

8. FINITE ELEMENTE LÖSUNG FÜR DYNAMIKAUFGABEN

8.1. Schwingungssysteme mit mehreren Freiheitsgraden

Freiheitsgrade: Anzahl der unabhängigen skalaren Koordinaten, die die momentane Lage, oder Bewegung des zu untersuchenden Systems eindeutig bestimmen.

Verallgemeinerte Koordinate: Die unabhängigen skalaren Koordinaten, die die momentane Lage, oder Bewegung des zu untersuchenden Systems eindeutig bestimmen.

Bezeichnung: q - Verschiebung oder Verdrehung,

$q = q(t)$ - die verallgemeinerte Koordinate ist eine nach der Zeit mindestens zweimal differenzierbare Funktion,

$$q(t) \Rightarrow \underbrace{\dot{q}(t)}_{\text{Koordinaten-Geschwindigkeit}} \Rightarrow \underbrace{\ddot{q}(t)}_{\text{Koordinaten-Beschleunigung}} .$$

Schwingung: Wenn die verallgemeinerte Koordinate q , die verallgemeinerte Geschwindigkeit \dot{q} , oder die verallgemeinerte Beschleunigung \ddot{q} während der Bewegung mehrmals das Vorzeichen wechseln.

Diskretes Schwingungssystem: Ein Schwingungssystem, die endlich viele Massenpunkte / Starrkörper und elastische Elemente enthält.

Bauteile: - Starrkörper oder Massenpunkt,
- Elastische Körper / Elemente \equiv Federn,
- Dämpfungselemente.

Kontinuumschwingungen: Schwingungen der elastischen Körper mit kontinuierlicher / stetiger Massenverteilung.

Bewegungsgleichungssystem der diskreten Schwingungssysteme:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_k} = Q_k \quad - \text{ das Lagrangesche Bewegungsgleichungssystem zweiter Art.}$$

$(k = 1, 2, \dots, n) \quad n$ - die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems.

8.2. Energieprinzipien für bewegliche Kontinua

Bei einer Bewegung sind alle Feldgrößen auch von der Zeit abhängig:

Das Verschiebungsfeld: $\vec{u}(\vec{r}, t)$.

Das Geschwindigkeitsfeld: $\vec{v}(\vec{r}, t)$.

Das Beschleunigungsfeld: $\vec{a}(\vec{r}, t)$.

Das *D'Alembert'sche* (d'Alembert)- Prinzip:

Die dynamischen Aufgaben können immer auf ein statisches Problem zurückgeführt werden, wenn man neben den äußeren Kräften auch Trägheitskräfte berücksichtigt, oder einleitet.

Bei einem Massenpunkt: $m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i \Rightarrow \vec{0} = \vec{F}_i - m_i \vec{a}_i$.

\vec{T}_i

Die Trägheitskraft: $\vec{T}_i = m_i \vec{a}_i$.

¹ Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) französischer Mathematiker und Philosoph.

Bei einem Kontinuum (Körper mit kontinuierlicher Massenverteilung): neben den Volumenkräften berücksichtigt man auch die Intensität der Trägheitskräfte.

$$\vec{q} \Rightarrow (\vec{q} - \vec{a}\rho), \quad \text{wobei } \vec{a} \text{ die Beschleunigung der elementaren Masse und } \rho \text{ die Massendichte sind.}$$

$$\text{Gleichgewichtsbedingung: } \underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \text{Bewegungsgleichung: } \underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \rho \vec{a}.$$

Das *D'Alembertsche* Prinzip enthält den Impulssatz (das II. *Newtonsche* Gesetz).

a) *Das Prinzip der virtuellen Leistung:*

Multiplizieren (skalare Multiplikation) wir die Bewegungsgleichung (den Impulssatz) mit der Variation des Geschwindigkeitsfeldes $\delta\vec{v}$ und integrieren den Ausdruck danach über das Volumen V des Körpers:

$$\int_{(V)} \delta\vec{v} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \nabla dV + \int_{(V)} \delta\vec{v} \cdot \vec{q} dV = \int_{(V)} \delta\vec{v} \cdot \vec{a} \rho dV$$

Nach der Umformung des ersten Integrals und nach der Anwendung des *Gaußschen-Ostrogradskyschen* Satzes erhält man:

$$\int_{(A_p)} \delta\vec{v} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} dA - \int_{(V)} \frac{1}{2} (\delta\vec{v} \circ \nabla + \nabla \circ \delta\vec{v}) \cdot \underline{\underline{F}} dV + \int_{(V)} \delta\vec{v} \cdot \vec{q} dV = \int_{(V)} \delta\vec{v} \cdot \vec{a} \rho dV$$

