SZÉCHENYI ISTVÁN UNIVERSITÄT
FAKULTÄT FÜR MASCHINENBAU,
INFORMATIK UND ELEKTROTECHNIK

LEHRSTUHL FÜR
ANGEWANDTE MECHANIK

ELASTIZITÄTSLEHRE	**Theoretische Fragen und Antworten für Studenten der Ingenieur-Masterstudiengänge**

1. Geben Sie die Definition und die Eigenschaften eines Tensors an!

Definition: Der Tensor ist eine Abbildung (Zuordnung), die durch eine homogene lineare Vektor-Vektor-Funktion realisiert ist.

$$\vec{w} = f\left(\vec{v}\right) = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{v} \, .$$

Die Eigenschaften des Tensors:

- Homogen linear: Wenn ein Vektor als eine lineare Kombination zweier Vektoren gebildet wird, dann sind die Linearkombinationen des Vektors $\vec{v}$ und des Bildvektors $\vec{w}$ gleich.

  Wenn $\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$ und $\vec{w}_1 = f(\vec{v}_1)$, $\vec{w}_2 = f(\vec{v}_2)$, dann

  $$\vec{w} = f(\vec{v}) = f(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 f(\vec{v}_1) + \lambda_2 f(\vec{v}_2) = \lambda_1 \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{w}_2 \, .$$

  In dem Zusammenhang sind λ_1 und λ_2 beliebige skalare Koeffizienten.

  Folge: Die Abbildung ordnet einem Null-Vektor einen weiteren Null-Vektor zu: $\vec{0} = f(\vec{0})$.

- Der Tensor ist eine vom Koordinatensystem unabhängige, physikalische (geometrische, mechanische) Größe.

2. Schreiben Sie die Berechnungsregel der dyadischen Multiplikation zweier Vektoren in kartesischen Koordinaten auf!

$$\left[\vec{a} \circ \vec{b}\right] = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x\, b_x & a_x\, b_y & a_x\, b_z \\ a_y\, b_x & a_y\, b_y & a_y\, b_z \\ a_z\, b_x & a_z\, b_y & a_z\, b_z \end{bmatrix} .$$

3. Geben Sie die Bildungsregel des Tensors in kartesischen Koordinaten im 3D-Fall an!

Jeder Tensor kann im 3D-Fall mit drei, zueinander senkrechten Einheitsvektoren und mit ihren Bildvektoren (drei Wertepaare) eindeutig angegeben werden.

Bekannt sind drei Wertepaare:

$$\vec{e}_x \rightarrow \vec{a} = f(\vec{e}_x), \qquad \vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z ,$$
$$\vec{e}_y \rightarrow \vec{b} = f(\vec{e}_y), \qquad \vec{b} = b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z ,$$
$$\vec{e}_z \rightarrow \vec{c} = f(\vec{e}_z), \qquad \vec{c} = c_x \vec{e}_x + c_y \vec{e}_y + c_z \vec{e}_z .$$

Dyadische Bildung des Tensors: $\underline{\underline{T}} = (\vec{a} \circ \vec{e}_x + \vec{b} \circ \vec{e}_y + \vec{c} \circ \vec{e}_z)$.

Die Matrix des Tensors: $\left[\underline{\underline{T}}\right]_{xyz} = \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{bmatrix}$.

4. Geben Sie die dyadische Definition des transponierten Tensors $\underline{\underline{T}}^T$ in kartesischen Koordinaten an!

   Transponierter Tensor: $\underline{\underline{T}}^T = \left(\vec{e}_x \circ \vec{a} + \vec{e}_y \circ \vec{b} + \vec{e}_z \circ \vec{c}\right)$,

   wobei die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ die Bildvektoren von $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ sind.

5. Schreiben Sie die Definition des symmetrischen und des schiefsymmetrischen Tensors auf!

   Symmetrischer Tensor: $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^T$

   Schiefsymmetrischer Tensor: $\underline{\underline{T}} = -\underline{\underline{T}}^T$.

6. Geben Sie den Satz für die Zerlegung von Tensoren an!

   Jeder Tensor kann in einen symmetrische und in einen schiefsymmetrischen Teil zerlegt werden:

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}_{sy} + \underline{\underline{T}}_{ss} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}}^T\right) + \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{T}} - \underline{\underline{T}}^T\right).$$

7. Geben Sie die der Definition der Festigkeitslehre an!

   Die Kinematik, die Dynamik und das Materialverhalten von festen Körpern, die sich sowohl vor der Belastung als auch nach der Belastung im Ruhezustand befinden.

8. Wann ist ein Körper / ein Bauteil in Ruhezustand? Schreiben Sie die Voraussetzungen des Ruhezustandes auf!

   - Die äußeren Kräfte am Körper befinden sich im Gleichgewicht.
   - Die Abstützung des Körpers verhindert eine Starrkörperbewegung.

9. Definieren Sie das Körpermodell in der Mechanik!

   Ein Körper mit idealisierten Eigenschaften. Ein Körper, der die wichtigsten Eigenschaften des realen Körpers bezüglich der Untersuchung widerspiegelt. Die wichtigen Eigenschaften des realen Körpers werden berücksichtigt und die nicht wichtigen vernachlässigt.

10. Definieren Sie das Starrkörper-Modell!

    Die Entfernung (der Abstand) zweier beliebiger Punkte voneinander ändert sich nicht. Die Entfernung/der Abstand der Punkte voneinander ändert sich auch unter Belastung nicht.

11. Definieren Sie das Festkörper-Modell!

    Der Körper ist verformbar. Die Entfernung (der Abstand) der Punkte des Körpers voneinander sowie der Winkel zwischen den geraden Linien kann sich unter Belastung ändern. Auch die Form und Größe / Dimension der Flächen und Volumina des Körpers können sich ändern.

12. Wann erfolgt die Formänderung eines Körpers?

    Infolge der Belastung werden sich die Punkte der Körper im Verhältnis zueinander verschieben und deshalb werden sich die materiellen geometrischen Formen der Körper (Längen, Winkel, Flächen, Volumina) ändern.

Die materielle geometrische Form bedeutet, dass die geometrische Form an die materiellen Punkte des Körpers gebunden ist.

13. Was bedeutet die Kinematik in der Festigkeitslehre?

Die Kinematik in der Festigkeitslehre beschreibt die Verschiebungen der Punkte sowie die Formänderung des Körpers infolge der Belastung.

