

7. Versteifte Platten und Schalenkonstruktionen

Schale:

- Ein Körper, bei dem die eine Dimension wesentlich kleiner ist als die beiden anderen. Die kleinste Dimension ist die Dicke der Schale.
- Mittels Halbierung der Dicke kann man eine gekrümmte Mittelfläche definieren.
- Die Belastung der Schale ist beliebig, es gibt sowohl parallele als auch senkrechte Belastungskomponenten zur Mittelfläche.

Platte:

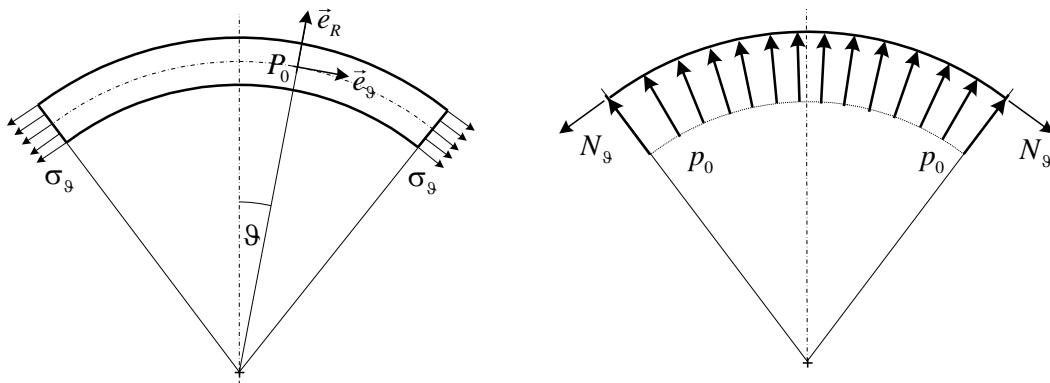
- Ein Körper, bei dem die eine Dimension wesentlich kleiner ist als die beiden anderen.
- Man kann eine ebene Mittelfläche definieren. Die Mittelfläche ist die Mittelebene.
- Die Belastung der Platte erfolgt senkrecht zur Mittelebene.

Superpositionsprinzip:

- Für Aufgabenstellungen zur beliebig belasteten Schale erhält man die Lösung mittels Superposition einer Membran-Aufgabe und einer Biegungsaufgabe der Schale.
- Für Aufgabenstellungen zur beliebig belasteten Platte mit ebener Mittelfläche erhält man mittels Superposition einer Scheiben-Aufgabe und einer Plattenbiegung.

Scheiben-Aufgabe (Verallgemeinerter ebener Spannungszustand):

Die Platte wird in Richtung ihrer Mittelebene belastet. In diesem Fall ist die Spannungsverteilung über die Dicke konstant.



Membran-Aufgabe:

Die Spannungsverteilung ist über die Dicke konstant. Z.B.: Luftballon.

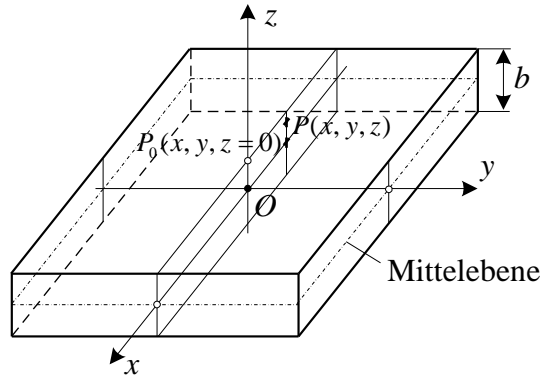
7.1. Biegetheorien von Schalen / Platten

7.1.1. Die Kirchhoff-Lovesche-Theorie

Die *Kirchhoff-Lovesche*-Theorie berücksichtigt die Schubverzerrungen, Schubspannungen nicht.

Die übliche / gebräuchliche Bezeichnung: Theorie dünner Schalen / Platten.

Hypothese: Bei der Biegung bleiben die Normalen der Mittelfläche / Mittelebene gerade und senkrecht zur deformierten Mittelfläche der Schale / Platte. Der Abstand der Punkte auf der Normalen ändert sich bei der Deformation nicht.



Das x, y, z -Koordinatensystem ist an die Mittellebene gebunden.

Die an die Mittellebene gebundenen Kenngrößen werden mit dem Index Null gekennzeichnet. Z.B.: P_0 .

Die Konsequenz der Hypothese: $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ und $\varepsilon_z = 0$.

Spannungshypothese: $\sigma_z \approx 0$.

Festigkeitszustände aus der Biegung der Platte:

- Das Verschiebungsfeld: $\vec{u}(x, y, z) = w_0(x, y)\vec{e}_z + \vec{\varphi}_0 \times z\vec{e}_z$,

w_0 - die Verschiebungscoordinate der Mittellebene (Durchbiegung).

$\vec{\varphi}_0 = \varphi_x\vec{e}_x + \varphi_y\vec{e}_y = \left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\vec{e}_x - \frac{\partial w_0}{\partial x}\vec{e}_y \right)$ - die Verdrehung der Normalen der Mittellebene.

$$\vec{u}(x, y, z) = \varphi_y z \vec{e}_x - \varphi_x z \vec{e}_y + w_0 \vec{e}_z.$$

- Der Verzerrungszustand:

$$\underline{\underline{[A]}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} z = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} z = \kappa_x z,$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} z = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} z = \kappa_y z,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} z = -2\kappa_{xy} z.$$

$\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ - die Krümmungen der Mittelfläche.

Die Krümmungen charakterisieren die Verformung der Mittelfläche.

- Der Spannungszustand:

$$\underline{\underline{[F]}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= E_1 (\kappa_x + \nu \kappa_y) z, \\ \sigma_y &= E_1 (\kappa_y + \nu \kappa_x) z, \\ \tau_{xy} &= -E_1 (1 - \nu) \kappa_{xy} z. \end{aligned} \right\} E_1 = \frac{E}{1 - \nu^2}.$$

Bemerkungen:

- In Kenntnis der Durchbiegungsfunktion $w_0(x, y)$ kann man jede Kenngröße des Körpers bestimmen.