Wir berücksichtigen die Symmetrie des Spannungstensors $\underline{\underline{F}}$ und die Randbedingungen für die Variation des Geschwindigkeitsfeldes $\delta\vec{v} = \vec{0}$. Danach setzen wir das Hookesche Gesetz $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{D}}^{(4)} \cdot \underline{\underline{A}}$ in die Gleichung ein, wobei $\underline{\underline{D}}^{(4)}$ der Tensor vierten Grades der Materialkennwerte ist, und berücksichtigen die dynamischen Randbedingungen $\vec{p}_0 = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}$.

$$\int_{(A_p)} \delta\vec{v} \cdot \vec{p}_0 dA - \int_{(V)} \frac{1}{2} (\delta\vec{v} \circ \nabla + \nabla \circ \delta\vec{v}) \cdot \underline{\underline{D}}^{(4)} \cdot \underline{\underline{A}} dV + \int_{(V)} \delta\vec{v} \cdot \vec{q} dV = \int_{(V)} \delta\vec{v} \cdot \vec{a} \rho dV.$$

Diese Gleichung ist die schwache Variationsformulierung der dynamischen Aufgabe, die Formulierung des Prinzips der virtuellen Leistung.

b) *Zwangsbedingungen (diese Bewegungen sind in der Ingenieurpraxis üblich)*

Definition: Man spricht von einer Zwangsbedingung, wenn ein bestimmter Zusammenhang zwischen den verallgemeinerten Koordinaten besteht, die die Lage beziehungsweise die Bewegung des zu untersuchenden Systems eindeutig bestimmen.

Zwangsbedingungen: eine Funktion zwischen den verallgemeinerten Koordinaten, die die Lage beziehungsweise die Bewegung des zu untersuchenden Systems eindeutig bestimmen.

$$f_p(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, k).$$

Klassifizierung der Zwangsbedingungen:

- *Holonomie:* enthalten nur die verallgemeinerten Koordinaten und nicht die verallgemeinerten Geschwindigkeiten.
- *Anholonomie:* enthalten sowohl die verallgemeinerten Koordinaten als auch die verallgemeinerten Geschwindigkeiten.
- *Reonome:* enthalten auch die Zeit.
- *Skleronome:* enthalten die Zeit nicht.

Bei Ingenieuraufgaben kommen meistens holonome und skleronome Zwangsbedingungen vor.

8.3. Anwendung der Finite-Elemente-Methode – das Bewegungsgleichungssystem und seine Lösung

a) Aufbau des Bewegungsgleichungssystems:

- Annäherung für:
- das Verschiebungsfeld: $\underline{u}^e(X,t) = \underline{A}^e(X) \underline{q}^e(t)$,
 - das Geschwindigkeitsfeld: $\underline{v}^e(X,t) = \underline{A}^e(X) \underline{\dot{q}}^e(t)$,
 - das Beschleunigungsfeld: $\underline{a}^e(X,t) = \underline{A}^e(X) \underline{\ddot{q}}^e(t)$,
 - die Variation des Geschwindigkeitsfeldes: $\delta \underline{v}^e(X) = \underline{A}^e(X) \delta \underline{\dot{q}}^e$.

Nach dem Einsetzen in die schwache Formulierung des Prinzipes für ein finites Element unter Benutzung der vorherigen Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} & \left(\delta \underline{\dot{q}}^e \right)^T \underbrace{\int_{(A_p^e)} [\underline{A}(X)]^T \underline{p}_0(X) dA}_{\underline{f}_{=p}^e - \text{Flächenkräfte}} - \left(\delta \underline{\dot{q}}^e \right)^T \underbrace{\int_{(V)} [\underline{B}^e(X)]^T \underline{C} \underline{B}^e(X) dV}_{\underline{K}^e - \text{Steifigkeitsmatrix}} \underline{q}^e(t) + \\ & + \left(\delta \underline{\dot{q}}^e \right)^T \underbrace{\int_{(V)} [\underline{A}(X)]^T \underline{q}(X) dV}_{\underline{f}_{=q}^e - \text{Volumenkräfte}} = \left(\delta \underline{\dot{q}}^e \right)^T \underbrace{\int_{(V)} [\underline{A}(X)]^T \underline{A}(X) \rho dV}_{\underline{M}^e - \text{Massenmatrix}} \underline{\ddot{q}}^e(t) \end{aligned}$$

Die obige Gleichung kurz / kompakt geschrieben: $\left(\delta \underline{\dot{q}}^e \right)^T \left(\underline{M}^e \underline{\ddot{q}}^e + \underline{K}^e \underline{q}^e - \underline{f}_{=p}^e - \underline{f}_{=q}^e \right) = 0$.