14. Was bedeutet die Dynamik in der Festigkeitslehre?

Die Dynamik in der Festigkeitslehre beschreibt die inneren Kräfte, die unter Belastung im Körper entstehen.

15. Was bedeutet das Materialverhalten in der Festigkeitslehre?

Materialverhalten in der Festigkeitslehre beschreibt den Zusammenhang zwischen den Formänderungsgrößen / Verzerrungsgrößen und den inneren Kräften.

16. In welchen Fällen kann man über eine elastische Formänderung und über eine plastische Formänderung sprechen?

Der Körper kehrt nach der Entlastung in seine ursprüngliche Form zurück. Der belastete, verzerrte Körper kehrt in seine ursprüngliche Form zurück, wenn er entlastet wird.

Der Körper kehrt nach der Entlastung nicht in seine ursprüngliche Form zurück.

17. Geben Sie die Definition der kleinen Verschiebungen und der kleinen Verzerrungen an!

Kleine Verschiebungen treten auf, wenn die Verschiebungen der Punkte des Körpers sehr klein im Vergleich zu den charakteristischen Dimensionen des Körpers sind.

Kleine Verzerrungen entstehen, wenn die Verzerrungsgrößen des Körpers wesentlich kleiner als 1 sind: $\varepsilon << 1$, $\gamma << 1$. ($\varepsilon, \gamma \approx 10^{-3} - 10^{-5}$)

18 Definieren Sie die Äquivalenz in der Statik!

Die Äquivalenz in der Statik: Zwei Kraftgruppen / Kraftsysteme sind gleichwertig / äquivalent, wenn sie das gleiche Momentenfeld ergeben / verursachen.

19 Definieren Sie die Äquivalenz in der Festigkeitslehre!

Die Äquivalenz in der Festigkeitslehre: Zwei Kraftsysteme sind äquivalent, wenn sie in einem Körper – abgesehen von einem kleinen Teil des Körpers – den gleichen Verzerrungszustand ergeben.

20. Schreiben Sie das Prinzip von *Saint-Venant* auf!

Zwei Kraftgruppen, die statisch äquivalent sind (das gleiche Momentenfeld ergeben) und an der gleichen kleinen Oberfläche angreifen, verursachen in guter Näherung denselben Verzerrungszustand / dieselbe Formänderung des Körpers. Ausnahme ist das Gebiet der unmittelbaren Lasteinleitung.

21. Definieren Sie den Massenpunkt / die elementare Masse / die elementare Umgebung eines Körpers!

Massenpunkt / elementare Masse / elementare Umgebung ist ein Teil des Körpers, dessen Dimension im Vergleich zu den charakteristischen Dimensionen des gesamten Körpers sehr klein ist. Die Festigkeitszustände des Massenpunktes werden über Kenngrößen charakterisiert und sind an den Mittelpunkt gebunden.

22. Was ist das elementare Dreibein?

Das Elementare Dreibein wird im Punkt P von den Einheitsvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ gebildet, die aufeinander senkrecht stehen ($\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$, $\vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0$, $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = 0$.). Die Vektoren bestimmen drei, aufeinander senkrechte Ebenen (Flächen), die drei Koordinatenebenen.

23. In welchen Teilen kann die Verschiebung des Punktes P zerlegt werden?

Die Verschiebung eines Punktes kann immer in zwei Teile zerlegt werden:
- eine parallele Verrückung und
- eine spezifische, relative Verschiebung.

24. Mit welcher Kenngröße kann der spezifische relative Verschiebungszustand der Umgebung des Punktes P eindeutig charakterisiert werden? Geben Sie die Kenngröße in dyadischer Form an!

Der spezifische relative Verschiebungszustand der Umgebung des Punktes P kann eindeutig durch den Verschiebungsgradienten charakterisiert werden

Dyadische Darstellung des Verschiebungsgradienten-Tensor: $\underline{\underline{D}}_P = \vec{u}_x \circ \vec{e}_x + \vec{u}_y \circ \vec{e}_y + \vec{u}_z \circ \vec{e}_z$.

wobei $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ und $\vec{u}_z$ die spezifische relative Verschiebungen der Punkte A, B und C des elementaren Dreibeines $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ sind und $\circ$ das Zeichen der dyadischen Multiplikation ist.

25. Schreiben Sie die Zerlegung in einem symmetrischen und in einem antisymmetrischen / schiefsymmetrischen Teil des Verschiebungsgradienten $\underline{\underline{D}}$ auf! Geben Sie den geometrischen Inhalt der einzelnen Teile an!

Die Zerlegung: $$\underline{\underline{D}}_P = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{D}}_P + \underline{\underline{D}}_P^T\right)}_{\substack{\underline{\underline{A}}_P \\ \text{symmetrischer Teil}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{D}}_P - \underline{\underline{D}}_P^T\right)}_{\substack{\underline{\underline{\Psi}}_P \\ \text{antisymmetrischer Teil}}} .$$

wobei $\underline{\underline{A}}_P$ der Verzerrungstensor und $\underline{\underline{\Psi}}_P$ der Rotationstensor (Starrkörperrotation) des Punktes P sind.

26. Geben Sie den Namen und das Vorzeichen der Verzerrungsgrößen an!

Die Verzerrungsgrößen: - Dehnungen: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$.

- Gleitungen: γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{xz}.

Vorzeichen: $\varepsilon > 0$ Verlängerung, $\varepsilon < 0$ Verkürzung,

$\gamma > 0$ der ursprünglich rechte Winkel verringert sich,

$\gamma < 0$ der ursprünglich rechte Winkel vergrößert sich.

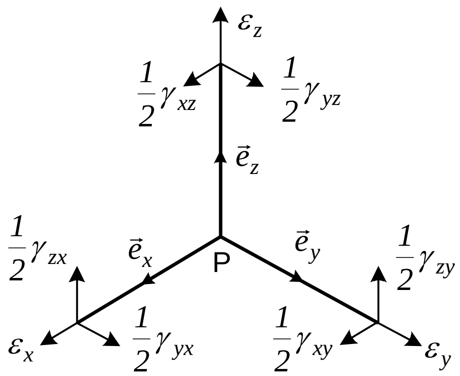
27. Schreiben Sie die Definition des Verzerrungstensors in dyadischer Form und die Matrix des Verzerrungstensors im *x,y,z*-Koordinatensystem auf!