- In der gesamten potentiellen Energie treten die zweiten Ableitungen des Durchbiegungsfeldes $w_0(x, y)$ auf.

7.1.2. Die Reissner-Mindlinsche-Theorie

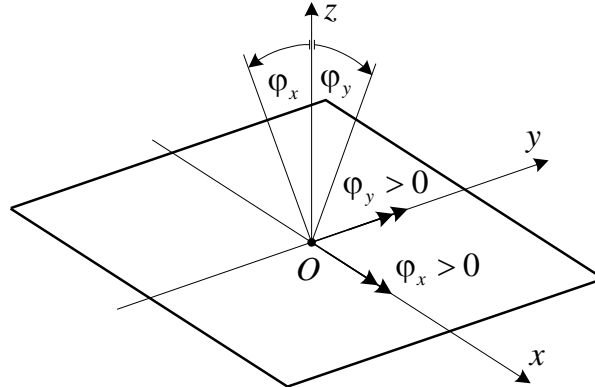
Die *Reissner-Mindlinsche* Theorie berücksichtigt auch die Schubverzerrungen / Schubspannungen.

Die übliche / gebräuchliche Bezeichnung: Theorie dicker Schalen / Platten.

Hypothese: Bei der Biegung bleiben die Normalen der Mittelfläche / Mittelebene gerade, aber sie bleiben nicht senkrecht zur deformierten Mittelfläche der Schale / Platte. Der Abstand der Punkte auf der Normalen ändert sich bei der Deformation nicht.

Die Konsequenz der Hypothese: $\varepsilon_z = 0$, $\gamma_{xz} = \text{konst.}$, $\gamma_{yz} = \text{konst.}$, $\varepsilon_z = 0$.

Spannungshypothese: $\sigma_z \approx 0$.



Die Festigkeitszustände von Platten aus der Biegung und aus dem Schub.

- Das Verschiebungsfeld: $\vec{u}(x, y, z) = \varphi_y z \vec{e}_x - \varphi_x z \vec{e}_y + w_0 \vec{e}_z$.

φ_x - die Verdrehung der Normalen um die x -Achse.

φ_y - die Verdrehung der Normalen um die y -Achse.

Die Verdrehungen φ_x und φ_y sind von dem Verschiebungsfeld $w_0(x, y)$ unabhängig.

$$\varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial y} - \psi_x, \quad \varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial x} - \psi_y.$$

ψ_x - die Winkeländerung der y - und z -Achsen.

ψ_y - die Winkeländerung der x - und z -Achsen.

- Der Verzerrungszustand:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} z = \kappa_x z, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} z = \kappa_y z,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}\right) z = \kappa_{xy} z,$$

$$\gamma_{xz} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) = \frac{\partial w_0}{\partial x} - \varphi_y = \psi_y = \text{konstant},$$

$$\gamma_{yz} = \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) = \frac{\partial w_0}{\partial y} - \varphi_x = \psi_x = \text{konstant}.$$

Der Verzerrungstensor:
$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & 0 \end{bmatrix}.$$

- Der Spannungszustand:

$$\sigma_x = E_1 (\kappa_x + \nu \kappa_y) z, \quad \sigma_y = E_1 (\kappa_y + \nu \kappa_x) z,$$

$$\tau_{xy} = -E_1(1-\nu)\kappa_{xy}z, \text{ wobei } E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}.$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = \text{konstant}, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} = \text{konstant}.$$

Der Spannungstensor:
$$[\underline{\underline{F}}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix}.$$

Bemerkungen:

- Zur Bestimmung der Festigkeitszustände braucht man drei unabhängige Felder: $w_0(x, y), \varphi_x(x, y), \varphi_y(x, y)$.
- In der gesamten potentiellen Energie stehen nur die ersten Ableitungen der Felder $w_0(x, y), \varphi_x(x, y), \varphi_y(x, y)$.

7.2. Flächenspannungen und Flächenmomente

Das mechanische Modell der Schale / Platte ist die Mittelfläche / Mittelebene der Schale / Platte. Die mechanischen Kenngrößen sind an die Mittelfläche / Mittelebene gebunden.

- *Membranzustand / ebener Spannungszustand:*

Die Verschiebungsfelder: $u_0(x, y), v_0(x, y)$.

Die Verzerrungsgrößen und die Spannungen sind über die Dicke konstant.

Flächenspannungen (Resultierenden in Bezug auf die Dicke):

$$N_x = \int_{(t)} \sigma_x dz, \quad N_y = \int_{(t)} \sigma_y dz, \quad N_{xy} = N_{yx} = \int_{(t)} \tau_{xy} dz.$$

- *Schalenbiegung / Plattenbiegung:*

Verschiebungen, Verdrehungen: $w_0(x, y), \varphi_x(x, y), \varphi_y(x, y)$.

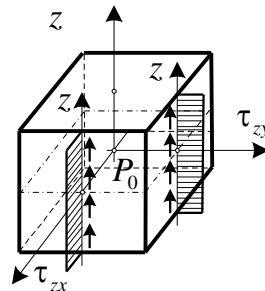
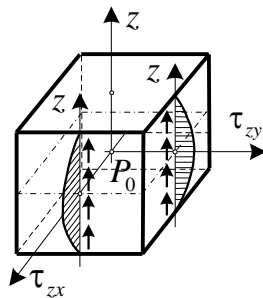
Verzerrungen, Spannungen: $\left. \begin{matrix} \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy} \\ \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \end{matrix} \right\} \text{ lineare Verteilung über die Dicke .}$

Kirchhoff - Love: $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \Rightarrow \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$.

Die aus Gleichgewichtsbedingungen stammenden Schubspannungen τ_{xz}, τ_{yz} sind parabolisch (Widerspruch!)

