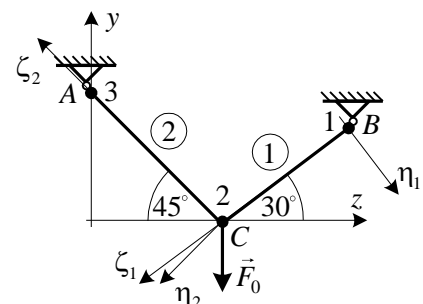
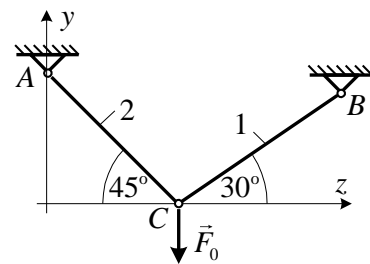
Randbedingungen: Knotenpunkte 1, 3.

Kopplung der Elemente im Knotenpunkt 2.

Lokale Koordinatensysteme:  $\eta_1, \zeta_1$ ,  $\eta_2, \zeta_2$ .

Globales Koordinatensystem:  $z, y$

Beziehung zwischen den lokalen und globalen Koordinatensystemen:  $\alpha_1 = 210^\circ, \alpha_2 = 135^\circ$ .



Die Steifigkeitsmatrizen im globalen z,y-Koordinatensystem:

- Für das Element 1:

$$\cos^2 \alpha_1 = 0,75; \quad \sin^2 \alpha_1 = 0,25; \quad \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 = 0,43.$$

$$\underline{\underline{\hat{K}}}^1 = \begin{bmatrix} \hat{K}_{11}^1 & \hat{K}_{12}^1 \\ \hat{K}_{21}^1 & \hat{K}_{22}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,43 & -0,25 & -0,43 \\ 0,43 & 0,75 & -0,43 & -0,75 \\ -0,25 & -0,43 & 0,25 & 0,43 \\ -0,43 & -0,75 & 0,43 & 0,75 \end{bmatrix} \frac{AE}{L}.$$

- Für das Element 2:

$$\cos^2 \alpha_2 = 0,5; \quad \sin^2 \alpha_2 = 0,5; \quad \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 = -0,5.$$

$$\underline{\underline{\hat{K}}}^2 = \begin{bmatrix} \hat{K}_{22}^2 & \hat{K}_{23}^2 \\ \hat{K}_{32}^2 & \hat{K}_{33}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 & -0,5 & 0,5 \\ -0,5 & 0,5 & -0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 & 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & -0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \frac{AE}{L}.$$

Das lineare algebraische Gleichungssystem der Konstruktion mit allgemeinen Bezeichnungen:

$$\begin{bmatrix} \hat{K}_{11}^1 & \hat{K}_{12}^1 & 0 \\ \hat{K}_{21}^1 & (\hat{K}_{22}^1 + \hat{K}_{22}^2) & \hat{K}_{23}^2 \\ 0 & \hat{K}_{32}^2 & \hat{K}_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_2^2 \\ f_3^2 \end{bmatrix}$$

Ausführlich geschrieben:

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 0,25 & 0,43 & -0,25 & -0,43 & 0 & 0 \\ 0,43 & 0,75 & -0,43 & -0,75 & 0 & 0 \\ -0,25 & -0,43 & 0,75 & -0,067 & -0,5 & 0,5 \\ -0,43 & -0,75 & -0,067 & 1,25 & 0,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & -0,5 & 0,5 & 0,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & -0,5 & -0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ W_1 \\ V_2 \\ W_2 \\ V_3 \\ W_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1y} \\ F_{1z} \\ -F_0 \\ 0 \\ F_{3y} \\ F_{3z} \end{bmatrix}.$$

Kinematische Randbedingungen:  $V_1 = W_1 = 0$  und  $V_3 = W_3 = 0$ .

Das zu lösende Gleichungssystem:  $\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 0,75 & -0,067 \\ -0,067 & 1,25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ W_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

Die Lösung des Gleichungssystems:  $V_2 = -1,34 \frac{L}{AE} F_0, \quad W_2 = -0,072 \frac{L}{AE} F_0.$

### 3.4. Der allgemeine Aufbau der FE Programmsysteme

a) Das Modul für Dateneingabe

- Die Angabe des geometrischen Aufbaus der Konstruktion: Punkte, Linien, Flächen, Volumina.

- Der Aufbau des FE Netzes der Konstruktion: Elemente, Knotenpunkte

Anhaltspunkte: - Die FE-Verteilung / das FE-Netz muss in den Bereichen dichter sein, in denen man bedeutende Änderungen der mechanischen Größen erwartet.

- Auf die Angriffspunkte der Einzelkräfte / Momente sollen Knotenpunkte entfallen.

- Auf die Lagerpunkte sollen ebenfalls Knotenpunkte entfallen.

- Die Eingabe der Materialparameter der Konstruktion:  
Die Materialkenngrößen können sowohl zur Geometrie (Linie, Fläche, Volumen) als auch zu den FE Größen (Element, Knotenpunkte) zugeordnet werden.

Spezielle Fälle:

- Bei Stabtragwerken an dieser Stelle muss man auch die Querschnittskenngrößen  $A, I_x, \dots$  eingeben.
- Bei Schalen-, Platten- und Scheibenaufgaben muss man an dieser Stelle die Dicke angeben.

- Die Eingabe der Belastung der Konstruktion:

- Einzelkräfte / Momente,
- Linien-, Flächen- und Volumenkräfte,
- Temperaturverteilung.

- Die Angabe der Lagerung:

- Lagerung: es gibt keine Verschiebung
- elastische Lagerung / Bettung (Federkoeffizienten)
- vorgeschrieben Verschiebungen – kinematische Belastung

*b) Das Modul / der Teil der FE-Berechnung:*

- Der Aufbau / die Berechnung der Steifigkeitsmatrizen und Knotenpunktbelastungsvektoren der Elemente.
- Die Bestimmung / Bereitsstellung der Steifigkeitsmatrix und des Belastungsvektors der Konstruktion.
- Die Berücksichtigung der Randbedingungen (Löschung von Zeilen und Spalten).
- Die Lösung des linearen algebraischen Gleichungssystems der Konstruktion  $\Rightarrow$  die Bestimmung der Knotenpunktverschiebungen.
- Die Berechnung von Verzerrungen und Spannungen auf der Elementebene. An den Knotenpunkten werden Durchschnittswerte berechnet.

*c) Das Modul / der Teil zur Veranschaulichung / grafischen Darstellung der Ergebnisse*

- die deformierte Struktur,
- Spannungen / Beanspruchungen / Vergleichsspannungen, Lagerkräfte, usw.