Dyadische Darstellung: $\underline{\underline{A}}_P = \vec{\alpha}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\alpha}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\alpha}_z \circ \vec{e}_z$, wobei die Verzerrungsvektoren die folgende Form haben:

$$\vec{\alpha}_x = \varepsilon_x \vec{e}_x + \frac{1}{2}\gamma_{yx}\vec{e}_y + \frac{1}{2}\gamma_{zx}\vec{e}_z, \quad \vec{\alpha}_y = \frac{1}{2}\gamma_{xy}\vec{e}_x + \varepsilon_y \vec{e}_y + \frac{1}{2}\gamma_{zy}\vec{e}_z, \quad \vec{\alpha}_z = \frac{1}{2}\gamma_{xz}\vec{e}_x + \frac{1}{2}\gamma_{yz}\vec{e}_y + \varepsilon_z \vec{e}_z$$

Matrizendarstellung: $$\left[\underline{\underline{A}}\right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

28. Veranschaulichen Sie den Verzerrungszustand mittels des elementaren Dreibeines!



29. Wie können die Dehnungen und die Gleitungen, die zu den gegebenen Einheitsvektoren $\vec{n}$ und $\vec{m}$, $(\vec{n}\cdot\vec{m}=0)$ gehören, aus dem Verzerrungstensor berechnet werden?

Die Berechnung der Verzerrungsgrößen:

Dehnungen: $\varepsilon_n = \vec{n}\cdot\vec{\alpha}_n = \vec{n}\cdot\underline{\underline{A}}\cdot\vec{n}$, Maßeinheit: $[\mathrm{mm/mm}=1]$,

Gleitungen: $\frac{1}{2}\gamma_{mn} = \vec{m}\cdot\vec{\alpha}_n = \vec{\alpha}_m\cdot\vec{n} = \vec{m}\cdot\underline{\underline{A}}\cdot\vec{n} = \vec{n}\cdot\underline{\underline{A}}\cdot\vec{m}$, Maßeinheit: $[\mathrm{rad}=1]$.

30. Geben Sie die Definition des Spannungsvektors an!

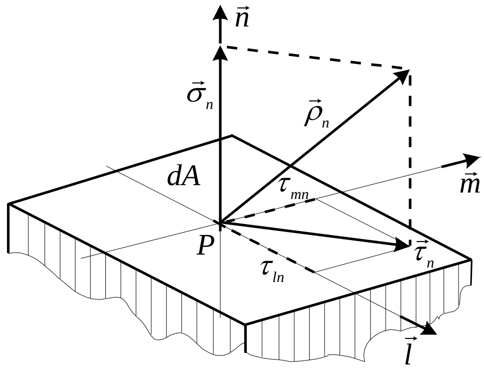
Der Spannungsvektor ist ein innerer Flächenkraft-Vektor (Flächenkraftintensität-Vektor) $\vec{\rho} = \vec{\rho}(\vec{r},\vec{n})$, der auf der Schnittfläche S_1 auftritt.

In der Formel ist $\vec{r}$ der Ortsvektor des Punktes *P*, während $\vec{n}$ der Normaleneinheitsvektor der Schnittfläche S_1 ist.

31. Wie kann man die Komponenten des Spannungsvektors berechnen? Veranschaulichen Sie die Komponenten des Spannungsvektors!

Normalspannungsvektor: $\vec{\sigma}_n = \underbrace{\left(\vec{n}\cdot\vec{\rho}_n\right)}_{\sigma_n}\vec{n}$.

Schubspannungsvektor: $\vec{\tau}_n = \vec{\rho}_n - \sigma_n\vec{n} = \left(\vec{n}\times\vec{\rho}_n\right)\times\vec{n}$



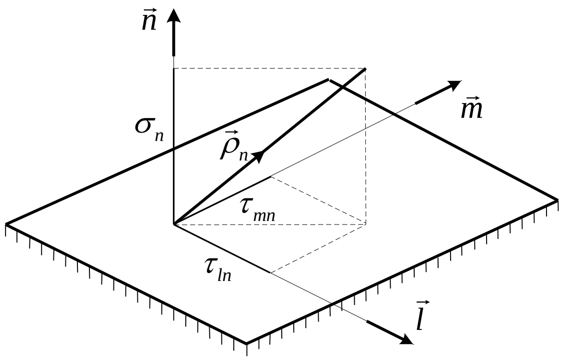
32. Wie kann man die Koordinaten des Spannungsvektors berechnen? Veranschaulichen Sie die Koordinaten des Spannungsvektors!

Die Normalspannungskoordinate:

$$\sigma_n = \vec{n}\cdot\vec{\sigma}_n = \left(\vec{n}\cdot\vec{\rho}_n\right)$$

Die Schubspannungskoordinaten:

$$\tau_{mn} = \vec{m}\cdot\vec{\rho}_n = \vec{m}\cdot\vec{\tau}_n, \quad \tau_{ln} = \vec{l}\cdot\vec{\rho}_n = \vec{l}\cdot\vec{\tau}_n .$$



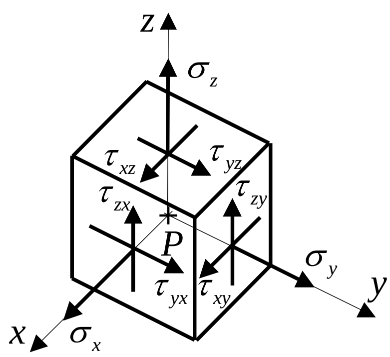
33. Schreiben Sie die Definition des Spannungstensors in dyadischer Form und die Matrix des Spannungstensors im *x,y,z*-Koordinatensystem auf!

Dyadische Darstellung: $\underline{\underline{F}} = \left(\vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z\right)$, wobei die Spannungsvektoren die folgende Form haben:

$$\vec{\rho}_x = \sigma_x\vec{e}_x + \tau_{yx}\vec{e}_y + \tau_{zx}\vec{e}_z, \quad \vec{\rho}_y = \tau_{xy}\vec{e}_x + \sigma_y\vec{e}_y + \tau_{zy}\vec{e}_z, \quad \vec{\rho}_z = \tau_{xz}\vec{e}_x + \tau_{yz}\vec{e}_y + \sigma_z\vec{e}_z.$$

Matrizendarstellung: $$\left[\underline{\underline{F}}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

34. Veranschaulichen Sie den Spannungszustand des Punktes *P* mittels des elementaren Würfels!



35. Wie können die Normalspannungen σ_n und die Schubspannungen τ_{mn}, die auf der elementaren Oberfläche mit den Normaleneinheitsvektor $\vec{n}$ auftreten, aus dem Spannungstensor berechnet werden?