Nach der Summation für alle Elemente der Konstruktion / des Körpers und nach der Berücksichtigung der Randbedingungen erhält man die Gleichung:

$$\left(\delta \underline{\dot{q}} \right)^T \left(\underline{M} \underline{\ddot{q}} + \underline{K} \underline{q} - \underline{f}_{=p} - \underline{f}_{=q} \right) = 0.$$

Da die Variation des Geschwindigkeitsfeldes nicht Null sein darf, muss der Ausdruck in Klammern gleich Null sein:

$$\underline{M} \underline{\ddot{q}} + \underline{K} \underline{q} = \underline{f}_{=p} + \underline{f}_{=q}.$$

Diese Matrixgleichung ist ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem für die unbekannt Funktionen $q_i(t)$.

Die Massenmatrix des Körpers: $\underline{M} = \begin{bmatrix} \sum_{e \in 1,1} \underline{M}_{=11}^e & \sum_{e \in 1,2} \underline{M}_{=12}^e & \cdots & \sum_{e \in 1,j} \underline{M}_{=1j}^e & \cdots & \sum_{e \in 1,N} \underline{M}_{=1N}^e \\ \sum_{e \in 2,1} \underline{M}_{=21}^e & \sum_{e \in 2,2} \underline{M}_{=22}^e & \cdots & \sum_{e \in 2,j} \underline{M}_{=2j}^e & \cdots & \sum_{e \in 2,N} \underline{M}_{=2N}^e \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{e \in i,1} \underline{M}_{=i1}^e & \sum_{e \in i,2} \underline{M}_{=i2}^e & \cdots & \sum_{e \in i,j} \underline{M}_{=ij}^e & \cdots & \sum_{e \in i,N} \underline{M}_{=iN}^e \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix},$

wobei N die Anzahl der Knotenpunkte des Körpers und

$\underline{M}_{=ij}^e$ der zu den Knotenpunkten i, j gehörende Block der Massenmatrix des Elementes e .

b) Die Lösung des Bewegungsgleichungssystems:

Das zu lösende Gleichungssystem: $\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{K}}\underline{q} = \underline{f}(t)$.

$\underline{q}(t)$ - eine Spaltenmatrix, die n unbekannt Funktionen enthält (n ist die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems)

Lösungsmethoden: 1. Direkte Integration.

2. Eigenvektorsuperpositions-Verfahren / Modenüberlagerungsmethode.

1. Direkte integration: die Bewegungsgleichung wird mit einem numerischen Schritt-für-Schritt-Verfahren integriert.

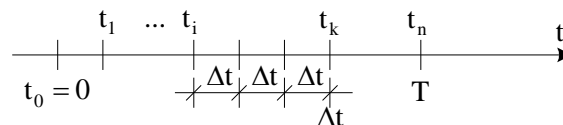
Direkt bedeutet hier, dass die Bewegungsgleichung vor der Integration nicht in eine andere Form transformiert wird.

Grundgedanke: nicht die Funktion $q(t)$ selbst, sondern die diskrete Funktionswerte $\underline{q}(t_1), \underline{q}(t_2), \dots$ in den gegebenen Zeitpunkten t_1, t_2, \dots werden ermittelt. (Wir diskretisieren die Funktion in Bezug auf die Zeit.)

1.a. Die zentrale Differenzenmethode:

Wir wollen die Lösung im Intervall $\langle t_0 = 0, t_n = T \rangle$ darstellen.

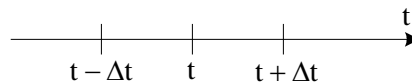
Auf der t -Achse nehmen wir das Zeitintervall auf:



Hier ist n - die Anzahl der Zeitschritte und $\Delta t = \frac{T}{n}$ ist die Länge / die Größe der Zeitschritte.

Annahme: die Anfangsbedingungen $\underline{q}(t_0) = \underline{q}^0, \dot{\underline{q}}(t_0) = \dot{\underline{q}}^0$ sind bekannt.

Man führt statt der Differentialquotienten endliche / finite Differenzenquotienten ein (Näherung:



Differenzen für die erste Ableitung:

- die zentrale Differenz: $\dot{\underline{q}} \approx \frac{1}{2\Delta t} (\underline{q}^{t+\Delta t} - \underline{q}^{t-\Delta t})$,

- die rechtseitige Differenz: $\dot{\underline{q}}_j \approx \frac{1}{\Delta t} (\underline{q}^{t+\Delta t} - \underline{q}^t)$,

- die linkseitige Differenz: $\dot{\underline{q}}_b \approx \frac{1}{\Delta t} (\underline{q}^t - \underline{q}^{t-\Delta t})$.