Reissner - Mindlin: $\gamma_{xz} = \text{konstant}, \quad \gamma_{yz} = \text{konstant}, \quad \tau_{xz} = \text{konstant}, \quad \tau_{yz} = \text{konstant}.$

Aus der Gleichgewichtsbedingung Aus der Reissner-Mindlinschen-Theorie



Kirchhoff-Lovesche-Theorie:

- Aus der geometrischen Hypothese ergeben sich die Schubspannungen zu Null $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$.

- Aus den Gleichgewichtsbedingungen ergeben sich parabolische Verteilungen für die Schubspannungen τ_{zx}, τ_{zy} .

Reissner-Mindlinsche-Theorie:

- Die konstante Verteilung der Schubspannungen stammt aus der geometrischen Hypothese.
- Die konstante Spannungsverteilung erfüllt die kinematischen Randbedingungen bei $z = \pm \frac{t}{2}$ nicht.

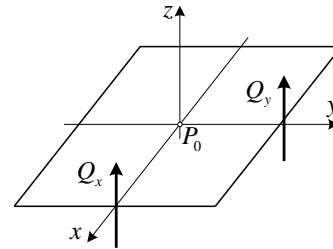
Die Gleichheit der beiden Schubzustände kann man durch die Einführung eines Schubkoeffizienten κ gewährleisten.

Für isotropes homogenes Material ist $\kappa = 5/6$.

Resultierende Kräfte / Flächenkräfte für beide Theorien:

$$Q_x = \int_{(t)} \tau_{zx} dz, \quad Q_y = \int_{(t)} \tau_{zy} dz.$$

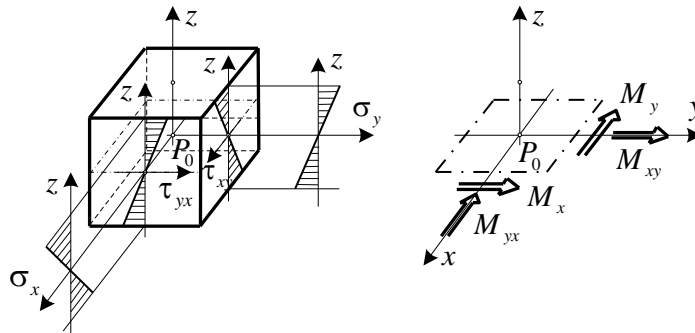
Die Spannungskoordinaten τ_{zx} und τ_{zy} sind im Allgemeinen kleiner, als die anderen Spannungen.



Bei dünnen Platten / Schalen sind die Spannungen $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ dominant.

Die dominanten Spannungen $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ sind linear über die Dicke verteilt.

Spannungsverteilung, resultierende Momente:



Resultierende Momente:

$$M_x = \int_{(t)} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{(t)} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = M_{yx} = \int_{(t)} \tau_{xy} z dz.$$

Die maximalen Spannungswerte treten bei Schalenbiegung / Plattenbiegung an den Oberflächen $z = \pm \frac{b}{2}$ auf.

7.3. Isoparametrisches Plattenelement

Theoretische Grundlagen:

- Verallgemeinerter ebener Spannungszustand (ESZ).
- *Reissner-Mindlinsche* (RM)-Biegetheorie der Platten.

Für den ESZ muss man zwei, für die RM Biegung aber drei unabhängige Felder annähern:

$$\left. \begin{aligned} u_0^e(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta) u_i^e, \\ v_0^e(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta) v_i^e, \end{aligned} \right\} \text{ - ESZ ,}$$

$$\left. \begin{aligned} w_0^e(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta) w_i^e, \\ \varphi_x^e(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta) \varphi_{xi}^e, \\ \varphi_y^e(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta) \varphi_{yi}^e \end{aligned} \right\} \text{ - RM Biegung .}$$

$u_0(x, y), v_0(x, y), w_0(x, y)$ - Verschiebungen der Mittelebene,

$u_0(x, y), v_0(x, y)$ - Verschiebungen in der Ebene,

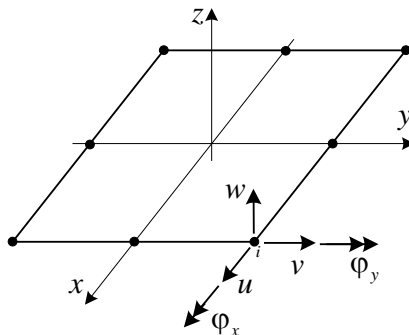
$w_0(x, y)$ - Verschiebung senkrecht zur Ebene (Durchbiegung).

$\varphi_x(x, y), \varphi_y(x, y)$ - Verdrehungen der Normalen der Mittelebene um die x - und y -Achsen.

Verallgemeinerter Knotenverschiebungsvektor:

$$\left[\underset{=i}{q}^e \right] = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \varphi_{xi} \\ \varphi_{yi} \end{bmatrix} .$$

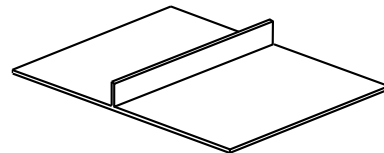
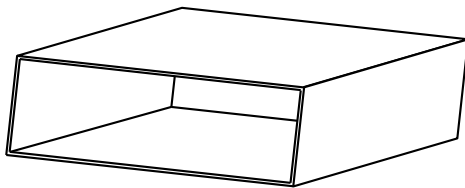
Veranschaulichung der Knotenparameter:



Der Aufbau der Elementkenngrößen erfolgt in der üblichen Weise.

Probleme bei der Anwendung:

- Kastenkonstruktionen,
- Versteifung mit Rippen.

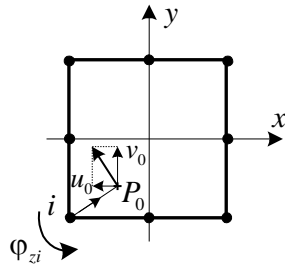


An den Kanten kann man die obigen Plattenelemente nicht verbinden.