Die Normalspannungskoordinate: $\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{n} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}$.

Die Schubspannungskoordinaten: $\tau_{mn} = \tau_{nm} = \vec{m} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{n} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{m} = \vec{m} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}$.

In den Formeln ist $\cdot$ das Zeichen der skalaren Multiplikation.

36. Geben Sie die Definition der Spannungshauptrichtungen (Hauptachsen) und der Hauptspannungen an!

Wenn $\vec{\tau}_e = \vec{0}$ und $\Rightarrow$ $\vec{\rho}_e = \sigma_e \vec{e}$ auf der elementaren Fläche senkrecht zum Einheitsvektor $\vec{e}$ gültig ist, dann ist $\vec{e}$ eine Hauptrichtung / Hauptachse, σ_e eine Hauptspannung und die Ebene senkrecht auf $\vec{e}$ eine Hauptschnittebene.

Bemerkung:

- σ_e kann auch gleich Null sein $\Rightarrow$ $\vec{\rho}_e = 0$.
- Es gibt in jedem Punkt P mindestens drei Hauptachsen, die aufeinander senkrecht stehen.

37. Formulieren Sie das Hauptachsen-Problem des Spannungstensors als ein Eigenwertproblem!

Frage: Gibt es so eine Richtung $\vec{e}$, die die folgenden Zusammenhänge erfüllt?

$$\vec{\rho}_e = \sigma_e \vec{e},$$
$$\underline{\underline{F}} \cdot \vec{e} = \sigma_e \underline{\underline{E}} \cdot \vec{e},$$
$$\left(\underline{\underline{F}} - \sigma_e \underline{\underline{E}}\right) \cdot \vec{e} = \vec{0}.$$

Antwort: Es gibt mindestens drei solche Richtungen $\vec{e}$, die zueinander senkrecht sind.

38. Schreiben Sie die charakteristische Gleichung des Hauptrichtungsproblems (Eigenwertproblem) des Spannungszustandes auf und geben Sie die skalaren Invarianten des Spannungstensors an!

Charakteristische Gleichung: $\sigma_e^3 - F_I \sigma_e^2 + F_{II} \sigma_e - F_{III} = 0$.

Die erste skalare Invariante des Spannungstensors: $F_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$.

Die zweite skalare Invariante des Spannungstensors: $F_{11} = \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{xy} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yz} & \sigma_y \end{vmatrix}$.

Die dritte skalare Invariante des Spannungstensors: $F_{111} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$.

39. Definieren Sie den Spannungsdeviator-Tensor $\left[\underline{\underline{F}}\right]$ und den Verzerrungsdeviator-Tensor $\left[\underline{\underline{A}}\right]$!

a) Der Spannungsdeviator-Tensor: $\underline{\underline{F}}_d = \underline{\underline{F}} - \sigma_k \underline{\underline{E}}$,

wobei $\sigma_k = \dfrac{F_I}{3} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$ die Mittelspannung ist.

b) Der Verzerrungsdeviator-Tensor: $\underline{\underline{A}}_d = \underline{\underline{A}} - \varepsilon_k \underline{\underline{E}}$,

wobei $\varepsilon_k = \dfrac{A_I}{3} = \dfrac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3}$ die Mitteldehnung ist.

40. Schreiben Sie die Aufspaltung / die Zerlegung des Spannungs- /Verzerrungszustandes in eine reine Gestaltänderung und in eine reine Volumenänderung auf! Geben Sie den geometrischen / physischen Inhalt der einzelnen Teile und die wichtige Eigenschaft des Spannugsdeviators an!

Aufspaltung: $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}_d + \sigma_k \underline{\underline{E}}, \quad \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}_d + \varepsilon_k \underline{\underline{E}}$.

Die Deviator-Tensoren $\underline{\underline{F}}_d$ und $\underline{\underline{A}}_d$ charakterisieren die reine Gestaltänderung der Formänderung.

Die Kugel-Teile $\sigma_k \underline{\underline{E}}$ und $\varepsilon_k \underline{\underline{E}}$ charakterisieren die reine Volumenänderung der Formänderung.

Die wichtige Eigenschaft der Deviator-Tensoren: $F_{d_I} = 0, \quad A_{d_I} = 0$.

41. Definieren Sie die Formänderungsdichte, geben Sie die Berechnungsformel der spezifischen Formänderungsenergie und ihre wichtigste Eigenschaft an!

Definition und Berechnungsformel:

$$u(\vec{r}) = \underline{\underline{F}} \cdot\cdot \underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}\left(\vec{p}_x \circ \vec{e}_x + \vec{p}_y \circ \vec{e}_y + \vec{p}_z \circ \vec{e}_z\right) \cdot\cdot \left(\vec{a}_x \circ \vec{e}_x + \vec{a}_y \circ \vec{e}_y + \vec{a}_z \circ \vec{e}_z\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{p}_x \cdot \vec{a}_x + \vec{p}_y \cdot \vec{a}_y + \vec{p}_z \cdot \vec{a}_z\right) = \frac{1}{2}\left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz}\right).$$

wobei $\cdot\cdot$ ist das Zeichen der doppelten skalaren Multiplikation.

Eigenschaft: $u \geq 0$. Die Energie ist eine positive skalare Größe.

42. Schreiben Sie die Aufspaltung / die Zerlegung der Formänderungsenergie auf!

Aufspaltung: $u = \underbrace{u_T}_{\substack{\text{reine Gestalt-} \\ \text{änderung}}} + \underbrace{u_V}_{\substack{\text{reine Volumen-} \\ \text{änderung}}}$.

Der reine Gestaltänderungsteil:

$$u_T = \frac{1}{2G}\left[\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 \left(\sigma_y - \sigma_z\right)^2 + \left(\sigma_z - \sigma_x\right)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2\right)\right] \geq 0.$$

Der reine Volumenänderungsteil: $u_V = \frac{1}{6} A_I F_I = \frac{1}{12G} \frac{1-2\nu}{1+\nu} F_I^2 \geq 0$.