Differenz für die zweite Ableitung:

$$\ddot{\underline{q}} \approx \frac{1}{\Delta t} \left[\dot{\underline{q}}_j - \dot{\underline{q}}_b \right] = \frac{1}{(\Delta t)^2} (\underline{q}^{t+\Delta t} - 2\underline{q}^t + \underline{q}^{t-\Delta t})$$

Nach dem Einsetzen der zweiten Differenz in die Bewegungsgleichung erhält man eine Rekursionsformel:

$$\frac{1}{(\Delta t)^2} \underline{\underline{M}} \underline{\underline{q}}^{t+\Delta t} = \underline{\underline{f}}^t + \left(\underline{\underline{K}} - \frac{2}{(\Delta t)^2} \underline{\underline{M}} \right) \underline{\underline{q}}^t - \frac{1}{(\Delta t)^2} \underline{\underline{M}} \underline{\underline{q}}^{t-\Delta t}$$

$$\Downarrow$$

Aus dieser Gleichung kann man $\underline{\underline{q}}^{t+\Delta t}$ berechnen, wenn die Werte $\underline{\underline{q}}^t$ und $\underline{\underline{q}}^{t-\Delta t}$ bekannt sind.

Problem: am Anfang steht nur der Wert $\underline{\underline{q}}^0$ zur Verfügung und $\underline{\underline{q}}^{-1}$ existiert nicht.

Startbedingung: es sind die Formeln der zentralen Differenz und der zweiten Differenz für den Zeitpunkt $t = t_0 = 0$ anzuwenden.

$$\left. \begin{array}{l} t + \Delta t = \Delta t \\ t = t_0 = 0 \\ t - \Delta t = -\Delta t \end{array} \right\}$$

$$\underline{\underline{q}}^{-1} = \underline{\underline{q}}^0 - \Delta t \underline{\underline{\dot{q}}}^0 + \frac{(\Delta t)^2}{2} \underline{\underline{\ddot{q}}}^0,$$

wobei man den Wert $\underline{\underline{\ddot{q}}}^0$ mit Hilfe der Gleichung $\underline{\underline{M}} \underline{\underline{\ddot{q}}}^0 + \underline{\underline{M}} \underline{\underline{q}}^0 = \underline{\underline{f}}_p + \underline{\underline{f}}_q$ ermitteln kann.

Die direkte Integrationsmethode ist eine bedingt stabile Vorgehensweise.

Unbedingt stabile Integration: Man erhält auch in dem Fall eine finite Grenze für die Lösung, wenn man bei beliebigen Anfangsbedingungen einen beliebigen, im Vergleich zu T großen Δt -Schritt wählt.

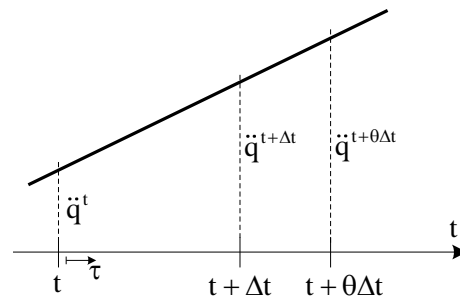
Bedingt stabile Integration: Wenn die obige Feststellung nur in dem Fall $\Delta t \leq \Delta t_{kr}$ erfüllt ist.

$\Delta t \leq \Delta t_{kr} = \frac{T_n}{\pi}$, wobei T_n die kleinste Periodenzeit des Körpers mit n -Freiheitsgraden ist.

1.b. Die Wilsonsche θ Methode

Annahme:

Die zweite Ableitung $\underline{\underline{\ddot{q}}}$ ist eine lineare Funktion der Zeit t .



Die lineare Änderung zu einem beliebigen Zeitpunkt $(t + \tau)$: $\underline{\underline{\ddot{q}}}^{t+\tau} = \underline{\underline{\ddot{q}}}^t \frac{\tau}{\theta \Delta t} (\underline{\underline{\ddot{q}}}^{t+\theta \Delta t} - \underline{\underline{\ddot{q}}}^t)$.

Integration des obigen Zusammenhanges nach der Veränderlichen τ :

$$\underline{\underline{\dot{q}}}^{t+\tau} = \underline{\underline{\dot{q}}}^t + \underline{\underline{\ddot{q}}}^t \tau + \frac{\tau^2}{2\theta \Delta t} (\underline{\underline{\ddot{q}}}^{t+\theta \Delta t} - \underline{\underline{\ddot{q}}}^t),$$

$$\underline{\underline{q}}^{t+\tau} = \underline{\underline{q}}^t + \underline{\underline{\dot{q}}}^t \tau + \frac{1}{2} \underline{\underline{\ddot{q}}}^t \tau^2 + \frac{\tau^3}{6\theta \Delta t} (\underline{\underline{\ddot{q}}}^{t+\theta \Delta t} - \underline{\underline{\ddot{q}}}^t).$$

Für den Zeitschritt wird hier nicht Δt , sondern $\theta \Delta t$ gewählt.