Zur Verbindung fehlt die Verdrehung um die z -Achse φ_z .

Den Knotenpunktverschiebungsvektor muss man mit der Verdrehung φ_z ergänzen.

Aus der Verdrehung φ_z stammen innerhalb des Elementes die Verschiebungen u_0, v_0 .

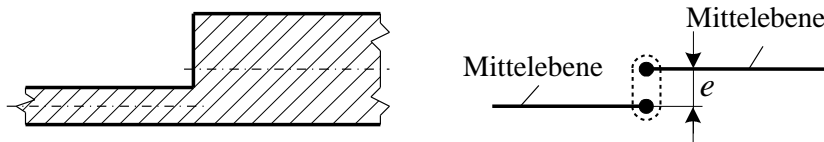


Wichtige Anforderung: Die Verschiebungsfelder an der Kante müssen bei der Kopplung benachbarter Elemente gleich sein.

Bei *Kirchhoff-Loveschen*-Platten müssen an den Kanten nicht nur die Verschiebungen, sondern auch die Verdrehungen stetig sein.

7.4. Modellierung der exzentrischen Kopplung

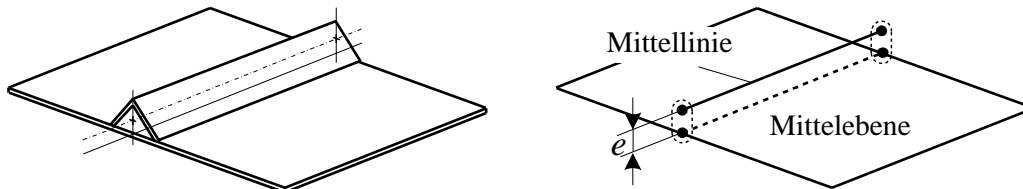
- *Plötzliche Dickenänderung einer Platte / Schale:*



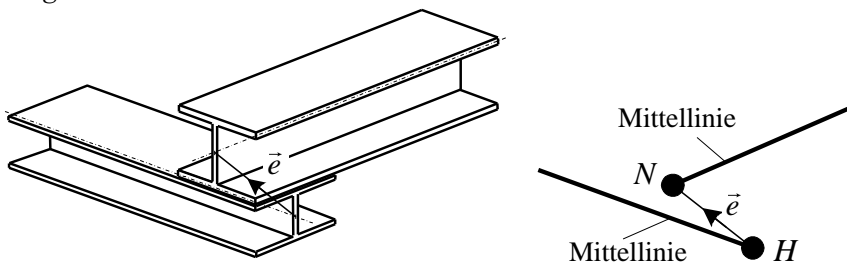
e – Exzentrizität.

Die beiden Mittelflächen liegen nicht in der gleichen Ebene. Der Abstand zwischen den Mittelflächen ist die Exzentrizität e .

- *Versteifung mit einem dünnwandigen Stab:*



- *Räumliche Kopplung von Stäben:*



Der Vektor der Exzentrizität: $\vec{e} = a\vec{e}_x + b\vec{e}_y + c\vec{e}_z$.

Modellierung der exzentrischen Kopplung: Es gibt eine starre Verbindung zwischen den Knotenpunkten N und H .

Bezeichnung: N – Nebenknotenpunkt, H – Hauptknotenpunkt.

$$\underline{\underline{q}}_H = \begin{bmatrix} E & \Omega \end{bmatrix} \underline{\underline{q}}_H, \quad \underline{\underline{q}}_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & c & -b \\ 0 & 1 & 0 & -c & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & b & -a & 0 \end{bmatrix} \underline{\underline{q}}_H$$

Der linke (3x3) Block der Matrix gibt eine Starrkörperverschiebung an. Der rechte (3x3) Block der Matrix gibt eine Starrkörperverdrehung an.

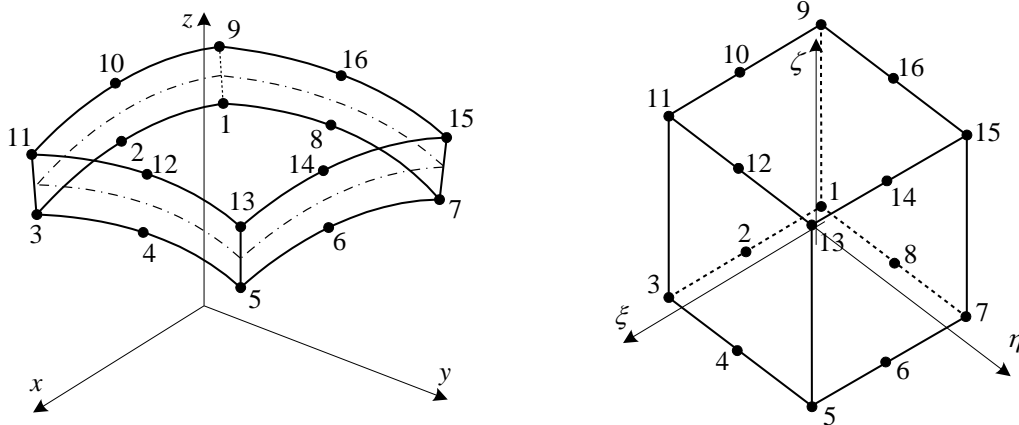
Die Koordinaten des Exzentrizitätsvektors:

$$a = x_N - x_H, \quad b = y_N - y_H, \quad c = z_N - z_H$$

Die Punkte N und H bewegen sich, wie zwei Punkte eines Starrkörpers. Der Abstand NH verändert sich während der Verformung nicht.

7.5. Isoparametrisches Schalelement

Grundlage: Membrantheorie, *Reissner-Mindlinsche*-Theorie.



Das Schalelement wird nicht in der üblichen Weise aufgebaut.