43. Machen Sie den Energiesatz und seine Anwendung auf die Festigkeitslehre und die Elastizitätslehre bekannt!

$E_2 - E_1 = W_K + W_B$. $\quad E-$ die kinetische Energie, 1 – Zustand vor der Belastung

2 – Zustand nach der Belastung

$W_K -$ die Arbeit der äußeren Kräfte,

$W_B -$ die Arbeit der inneren Kräfte.

Festigkeitslehre: die Mechanik fester Körper, die sich sowohl vor der Belastung als auch nach der Belastung im Ruhezustand befinden.

$$E_1 = E_2 \equiv 0 \qquad \Rightarrow \qquad W_K + W_B = 0.$$

$$W_K = -W_B = \underbrace{U}_{\substack{\text{elastische} \\ \text{Formänderungs} \\ \text{energie}}} + \underbrace{W_D}_{\substack{\text{dissipative} \\ \text{Energie} \\ \text{(zB. innere Reibung)}}}$$

Bei elastischer Formänderung: $W_D = 0$, deshalb: $W_K = U$.

44. Was ist die Zielstellung der Dimensionierung und des Sicherheitsnachweises?

Zielstellung: Die Konstruktion muß die Belastung ohne Schädigung ertragen.

45. Geben Sie die Definition der Vergleichsspannung an!

Vergleichsspannung: Ein Spannungswert, der den Spannungszustand in einem Punkt hinsichtlich der Schädigung eindeutig charakterisiert.

Mit der Einleitung der Vergleichsspannung führt man den allgemeinen Fall auf den Spezialfall (einachsiger Spannungszustand) zurück.

46. Machen Sie die *Coulombsche* Theorie bekannt! Geben Sie die Definition der Vergleichsspannung nach *Coulomb* an!

Die Theorie: Es gibt keine Schädigung, wenn die größte Normalspannung kleiner ist, als die Zugfestigkeit des Materials.

Hauptspannungen: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Die größte Normalspannung im Punkt *P*: $\sigma_{\max} = \max\left(|\sigma_1|, |\sigma_3|\right)$.

Vergleichsspannung nach *Coulomb*: $\sigma_V\left(Coulomb\right) = \sigma_{\max} = \max\left(|\sigma_1|, |\sigma_3|\right)$.

47. Machen Sie die *Mohrsche* Theorie bekannt! Geben Sie die Definition der Vergleichsspannung nach *Mohr* an!

Die Materialbeanspruchung kann durch die maximale Schubspannung charakterisiert werden. Es gibt keine Schädigung, wenn die größte Schubspannung kleiner ist, als der Radius des größten *Mohrschen* Kreises:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{1}{2}\sigma_V\left(Mohr\right)$$

Vergleichsspannung nach *Mohr*: $\sigma_V\left(Mohr\right) = \sigma_1 - \sigma_3$.

Die Vergleichsspannung nach *Mohr* ist gleich mit dem Durchmesser des größten *Mohrschen* Kreises.

48. Machen Sie die *Huber-Mises-Henckysche* Theorie bekannt! Geben Sie die Definition der Vergleichsspannung nach *Huber-Mises-Hencky* an!

Die aus zwei Spannungszuständen eines Materials resultierenden Beanspruchungen sind identisch kritisch, wenn die Gestaltänderungsenergiedichten der beiden Zustände gleich / identisch sind: $u_{T_1} = u_{T_2}$.

Die Definition der Vergleichsspannung nach *Huber–Mises-Hencky*:

$$\sigma_V(HMH) = \sqrt{6\,G\,u_T} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right]},$$

$$\sigma_V(HMH) = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \left(\sigma_y - \sigma_z\right)^2 + \left(\sigma_z - \sigma_x\right)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2\right)\right]}.$$

wobei: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ Hauptspannungen,

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ Normalspannungen und $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ Schubspannungen sind.

49. Schreiben Sie den Gedankengang zur Dimensionierung und zum Sicherheitsnachweis bei Stabtragwerken auf!
- Die Bestimmung des kritischen Querschnittes des Stabtragwerkes erfolgt dort, wo die größten Beanspruchungen auftreten.
- Die Bestimmung der kritischen Punkte am kritischen Querschnitt erfolgt dort, wo σ_V am größten ist.
- Dimensionierung, Sicherheitsnachweis erfolgt in den kritischen Punkten: $\sigma_{V\max} \le \sigma_{zul}$.

50. Geben Sie die Felder an, die die mechanischen Zustände eines elastischen Körpers charakterisieren!

- $\vec{u} = \vec{u}(x, y, z)$ Verschiebungsfeld (Vektorenfeld),
- $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(x, y, z)$ Verzerrungsfeld (Tensorfeld),
- $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}(x, y, z)$ Spannungsfeld (Tensorfeld),
- $u = u(x, y, z)$ Formänderungsenergiedichte (skalares Feld).

51. Schreiben Sie die Gleichgewichtsbedingungen in der vom Koordinatensystem unabhängigen Vektorenform und in der skalaren Form in kartesischen x, y, z-Koordinaten auf!

Vektorielle Form: $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$.

wobei: $\underline{\underline{F}}$ der Spannungstensor, ∇ der *Hamiltonsche* Differentialoperator und $\vec{q}$ die Intensität der Volumenkräfte ist.

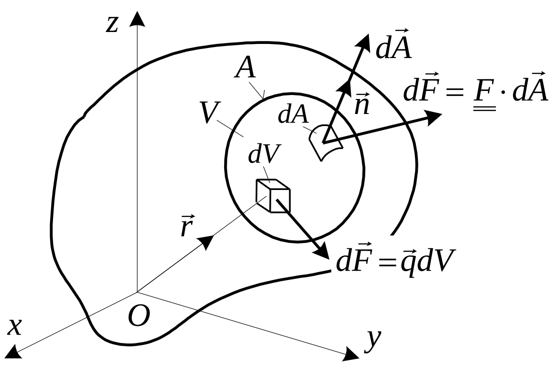
Skalare Gleichungen in kartesischen x, y, z-Koordinaten:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + q_x = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + q_y = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z = 0.$$

52. Leiten Sie die vektorielle Form der Gleichgewichtsbedingungen ab! Zur Erklärung der Ableitung skizzieren Sie auch ein Bild!