Nach dem Einsetzen von $\tau = (\theta \Delta t)$ in die vorherigen zwei Zusammenhänge:

$$\left. \begin{aligned} \underline{\underline{\dot{q}}}^{t+\theta\Delta t} &= \underline{\underline{\dot{q}}}^t + \frac{\theta\Delta t}{2} \left(\underline{\underline{\ddot{q}}}^{t+\theta\Delta t} - \underline{\underline{\ddot{q}}}^t \right), \\ \underline{\underline{q}}^{t+\theta\Delta t} &= \underline{\underline{q}}^t + \underline{\underline{\dot{q}}}^t \theta\Delta t + \frac{\theta^2 \Delta t^2}{6} \left(\underline{\underline{\ddot{q}}}^{t+\theta\Delta t} + 2\underline{\underline{\ddot{q}}}^t \right). \end{aligned} \right\}$$

Aus diesen zwei Gleichungen kann man $\underline{\underline{\ddot{q}}}^{t+\theta\Delta t}$ und $\underline{\underline{\dot{q}}}^{t+\theta\Delta t}$ mittels $\underline{\underline{q}}^{t+\theta\Delta t}$ ausdrücken:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\dot{q}}}^{t+\theta\Delta t} &= \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} \left(\underline{\underline{q}}^{t+\theta\Delta t} - \underline{\underline{q}}^t \right) - \frac{6}{\theta\Delta t} \left(\underline{\underline{\dot{q}}}^t - 2\underline{\underline{\ddot{q}}}^t \right), \\ \underline{\underline{\ddot{q}}}^{t+\theta\Delta t} &= \frac{3}{\theta\Delta t} \left(\underline{\underline{\dot{q}}}^{t+\theta\Delta t} - \underline{\underline{\dot{q}}}^t \right) - 2\underline{\underline{\ddot{q}}}^t - \frac{\theta\Delta t}{2} \underline{\underline{\ddot{q}}}^t. \end{aligned}$$

Weitere Annahme: auch die Belastung ändert sich linear:

$$\underline{\underline{f}}^{t+\theta\Delta t} = \underline{\underline{f}}^t + \theta \left(\underline{\underline{f}}^{t+\theta\Delta t} - \underline{\underline{f}}^t \right).$$

Nehmen wir die Bewegungsgleichung im Zeitpunkt $(t + \theta\Delta t)$ an:

$$\underline{\underline{M}} \underline{\underline{\ddot{q}}}^{t+\theta\Delta t} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{q}}^{t+\theta\Delta t} = \underline{\underline{f}}^{t+\theta\Delta t}.$$

Die Vorgehensweise:

- Setzen wir $\underline{\underline{\ddot{q}}}^{t+\theta\Delta t}$ in die Bewegungsgleichung ein, erhalten wir für die Unbekannten $\underline{\underline{q}}^{t+\theta\Delta t}$ ein lineares algebraisches Gleichungssystem.
 - Wenn man die Lösung des Gleichungssystems zurücksetzt, kann man $\underline{\underline{\dot{q}}}^{t+\theta\Delta t}$ und $\underline{\underline{\ddot{q}}}^{t+\theta\Delta t}$ erhalten.
- Wenn man $\tau = \Delta t$ in die ersten drei Gleichungen einsetzt, ergeben sich auch die Werte $\underline{\underline{q}}^{t+\Delta t}$, $\underline{\underline{\dot{q}}}^{t+\Delta t}$ und $\underline{\underline{\ddot{q}}}^{t+\Delta t}$.

Startbedingung: man muss die Werte $\underline{\underline{q}}^0, \underline{\underline{\dot{q}}}^0$ und $\underline{\underline{\ddot{q}}}^0$ kennen. Es ist keine Startbedingung nötig.

Das Verfahren ist eine bedingt stabile Vorgehensweise, wenn: $\theta \geq 1,37$

In der Praxis benutzt man üblicherweise $\theta = 1,4$.

Die Anzahl der erforderlichen Operationen pro Zeitschritt ist bei den Methoden 1.a. und 1.b.: $\alpha m_k n$ (Schätzung)

- n - die Freiheitsgrade des Systems,
- m_k - die halbe Bandbreite der Steifigkeismatrix $\underline{\underline{K}}$,
- $\alpha \geq 2$.

2. Eigenvektorsuperposition-Verfahren / Modenüberlagerungsmethode

Wir wollen die Anzahl der Operationen so vermindern, dass die Koeffizientenmatrices der Bewegungsgleichung auf eine diagonale Matrix transformiert werden.