Wir gehen von einem räumlichen isoparametrischen Element aus, wobei die Geometrie in Dickenrichtung mit einer linearen Funktion beschrieben wird.

Aufbau:

- Die Zusammenhänge der Schalentheorie werden hier nicht abgeleitet und verwendet.
- Die Annahmen der *Reissner-Mindlinschen*-Theorie werden in das räumliche Element eingebaut.
- Im Element wird eine Mittelfläche definiert. Die Gerade in Dickenrichtung kann man näherungsweise als die Normalen der Mittelflächen berücksichtigen.

Koordinaten-Systeme:

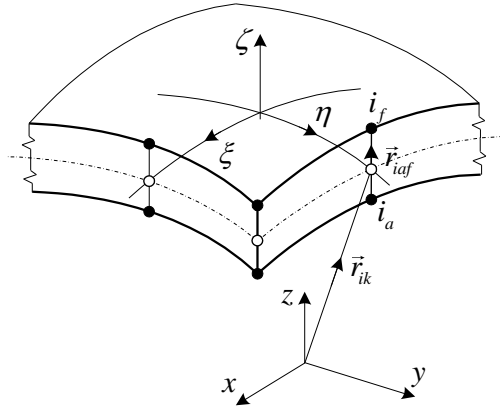
x, y, z - das (globale) Bezugs-Koordinaten-System. In diesem KS werden die Verschiebungs koordinaten u, v, w definiert.

ξ, η, ζ - an das Element gebundenes lokales KS. Es gibt ein krummliniges, nicht rechtwinkliges KS. In diesem KS wird die Geometrie des Elementes angegeben $-1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1$.

x', y', z' - an die Mittelfläche gebundenes KS: krummlinig, rechtwinklig. In diesem KS werden die Verdrehungen $\phi_{x'}, \phi_{y'}$ der Normalen der Mittelfläche definiert.

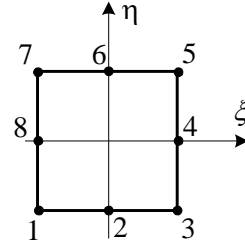
Die Beschreibung der Geometrie:

$$\left. \begin{aligned} x(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^8 h_i(\xi, \eta) \left[\frac{1+\zeta}{2} x_i^f + \frac{1-\zeta}{2} x_i^a \right], \\ y(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^8 h_i(\xi, \eta) \left[\frac{1+\zeta}{2} y_i^f + \frac{1-\zeta}{2} y_i^a \right], \\ z(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^8 h_i(\xi, \eta) \left[\frac{1+\zeta}{2} z_i^f + \frac{1-\zeta}{2} z_i^a \right]. \end{aligned} \right\}$$



Index a : untere Oberfläche ($\zeta = -1$)

Index f : obere Oberfläche ($\zeta = 1$)



Die Formfunktionen:
$$h_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1), \quad (i = 1, 3, 5, 7),$$

$$h_i = \frac{1}{2}(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2)(1 + \eta\eta_i - 1)(1 - \xi^2), \quad (i = 2, 4, 6, 8).$$

Die Formfunktionen sind aus den ebenen Aufgaben bekannt.

Die Formfunktionen des Schalelementes:

$$\left. \begin{aligned} h_i(\xi, \eta, \zeta) &= h_i(\xi, \eta) \frac{1 - \zeta}{2}, \\ h_{i+8}(\xi, \eta, \zeta) &= h_i(\xi, \eta) \frac{1 + \zeta}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, 8).$$

Beschreibung der Geometrie des Elementes in Matrizenform:

$$\begin{bmatrix} x(\xi, \eta, \zeta) \\ y(\xi, \eta, \zeta) \\ z(\xi, \eta, \zeta) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^8 h_i(\xi, \eta) \left\{ \frac{1 + \zeta}{2} \begin{bmatrix} x_i^f \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} + \frac{1 - \zeta}{2} \begin{bmatrix} x_i^a \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \right\}$$

Umformung:
$$x(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^8 h_i(\xi, \eta) \underbrace{\frac{x_i^f + x_i^a}{2}}_{x_{ik}} + \sum_{i=1}^8 h_i(\xi, \eta) \frac{\zeta}{2} \underbrace{(x_i^f - x_i^a)}_{x_{iaf}},$$

$$y(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^8 h_i(\xi, \eta) \underbrace{\frac{y_i^f + y_i^a}{2}}_{y_{ik}} + \sum_{i=1}^8 h_i(\xi, \eta) \frac{\zeta}{2} \underbrace{(y_i^f - y_i^a)}_{y_{iaf}},$$

$$z(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^8 h_i(\xi, \eta) \underbrace{\frac{z_i^f + z_i^a}{2}}_{z_{ik}} + \sum_{i=1}^8 h_i(\xi, \eta) \frac{\zeta}{2} \underbrace{(z_i^f - z_i^a)}_{z_{iaf}}.$$

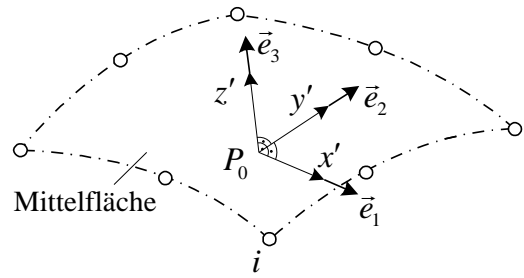
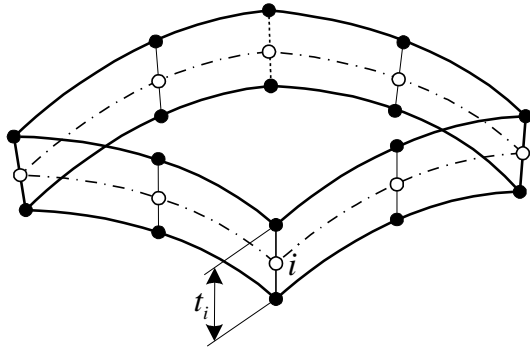
Zusammengefasst:
$$\vec{r}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^8 h_i(\xi, \eta) \left[\vec{r}_{ik} + \frac{\zeta}{2} \vec{r}_{iaf} \right], \quad |\vec{r}_{iaf}| \approx t_i.$$

Der Vektor \vec{r}_{iaf} gibt nur näherungsweise die Richtung der Normalen der Mittelfläche im Knotenpunkt i an.