Wir betrachten ein beliebiges Volumen *V* mit der Oberfläche *A*, das aus dem Gesamtkörper ausgeschnitten ist. Das Volumen *V* liegt innerhalb des Körpers.

Volumenkräfte sind z.B. die Gravitationskraft (Gewicht), die Trägheitskräfte aus der Beschleunigung des Körpers, usw.

$\vec{q}$ - Dichte / Intensität der Volumenkräfte,

$\vec{p}$ - Dichte / Intensität der Flächenkräfte.

Die Wirkung der Umgebung auf das Volumen *V* wird über Kräfte berücksichtigt:

über elementare Volumenkräfte: $d\vec{F} = \vec{q}\, dV$ und elementare Flächenkräfte: $d\vec{F} = \vec{p}\, dA = \underline{\underline{F}} \cdot \underbrace{\vec{n}\, dA}_{d\vec{A}}$,

wobei dA das skalare und $d\vec{A}$ das vektorielle Flächenelement ist.

Der Körperteil mit dem Volumen V ist im Gleichgewicht: $\vec{F} = \vec{0} = \int_{(V)} \vec{q}\, dV + \int_{(A)} \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}\, dA.$

Anwendung des Integralsatzes von *Gauss* und *Ostrogradsky:* $\int_{(A)} \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}\, dA = \int_{(V)} \underline{\underline{F}} \cdot \nabla\, dV.$

Durch Anwendung des Integralsatzes erhält man: $\vec{F} = \vec{0} = \int_{(V)} \left(\vec{q} + \underline{\underline{F}} \cdot \nabla\right) dV$.

Das Integral muß für alle beliebigen Volumina V gleich Null sein $\Rightarrow$ Der Integrand muß verschwinden.

$\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$ Gleichgewichtsbedingung(en).

53. Definieren Sie die Vektorinvariante des Spannungstensors und geben Sie die Eigenschaft der Invariante und der Vektorinvariante an!

Die Vektorinvariante des Spannungstensors: $\vec{F}_{\times} = -\frac{1}{2}\left(\vec{\rho}_x \times \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \times \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \times \vec{e}_z\right) = \vec{0}$.

Die Vektorinvariante aller symmetrischen Tensoren ist gleich Null.

Invariante: Die Größe ist vom Koordinatensystem unabhängig. Die Größe ändert sich bei einer Koordinaten-Transformation nicht.

54. Geben Sie den Zusammenhang zwischen dem Verschiebungsfeld, dem Verschiebungsgradientenfeld, dem Verzerrungsfeld und dem Starrkörperrotationsfeld in symbolischer Form (vom Koordinatensystem unabhängigen Form) an!

Der Verschiebungsgradienten-Tensor: $\underline{\underline{D}} = \vec{u} \circ \nabla$.

Der Verzerrungstensor: $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}\left(\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u}\right)$.

der Starrkörperrotationstensor: $\underline{\underline{\Psi}} = \frac{1}{2}\left(\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u}\right)$.

wobei: $\vec{u}$ das Verschiebungsfeld, ∇ der *Hamiltonsche* Differentialoperator und
$\circ$ das Zeichen der dyadischen Multiplikation ist.

55. Schreiben Sie die kinematischen Gleichungen in skalarer Form im kartesischen Koordinatensystem auf!

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z},$$
$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}.$$

56. Geben Sie die Definition eines homogenen, isotropen linear-elastischen Körpers an!

Homogener Stoff: Die Materialeigenschaften sind ortsunabhängig, sie sind in jedem Punkt des Materials gleich.

Isotroper Stoff: Die Materialeigenschaften sind richtungsunabhängig.

ZB.: Metalle, Stähle, Al-Legierungen, usw.

Linear-elastischer Stoff: Zwischen den Spannungen und den Verzerrungen besteht ein linearer Zusammenhang.

57. Geben Sie die Definition der anisotropen und der ortotropen Materialeigenschaft an!

Anisotroper Stoff: Die Materialeigenschaften sind richtungsabhängig.

ZB.: Holz, faserverstärkter Verbundwerkstoff, usw.

Ortotroper Stoff: Spezialfall des anisotropen Stoffes; die Materialeigenschaften können mit Materialkennwerten in Richtungen angegeben werden, die zueinander senkrecht sind.

ZB.: mit parallellaufenden langen Fasern verstärkter Kunststoff.

58. Schreiben Sie die beiden tensoriellen Formen des isotropen *Hookeschen* Gesetzes auf und geben Sie den Inhalt / die Benennung der einzelnen Größen an!

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2G}\left(\underline{\underline{F}} - \frac{vF_I}{1+v}\underline{\underline{E}}\right), \qquad \underline{\underline{F}} = 2G\left(\underline{\underline{A}} + \frac{vA_I}{1-2v}\underline{\underline{E}}\right).$$

wobei: $\underline{\underline{A}}$ der Verzerrungstensor, $\underline{\underline{F}}$ der Spannungstensor, $\underline{\underline{E}}$ der Einheitstensor,

G der Schubmodul, v die *Poissonsche* Koeffizient,

F_I die erste skalare Invariante des Spannungstensors und

A_I die erste skalare Invariante des Verzerrungstensors ist.

59. Leiten Sie den Zusammenhang zwischen dem *Youngschen* Modul E und dem Schubmodul G ab!

Im Fall des einachsigen Spannungszustandes: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = -v\varepsilon_z$.

Das *Hookesche* Gesetz für den einachsigen Spannungszustand $\sigma_z = E\varepsilon_z$.

Das allgemeine *Hookesche* Gesetz:

$$\sigma_z = 2G\left[\varepsilon_z + \frac{v}{1-2v}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\right)\right] = 2G\left[\varepsilon_z + \frac{v}{1-2v}\left(-v\varepsilon_z + \varepsilon_z + \varepsilon_z\right)\right] = 2G\left[\varepsilon_z + v\varepsilon_z\right] = 2G(1+v)\varepsilon_z$$

Aus dem Vergleich der obigen beiden Gleichungen: $E = 2G(1+v)$.