Einführung der Transformation: $\underline{\underline{q}}(t) = \underline{\underline{P}} \underline{\underline{x}}(t)$,

wobei $\underline{\underline{P}}$ eine $(n \times n)$ Matrix (jetzt noch unbekannte Matrix) und

$\underline{\underline{x}}(t)$ eine Spaltenmatrix, die die neuen Veränderlichen enthält, sind.

Multiplizieren wir die Bewegungsgleichung von der linken Seite mit $\underline{\underline{P}}^T$:

$$\underbrace{\underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{P}} \underline{\underline{P}}^T}_{\underline{\underline{M}}} \underline{\underline{\ddot{q}}}(t) + \underbrace{\underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{P}} \underline{\underline{P}}^T}_{\underline{\underline{K}}} \underline{\underline{q}}(t) = \underbrace{\underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{f}}(t)}_{\underline{\underline{f}}},$$

Hier wurde ausgenutzt, dass die Transformationsmatrix $\underline{\underline{P}}$ eine orthogonale Matrix ist: $\underline{\underline{P}}^T = \underline{\underline{P}}^{-1}$.

In Kurzschreibweise: $\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{\underline{x}}}(t) + \underline{\underline{K}}\underline{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{f}}(t)$.

Man sucht die Transformationsmatrix $\underline{\underline{P}}$, die die Bandbreite der Matrizen $\underline{\underline{M}}$ und $\underline{\underline{K}}$ optimal vermindert.

Verfahren zum Finden / zur Bestimmung der Transformationsmatrix $\underline{\underline{P}}$:

Die Bewegungsgleichung eines ungedämpften freien Schwingungssystems: $\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{\underline{q}}} + \underline{\underline{K}}\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{0}}$.

Die Lösung: $\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{\varphi}} \sin \alpha t$, vagy $\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{\varphi}} \cos \alpha t$.

Nach dem Einsetzen in das Bewegungsgleichungssystem: $(-\alpha^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}})\underline{\underline{\varphi}} = \underline{\underline{0}}$.

Aus der Eigenwertaufgabe erhält man der Anzahl der Systemfreiheitsgrade entsprechend viele Eigenfrequenzen und Eigenvektoren / Moden.

Lösung der Eigenwertaufgabe: Eigenfrequenzen und Eigenvektoren / Moden.

Bezeichnung: $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$, wobei α_i die i -te Eigenfrequenz ist.

$(\alpha_1 \underline{\underline{\varphi}}_1), (\alpha_2 \underline{\underline{\varphi}}_2), (\alpha_3 \underline{\underline{\varphi}}_3) \dots (\alpha_n \underline{\underline{\varphi}}_n)$, wobei

$\underline{\underline{\varphi}}_i$ der zur i -ten Eigenfrequenz gehörende Eigenvektor ist.

Die Eigenvektoren sind bezüglich der Massenmatrix $\underline{\underline{M}}$ normiert und orthogonal (orthonormiert):

$$\underline{\underline{\varphi}}_i^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\varphi}}_j \begin{cases} = 1, & \text{wenn } i = j, \\ = 0, & \text{wenn } i \neq j. \end{cases}$$

Einführung neuer Matrizen:

$$\underline{\underline{\phi}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\varphi}}_1 & \underline{\underline{\varphi}}_2 & \dots & \underline{\underline{\varphi}}_n \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\Omega}}^2 = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & & & \\ & \alpha_2^2 & & \\ & & \alpha_3^2 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \alpha_n^2 \end{bmatrix} \text{ - eine diagonale Matrix.}$$

$$\text{Die Eigenwertaufgabe: } \underline{\underline{\phi}}^T / \begin{cases} -\underline{\underline{M}}\underline{\underline{\phi}}\underline{\underline{\Omega}}^2 + \underline{\underline{K}}\underline{\underline{\phi}} = \underline{\underline{0}}, \\ -\underbrace{\underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\phi}}}_{\underline{\underline{E}}}\underline{\underline{\Omega}}^2 + \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\phi}} = \underline{\underline{0}}. \end{cases}$$

⇓

$$\underline{\underline{\Omega}}^2 = \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\phi}}.$$

Nehmen wir die folgende Transformation: $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{\phi}} \Rightarrow \underline{\underline{q}}(t) = \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{x}}(t)$.

Nach dem Einsetzen in die Bewegungsgleichung: $\ddot{\underline{\underline{x}}}(t) + \underline{\underline{\Omega}}^2 \underline{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{f}}(t) = \underline{\underline{r}}(t)$.

Anfangsbedingungen: $\underline{\underline{x}}^0 = \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{q}}^0, \quad \dot{\underline{\underline{x}}}^0 = \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{M}} \dot{\underline{\underline{q}}}^0$.