Näherung des Verschiebungsfeldes:

Wir wollen das Verschiebungsfeld mit Hilfe der an die Mittelfläche gebundenen Kenngrößen aufschreiben. Die 3D-Aufgabe wird so auf eine 2D-Aufgabe reduziert.

Die Schale wird mit ihrer Mittelfläche modelliert und die mechanischen Kenngrößen werden an die Mittelfläche gebunden.



x', y' ist die Berührungsebene/ Tangentenebene und \vec{e}_3 ist der Normaleneinheitsvektor im Punkt P_0 .

Die Näherung des Verschiebungsfeldes:

$$\underline{\underline{u}}^e(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^8 h_i(\xi, \eta) \underline{\underline{q}}_{=ik} + \sum_{i=1}^8 h_i(\xi, \eta) \zeta \frac{t_i}{2} [\varphi_{y'_i} \vec{e}_{1i} - \varphi_{x'_i} \vec{e}_{2i}],$$

t_i - die Schalendicke im Knotenpunkt i ,

$\varphi_{x'}$ - die Verdrehung der Normalen um die x' -Achse,

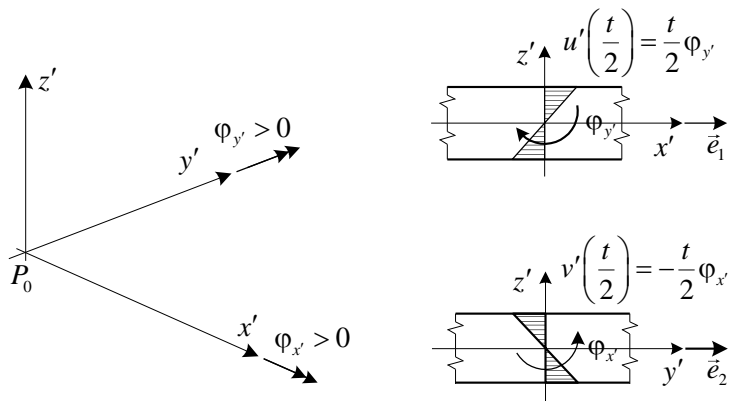
$\varphi_{y'}$ - die Verdrehung der Normalen um die y' -Achse.

$$\underline{\underline{u}}^e(\xi, \eta, \zeta) = \begin{bmatrix} u(\xi, \eta, \zeta) \\ v(\xi, \eta, \zeta) \\ w(\xi, \eta, \zeta) \end{bmatrix}^e, \quad \underline{\underline{q}}_{=ik} = \begin{bmatrix} u_{ik} \\ v_{ik} \\ w_{ik} \end{bmatrix},$$

u, v, w - sind die Verschiebungen eines beliebigen Punktes $P(x, y, z)$ im x, y, z -KS,

u_{ik}, v_{ik}, w_{ik} - Verschiebungen des Knotenpunktes i im x, y, z -KS.

Das Vorzeichen der Verdrehungen:



Der Knotenpunktverschiebungsvektor: $\underline{\underline{q}}_{=i}^e = \begin{bmatrix} \underline{\underline{q}}_{=ik} \\ \varphi_{x'_i} \\ \varphi_{y'_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \varphi_{x'_i} \\ \varphi_{y'_i} \end{bmatrix}.$

Die Freiheitsgrade des Elementes: $8 \times 5 = 40$.

Das Verschiebungsfeld:
$$\begin{bmatrix} u(\xi, \eta, \zeta) \\ v(\xi, \eta, \zeta) \\ w(\xi, \eta, \zeta) \end{bmatrix}^e = \sum_{i=1}^8 h_i(\xi, \eta) \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix}^e - \sum_{i=1}^8 h_i(\xi, \eta) \zeta \frac{t_i}{2} \begin{bmatrix} -e_{2x_i} & e_{1x_i} \\ -e_{2y_i} & -e_{1y_i} \\ e_{2z_i} & e_{1z_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{x_i'} \\ \phi_{y_i'} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{\underline{u}}^e(\xi, \eta, \zeta) = \underline{\underline{A}}^e(\xi, \eta, \zeta) \underline{\underline{q}}^e$$

$(3 \times 1) \qquad (3 \times 40) \qquad (40 \times 1)$

Der Block i der Approximationsmatrix:
$$\underline{\underline{A}}_i^e(\xi, \eta, \zeta) = \begin{bmatrix} h_i & 0 & 0 & h_i \frac{t_i}{2} \zeta e_{2x_i} & -h_i \frac{t_i}{2} \zeta e_{1x_i} \\ 0 & h_i & 0 & h_i \frac{t_i}{2} \zeta e_{2y_i} & -h_i \frac{t_i}{2} \zeta e_{1y_i} \\ 0 & 0 & h_i & h_i \frac{t_i}{2} \zeta e_{2z_i} & -h_i \frac{t_i}{2} \zeta e_{1z_i} \end{bmatrix}.$$

Bemerkungen:

- Die Beschreibung / Näherung der Geometrie in der Richtung der Dicke ist linear.
- Die Durchbiegung (Verschiebung senkrecht zur Mittelfläche) ist über die Dicke konstant.

⇓

- Das Schalenelement ist streng genommen nicht isoparametrisch.
- Zur Kopplung der Elemente an den Kanten muss man in diesem Fall auch eine Verdrehung $\phi_{z_i'}$ aufnehmen
 \Rightarrow die Näherung von u' und v' wird mittels zusätzlicher Glieder ergänzt.