60. Schreiben Sie das *Hookesche* Gesetz für orthotropes Material in Matrixform auf und geben Sie den Inhalt / den Namen der einzelnen Größen an!

$$
\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
\frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix},
$$

wobei: E_1, E_2, E_3 die Elastizitätsmoduln in den Richtungen 1, 2, 3,
G_{12}, G_{23}, G_{13} die Schubmoduln,
$\nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{13}$ die *Poissonschen* Koeffizienten sind.

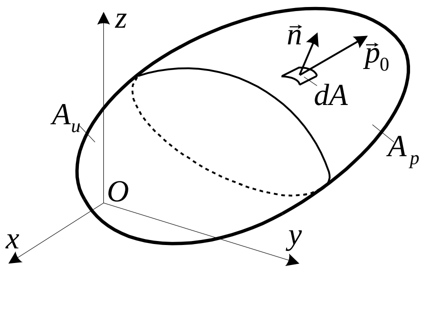
ZB.: ν_{12} gibt die Kontraktion in der Richtung 2 bei einem Zugbeanspruchung in der Richtung 1 an.

61. Geben Sie den Zusammenhang zwischen den Materialkennwerten für orthotrope Werkstoffe an! Mit wie vielen unabhängigen Kennwerten kann man das Materialverhalten eines orthotropen Stoffes bestimmen?

Die Matrix der Materialkennwerte ist symmetrisch: $\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}$, $\frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2}$, $\frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1}$.

Das Materialverhalten eines linear-elastischen, orthotropen Stoffes kann mit neun unabhängigen Materialkennwerten charakterisiert werden: $E_1, E_2, E_3 \mid \nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{13} \mid G_{12}, G_{23}, G_{13}$.

62. Schreiben Sie die kinematischen und dynamischen Randbedingungen in vom Koordinatensystem unabhängiger Form auf!



Dynamische Randbedingungen:
$\underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}\big|_{A_p} = \vec{p}_0$ auf dem Oberflächenanteil A_p.

Kinematische Randbedingungen:
$\vec{u}\big|_{A_u} = \vec{u}_0$ auf dem Oberflächenanteil A_u.

$\vec{p}_0$ ist eine bekannte Flächenbelastung,
$\vec{u}_0$ ist ein bekanntes Verschiebungsfeld.
A_p - der Oberflächenanteil, wo die Belastung bekannt ist.
A_u - der Oberflächenanteil, wo die Verschiebungen bekannt sind.

63. Geben Sie die Definition der exakten Lösung und die der Näherungslösung der Gleichungen der Elastizität an!

Exakte Lösung: Die unbekannten Felder $\vec{u}$, $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{F}}$ befriedigen alle Gleichungen des Gleichungssystems und der Randbedingungen.

Näherungslösung: Die unbekannten Felder $\vec{u}$, $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{F}}$ befriedigen nicht alle Gleichungen des Gleichungssystems und der Randbedingungen.

64. Schreiben Sie die Annahmen für die *Grashofsche* Theorie ebener gekrümmter Stäbe auf!

- Die Mittellinie des Stabes ist vor der Belastung ein Kreisbogen mit dem Radius ρ_0 und nach der Belastung ein Kreisbogen mit dem Radius ρ.
- Der gekrümmte Stab ist prismatisch und die Querschnitte des Stabes haben eine Symmetrieachse, die η-Achse.
- Die Beanspruchung des Stabes ist reine Biegung.
- Im Stab tritt ein einachsiger Spannungszustand auf.

65. Schreiben Sie die Annahmen für die Formänderung bei der *Grashofschen* Theorie auf!

Annahmen für die Formänderung:

- Unter Belastung / Formänderung bleiben die Querschnitte eben und senkrecht zur Mittellinie des Balkens (*Bernoulli*sche Hypothese).
- Der ursprüngliche Kreisbogen mit dem Radius ρ_0 verformt sich zu einem Kreisbogen mit dem Radius ρ.

66. Schreiben Sie die *Grashofsche*-Formel auf und geben Sie die Benennung der Größen in der Formel an!

$$\sigma_\zeta = \frac{M_{hx}}{\rho_0 A} + \frac{M_{hx}}{I_r}\frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta}\eta ,$$

wobei: M_{hx} das Biegemoment,

ρ_0 der ursprüngliche Radius der Mittellinie,

A die Oberfläche des Querschnittes und

$I_r = \int_{(A)} \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta}\eta^2 dA$ das reduzierte axiale Flächenträgheitsmoment auf die ξ Achse ist.

67. Geben Sie die Anwendbarkeitsbereiche der *Grashofschen*-Theorie an!

- Wenn $\frac{\rho_0}{e_{\max}} < 3-4$, dann werden die *Grashof*sche Formel und das Trägheitsmoment I_r verwendet.
- Wenn $3-4 < \frac{\rho_0}{e_{\max}} < 8-10$, dann werden die *Grashof*sche Formel und $I_r \approx I_\xi$ verwendet.
- Wenn $\frac{\rho_0}{e_{\max}} > 8-10$, dann kann der Fall als gerader Stab betrachtet werden: $\sigma_\zeta = \frac{M_{hx}}{I_\xi}\eta.$

68. Definieren die reine Torsion und die Wölbkrafttorsion!

Reine Torsion (*Saint Venant*sche Torsion):

Bei der Torsion von Stäben mit einem nichtkreisförmigen Querschnitt kann man eine Verwölbung der Querschnittsfläche in Richtung der Stabachse beobachten. Wenn die eintretende Verwölbung nicht behindert ist ($\sigma_z = 0$), spricht man von reiner Torsion.

Wölbkrafttorsion:
Wenn die Verschiebungen in Richtung der Stabachse behindert werden ($\sigma_z \neq 0$), spricht man von Wölbkrafttorsion.

69. Fassen Sie die Ergebnisse der freien Torsion von Stäben beliebiger Querschnitte zusammen!

Die Lösung der freien Torsion prismatischer Stäbe kann auf die Bestimmung der Spannungsfunktion *U(x, y)* zurückgeführt werden. *U(x, y)* – die *Prandtl*sche Spannungsfunktion kann aber nicht beliebig sein.