Die Koeffizientenmatrix von $\ddot{\underline{\underline{x}}}(t)$ ist eine Einheitsmatrix und die Koeffizientenmatrix von $\underline{\underline{x}}(t)$ ist eine Diagonalmatrix.

⇓

Das Bewegungsgleichungssystem zerfällt so in n , voneinander unabhängigen Differentialgleichungen. Diese Differentialgleichungen löst man gesondert:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_i(t) + \alpha_i^2 x_i(t) &= r_i(t), \\ r_i(t) &= \underline{\underline{\varphi}}_i^T f(t). \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Anfangsbedingungen: $x_i|_{t=0} = \underline{\underline{\varphi}}_i^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{q}}^0, \quad \dot{x}_i|_{t=0} = \underline{\underline{\varphi}}_i^T \underline{\underline{M}} \dot{\underline{\underline{q}}}^0.$

Die allgemeine Lösung für die einzelnen Differentialgleichungen:

$$x_i(t) = \underbrace{a_i \sin \alpha_i t + b_i \cos \alpha_i t}_{\text{homogene Lösung}} + \underbrace{\frac{1}{\alpha_i} \int_{\tau=0}^t r_i(\tau) \sin \alpha_i(t-\tau) d\tau}_{\text{partikuläre Lösung}}.$$

Lösung der ursprünglichen Aufgabe: $\underline{\underline{q}}(t) = \sum_{i=1}^n \underline{\underline{\varphi}}_i x_i(t).$

$\underline{\underline{\varphi}}_i$ - Eigenvektoren / Moden.

Der Gedankengang der Modenüberlagerungsmethode:

- Lösung des Eigenwertproblem: Eigenwerte / Eigenfrequenzen, Eigenvektoren / Moden.
- Lösung des zerfallenen Bewegungsgleichungssystems.
- Superposition der vorherigen Lösungen.

8.4. Anwendung der FEM zur Lösung von Schwingungsaufgaben

Erregung (Krafterregung): die Belastung des zu untersuchenden Systems ändert sich periodisch mit der Zeit. Erregung \equiv periodische Belastung.

a) *Harmonische Erregung:*

Bewegungsgleichung: $\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{\underline{q}}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{q}} = \underline{\underline{f}}_0 \cos \omega t,$

wobei f_0 die Amplituden der Erregung enthält und ω die Kreisfrequenz der Erregung ist.

Das Finden der Lösung: $\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{q}}_0 \cos \omega t.$

$\underline{\underline{q}}_0$ - die Schwingungsamplituden in den Knotenpunkten.

Nach dem Einsetzen der Lösung in das Bewegungsgleichungssystem:

$$\underbrace{(-\omega^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}})}_{\underline{\underline{Z}}(\omega^2)} \underline{\underline{q}}_0 = \underline{\underline{f}}_0, \quad \text{wobei } \underline{\underline{Z}}(\omega^2) \text{ die dynamische Steifigkeitsmatrix ist.}$$

$\underline{\underline{Z}}(\omega^2) \underline{\underline{q}}_0 = \underline{\underline{f}}_0$ - ein lineares algebraisches Gleichungssystem für die Amplituden der Knotenpunktverschiebungen.

Lösung des Gleichungssystems: $\underline{\underline{q}}_0 = [\underline{\underline{Z}}(\omega^2)]^{-1} \underline{\underline{f}}_0.$

Voraussetzung für die Lösung: $\omega^2 \neq \alpha_i^2, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n).$

b) *Freie Schwingungen, Eigenwertaufgabe:*

Definition der freien Schwingung: $\underline{\underline{f}}(t) = \underline{\underline{0}}.$

Das Bewegungsgleichungssystem einer freien ungedämpften Schwingung: $\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{\underline{q}}}(t) + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{q}}(t) = \underline{\underline{0}}.$

Die Spaltenmatrix $\underline{q}(t)$ enthält n unbekannte verallgemeinerte Verschiebungsfunktionen.

Die Lösung: $\underline{q} = \underline{\varphi} \sin \alpha t$, wobei $\underline{\varphi}$ der Eigenvektor / die Mode und α die Eigenkreisfrequenz sind.

Nach dem Einsetzen der Lösung in das Bewegungsgleichungssystem:

$$(-\alpha^2 \underline{M} + \underline{K}) \underline{\varphi} = \underline{0}.$$

Man erhält ein homogenes lineares algebraisches Gleichungssystem für die Koordinaten von $\underline{\varphi}$.

Voraussetzung für die Existenz der nichttrivialen Lösung: $\det[\underline{K} - \alpha^2 \underline{M}] = p(\alpha^2) = 0$.