Verzerrungen:
$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\xi, \eta, \zeta) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \end{bmatrix}.$$

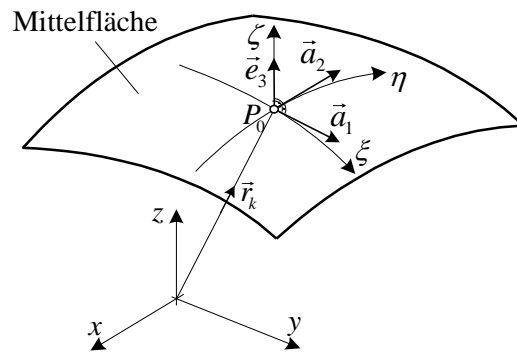
Spannungen:
$$\underline{\underline{\sigma}}^e(\xi, \eta, \zeta) = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{bmatrix} = \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{\varepsilon}}^e(\xi, \eta, \zeta).$$

Die Matrix der Materialkennwerte für isotropes Material:

$$\underline{\underline{C^e}} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & & \\ \nu & 1 & & 0 \\ & & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ & & & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Problem: $\left. \begin{array}{l} u'(\xi, \eta, \zeta) \\ v'(\xi, \eta, \zeta) \\ w'(\xi, \eta, \zeta) \end{array} \right\}$ Diese Felder stehen uns nicht zur Verfügung.

Definition des an die Mittelfläche gebundenen $x'y'z'$ - Koordinatensystems:



Der Ortsvektor \vec{r}_k zeigt zu einem beliebigen Punkt P_0 der Mittelfläche:

$$\vec{r}_k = x(\xi, \eta) \vec{e}_x + y(\xi, \eta) \vec{e}_y + z(\xi, \eta) \vec{e}_z.$$

Die Tangentenvektoren der Koordinatenlinien:

$$\vec{a}_1 = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \xi} \vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \xi} \vec{e}_z = a_{1x} \vec{e}_x + a_{1y} \vec{e}_y + a_{1z} \vec{e}_z,$$

$$\vec{a}_2 = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \eta} \vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \eta} \vec{e}_z = a_{2x} \vec{e}_x + a_{2y} \vec{e}_y + a_{2z} \vec{e}_z.$$

Die Berechnung der Tangentenvektoren:

$$\vec{a}_1 = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial h_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} x_i \vec{e}_x + \sum_{i=1}^8 \frac{\partial h_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} y_i \vec{e}_y + \sum_{i=1}^8 \frac{\partial h_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} z_i \vec{e}_z,$$

$$\vec{a}_2 = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial h_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} x_i \vec{e}_x + \sum_{i=1}^8 \frac{\partial h_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} y_i \vec{e}_y + \sum_{i=1}^8 \frac{\partial h_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} z_i \vec{e}_z.$$

Der Normaleneinheitsvektor der Mittelfläche: $\vec{e}_3 = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}$ - die Richtung der z' -Achse.

Die Einheitsvektoren der Tangentenebene:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{e}_1 = \vec{e}_x \times \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 \end{array} \right\} \text{ wenn } \vec{e}_3 \text{ parallel zur } y\text{-Achse ist .}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{e}_1 = \vec{e}_y \times \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 \end{array} \right\} \text{ wenn } \vec{e}_3 \text{ parallel zur } x\text{-Achse ist .}$$

Bemerkungen:

- Das $x'y'z'$ -KS ist elementunabhängig.
- Man braucht das $x'y'z'$ -KS zur Kopplung der Veränderlichen $\varphi_{x'}, \varphi_{y'}, \varphi_{z'}$ und zur Bildung der Verzerrungen.
- Man braucht die Transformationsbeziehung zwischen den xyz - und $x'y'z'$ -KS.

Transformationsbeziehung:
$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \cos(x'x) & \cos(y'x) & \cos(z'x) \\ \cos(x'y) & \cos(y'y) & \cos(z'y) \\ \cos(x'z) & \cos(y'z) & \cos(z'z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{1x} & e_{2x} & e_{3x} \\ e_{1y} & e_{2y} & e_{3y} \\ e_{1z} & e_{2z} & e_{3z} \end{bmatrix}.$$

Die Eigenschaften der Transformation:

- Die Transformationsmatrix ist ortsabhängig: $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}(x, y, z)$
- Die Transformationsmatrix ist eine orthogonale Matrix: $\underline{\underline{T}}^{-1} = \underline{\underline{T}}^T$.

Der Verschiebungsgradient-Tensor:

- im x, y, z -KS:
$$\underline{\underline{D}} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \circ \vec{e}_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \circ \vec{e}_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \circ \vec{e}_z,$$
- im x', y', z' -KS:
$$\underline{\underline{D}}' = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x'} \circ \vec{e}_1 + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y'} \circ \vec{e}_2 + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z'} \circ \vec{e}_3,$$
- im ξ, η, ζ -KS:
$$\hat{\underline{\underline{D}}} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi} \circ \vec{e}_\xi + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \eta} \circ \vec{e}_\eta + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \zeta} \circ \vec{e}_\zeta.$$

Beziehungen zwischen den Verschiebungsgradienten:

$$\hat{\underline{\underline{D}}}^T = \underline{\underline{J}} \underline{\underline{D}}^T \Rightarrow \underline{\underline{D}}^T = \underline{\underline{J}}^{-1} (\hat{\underline{\underline{D}}})^T, \underline{\underline{D}} = \hat{\underline{\underline{D}}} (\underline{\underline{J}}^{-1})^T.$$

Transformation der Spannungen:
$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \underline{\underline{T}} \begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{z'x'} & \tau_{z'y'} & \sigma_{z'} \end{bmatrix} \underline{\underline{T}}^T.$$

Die Spannungen braucht man eigentlich nicht in das x, y, z -KS zu transformieren, weil die Spannungen im x', y', z' -KS anschaulicher dargestellt werden können.