$p(\alpha^2)$ das charakteristische Polynom (ein Polynom n -ten Grades für die Veränderliche α^2).

Die Wurzeln des charakteristischen Polynoms sind die Eigenkreisfrequenzen des Schwingungssystems:

$$0 \leq \alpha_1^2 \leq \alpha_2^2 \leq \dots \leq \alpha_m^2.$$

α_i^2 ist eine positive reale Zahl, wenn die Matrizen \underline{K} und \underline{M} positiv definite Matrizen sind.

Zu jeder Eigenkreisfrequenz gehört ein Eigenvektor:

$$(\underline{K} - \alpha_i^2 \underline{M}) \underline{\varphi}_i = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \underline{\varphi}_i = \dots, \text{ wobei } (i=1, 2, \dots, n).$$

c) *Der Orthogonalitätssatz:*

Nehmen wir an, dass $\alpha_i \neq \alpha_j$.

Zu jeder Eigenkreisfrequenz gehört ein Eigenvektor: $\alpha_i \Rightarrow \underline{\varphi}_i$, und $\alpha_j \Rightarrow \underline{\varphi}_j$.

Bemerkung: wenn man $\underline{\varphi}_i, \underline{\varphi}_j$ mit Konstanten multipliziert, erhält man auch Eigenvektoren.

$$\begin{aligned} \underline{\varphi}_j^T / \underline{K} \underline{\varphi}_i &= \alpha_i^2 \underline{\varphi}_j^T \underline{M} \underline{\varphi}_i & \Rightarrow & \quad \underline{\varphi}_j^T \underline{K} \underline{\varphi}_i = \alpha_i^2 \underline{\varphi}_j^T \underline{M} \underline{\varphi}_i, \\ \underline{\varphi}_i^T / \underline{K} \underline{\varphi}_j &= \alpha_j^2 \underline{\varphi}_i^T \underline{M} \underline{\varphi}_j & \Rightarrow & \quad \underline{\varphi}_i^T \underline{K} \underline{\varphi}_j = \alpha_j^2 \underline{\varphi}_i^T \underline{M} \underline{\varphi}_j. \end{aligned}$$

Da die Matrizen \underline{K} und \underline{M} symmetrisch sind, gelten die Zusammenhänge $\underline{K} = \underline{K}^T$ und $\underline{M} = \underline{M}^T$.

$$0 = (\alpha_i^2 - \alpha_j^2) \underline{\varphi}_i^T \underline{M} \underline{\varphi}_j.$$

Wenn $\alpha_i \neq \alpha_j$ ($i \neq j$) $\Rightarrow \underline{\varphi}_i^T \underline{M} \underline{\varphi}_j = 0$.

Die Eigenvektoren sind in Bezug auf die Massenmatrix orthogonal.

Wenn $\alpha_i = \alpha_j$ ($i = j$), dann gilt $\underline{\varphi}_i^T \underline{M} \underline{\varphi}_i = 1$.

Die Eigenvektoren sind in Bezug auf die Massenmatrix normiert.

Die Analogie der „normiert“ Eigenschaft im 3D Vektorraum:

Forderung: Der Vektor muss ein Einheitsvektor sein.

Die zweite Bedingung gibt den Eigenvektor $\underline{\varphi}_i$ eindeutig an.

Nehmen wir an, dass $i = j$.

$$\underline{\varphi}_i^T \underline{K} \underline{\varphi}_i = \alpha_i^2 \underbrace{\underline{\varphi}_i^T \underline{M} \underline{\varphi}_i}_{=1} \quad \Rightarrow \quad \alpha_i^2 = \underline{\varphi}_i^T \underline{K} \underline{\varphi}_i.$$

Im Kenntnis des Eigenvektors $\underline{\varphi}_i$ kann man die Eigenfrequenz α_i bestimmen.

Die Verallgemeinerung des Ergebnisses:

Eingeführt werden: $\underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\varphi}}_1 & \underline{\underline{\varphi}}_2 & \dots & \underline{\underline{\varphi}}_n \end{bmatrix},$

$$\underline{\underline{\Omega}}^2 = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n^2 \end{bmatrix}.$$

n - die Freiheitsgrade des Systems.

$$\underline{\underline{\Phi}}^T / -\underline{\underline{M}}\underline{\underline{\Phi}}\underline{\underline{\Omega}} + \underline{\underline{K}}\underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{0}}.$$

$$-\underbrace{\underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Phi}}}_{\underline{\underline{E}}}\underline{\underline{\Omega}} + \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{0}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\Omega}}^2 = \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\Phi}}.$$

Wenn die Anzahl n der Eigenvektoren des Systems bekannt ist, dann kann man jede Eigenfrequenz bestimmen.