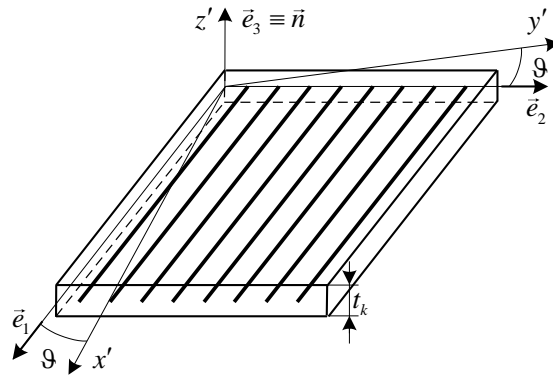
7.6. Geschichtetes Komposite-Schalenelement

Die Annahmen der klassischen Schichtungstheorie

- Die Schichten sind sehr dünn ($t_i \ll t$).
- Das Material der Schichten ist linear elastisch, homogen und orthotrop.
- Die Schichten sind im ESZ / Membranzustand.
- Zwischen den Schichten gibt es eine perfekte zweiseitige Haftung – es gibt weder Zwischenräume noch Verschiebungen / Trennung.
- Die geometrische / kinematische Annahme ist auch gültig: *Kirchoff-Love*, oder *Reissner-Mindlin*.

Es ist eine Näherungstheorie, die nicht widerspruchsfrei ist.

Mechanisches Modell einer orthotropen Schicht:



$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ - das materielle, an die dominante Faserrichtung gebundene KS,
 x', y', z' - das an die Mittelfläche gebundene KS.

Das Materialgesetz für eine orthotrope Schicht im materiellen Koordinaten-System:

$$\sigma_1 = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \varepsilon_1 + \frac{\nu_{12}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \varepsilon_2, \quad \sigma_2 = \frac{\nu_{21}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \varepsilon_1 + \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \varepsilon_2, \quad \tau_{12} = G_{12}\gamma_{12},$$

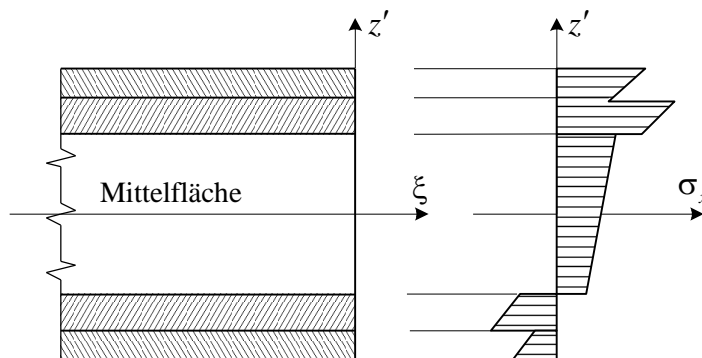
$$\left. \begin{aligned} \tau_{23} &= G_{23}\gamma_{23}, \\ \tau_{13} &= G_{13}\gamma_{13}. \end{aligned} \right\} \text{Nur bei der Reissner - Mindlichen - Theorie .}$$

Die Matrix der Materialkennwerte ist symmetrisch: $\frac{\nu_{12}}{E_2} = \frac{\nu_{21}}{E_1}$.

Unabhängige Materialkennwerte: $E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}, \underbrace{G_{23}, G_{23}}_{\text{Reissner - Mindlin}}$.

Bemerkungen:

- Es ist nicht sicher, dass die höchsten Spannungswerte an den Oberflächen $z' = \pm \frac{t}{2}$ auftreten. Die Spannungen muss man in jeder Schicht an den Grenzflächen bestimmen.
- Den Festigkeitsnachweis muss man für jede Schicht gesondert durchführen. Die üblichen Versagenskriterien kann man hier nicht benutzen.



Das Versagenskriterium nach Tsai-Wu:

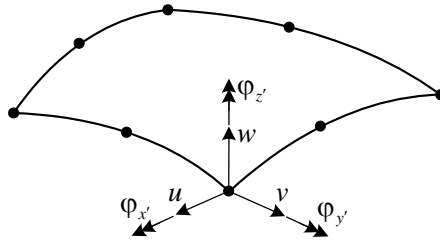
Eine Schicht versagt (in einem Punkt), wenn die folgende Beziehung gilt:

$$\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_{1H}\sigma_{1N}} \right) + \left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_{2H}\sigma_{2N}} \right) + \left(\frac{1}{\sigma_{1H}} - \frac{1}{\sigma_{1N}} \right) \sigma_1 + \left(\frac{1}{\sigma_{2H}} - \frac{1}{\sigma_{2N}} \right) \sigma_2 + \left(\frac{\tau_{12}}{\tau_{12S}} \right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{\tau_{23}}{\tau_{23S}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{13}}{\tau_{13S}} \right)^2 - \sqrt{\frac{1}{\sigma_{1H} \sigma_{1N}} \frac{1}{\sigma_{2H} \sigma_{2N}}} \sigma_1 \sigma_2 \geq 1$$

σ_{1H}, σ_{2H} - Zugfestigkeiten in den Richtungen 1 und 2,
 σ_{1N}, σ_{2N} - Druckfestigkeiten in den Richtungen 1 und 2,
 $\tau_{12S}, \tau_{23S}, \tau_{13S}$ - Schubfestigkeiten.

Geschichtetes Schalenelement:



Mechanisches Modell: ein Schalenelement an der Mittelfläche.

Die Bildung der Steifigkeitsmatrix des Schalenelementes:

$$\underline{\underline{K}}^e = \sum_{k=1}^n \int_{(A^e)} \int_{(t_k)} \left[\underline{\underline{B}}^e(x, y, z) \right]^T \underline{\underline{C}}_k^e \underline{\underline{B}}^e(x, y, z) dA \Bigg\} dz'$$

n - die Anzahl der Schichten,

$\underline{\underline{C}}_k^e$ - die Matrix der Materialkennwerte in der Schicht k ,

t_k - die Dicke der Schicht k ,

A^e - die Mittelfläche des Elementes.