- Die Funktion *U(x, y)* muß erfüllen:
  $\Delta U = -2G\vartheta$ die *Poisson*sche partielle Differentialgleichung,
  $U\big|_{g_0} = 0$ die Randbedingung.
- Die Darstellung des Torsionsmomentes und der Schubspannung:
  $M_C = 2 \int\limits_{(A)} U(x,y)\,dA, \qquad \tau_z = (\nabla U) \times \vec{e}_z.$

70. Wie kann man die Schubspannung bei der reinen Torsion von Stäben mit offenen dünnwandigen zusammengesetzten Querschnitten berechnen?

$$\tau_{sz} = \frac{M_c}{I_c} 2\xi,$$

wobei M_c das Torsionsmoment,

$I_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i v_i^3}{3}$ das Torsionsträgheitsmoment des Querschnittes,

b_i die Länge des Querschnittanteiles i und

v_i die Dicke des Querschnittanteiles i ist.

71. Wie kann man die Schubspannung und das Torsionsträgheitsmoment bei der reinen Torsion von Stäben mit geschlossenen dünnwandigen Querschnitten berechnen?

Die *Bredtsche*-Formel: $\tau_{sz} = \frac{M_c}{2A_k v}$,

wobei M_c das Torsionsmoment,

A_k die Oberfläche, die durch die Mittellinie des Abschnittes und

v die Dicke des Abschnittes ist.

Das Torsionsträgheitsmoment des geschlossenen dünnwandigen Querschnittes: $I_c = \dfrac{4A_k^2}{\oint \frac{1}{v}\,ds}$.

72. Definieren Sie den ebenen Verzerrungszustand!

Definition:
- Es gibt eine ausgewählte Ebene. Der Verzerrungszustand dieser Ebene bestimmt den Verzerrungszustand aller anderen Ebenen, die zu dieser Ebene parallel sind. Der Abstand zwischen den parallelen Ebenen ändert sich nicht.
- Die Verschiebungskoordinate in einer Koordinatenrichtung ist überall null und die beiden anderen Komponenten hängen nicht von dieser Koordinate ab.

73. Schreiben Sie die Annahmen auf, derer Erfüllung zur ebenen Verzerrungsaufgabe nötig sind!

- Die Dimension des Körpers senkrecht zu der ausgewählten Ebene ist wesentlich größer, als die anderen zwei Dimensionen. (z.B. das dickwandige Rohr, der Tunnel, usw.)
- Die Belastung erfolgt parallel zu der ausgewählten Ebene und ändert sich entlang der größten Dimension (in z-Richtung) nicht.
- Der konstante Abstand der parallelen Ebenen wird durch einen äußeren Zwang gewährleistet.

74. Schreiben Sie den Verzerrungs- und den Spannungstensor für den ebenen Verzerrungszustand mit Nichtnullelementen auf!

$$\left[\underline{\underline{A}}\right]=\left[\underline{\underline{A}}(x,y)\right]=\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \left[\underline{\underline{F}}\right]=\left[\underline{\underline{F}}(x,y)\right]=\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix},$$

wobei $\sigma_z = \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$ eine nicht unabhängige Spannungskoordinate ist.

75. Schreiben Sie die Gleichgewichtsbedingungen für den ebenen Verzerrungszustand in kartesischen Koordinaten auf!

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + q_x = 0,$$
$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + q_y = 0,$$
$$q_z = 0.$$

76. Schreiben Sie das *Hookesche* Gesetz für den ebenen Verzerrungszustand auf!

$$\sigma_x(x,y)=2G\left[\varepsilon_x + \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{1-2\nu}\nu\right], \qquad \sigma_y(x,y)=2G\left[\varepsilon_y + \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{1-2\nu}\nu\right],$$

$$\tau_{xy}(x,y)=G\gamma_{xy}=\frac{E}{2(1+2\nu)}\gamma_{xy}, \qquad \varepsilon_z=0 \;\Rightarrow\; \sigma_z=\nu\left(\sigma_x+\sigma_y\right),$$

$$\tau_{xz}=\tau_{yz}=0.$$

77. Definieren Sie den ebenen Spannungszustand

Ein ebener Spannungszustand kann in den Körpern entstehen, bei denen die eine Dimension wesentlich kleiner ist, als die anderen zwei, bzw. man eine Mittelebene definieren kann und die resultierende Belastung über die Dicke in der Mittelebene liegt.

78. Schreiben Sie die Annahmen auf, derer Erfüllung zur ebenen Spannungsaufgabe nötig sind!

- Die Dicke b ist sehr viel kleiner, als die anderen Dimensionen des Körpers,
- Die Mittelfläche $z=0$ ist eben,
- Bei der Belastung gibt es keine Kräfte in der z-Richtung,

- Die Resultierende der Kräfte, die zur *xy*-Ebene parallel verläuft, liegt in der *xy*-Ebene.
- Die Oberflächen $z = \pm b/2$ sind unbelastet.

79. Schreiben Sie die Annahmen für die Spannungen bei dem ebenen Spannungszustand auf!
- Die Oberflächen $z = \pm b/2$ sind unbelastet $\quad \Rightarrow \quad \sigma_z\big|_{z=\pm b/2} = 0$.
- Wenn die Dicke *b* klein ist, dann ist σ_z (Sigma *z*) nicht nur an den Oberflächen, sondern auch an anderen Stellen gleich Null.
- σ_x, σ_y, τ_{xy} sind gerade Funktionen von *z*.
- τ_{zx}, τ_{zy} sind ungerade Funktionen von *z*.

80. Definieren Sie für den ebenen Spannungszustand die Flächenspannungen und die Durchschnittsspannungen!

$$N_x = b\bar{\sigma}_x = \int_{(b)} \sigma_x dz, \quad N_y = b\bar{\sigma}_y = \int_{(b)} \sigma_y dz, \quad N_{xy} = N_{yx} = b\bar{\tau}_{xy} = b\bar{\tau}_{yx} = \int_{(b)} \tau_{xy} dz = \int_{(b)} \tau_{yx} dz,$$

$$N_z = b\bar{\sigma}_z = 0, \qquad N_{xz} = b\bar{\tau}_{xz} = 0, \qquad N_{yz} = b\bar{\tau}_{yz} = 0.$$

81. Schreiben Sie den Verzerrungs- und den Spannungstensor für den ebenen Spannungszustand mit Nichtnullelementen auf!

$$\left[\underline{\underline{\bar{A}}}\right] = \left[\underline{\underline{\bar{A}}}(x,y)\right] = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_x & \frac{1}{2}\bar{\gamma}_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\bar{\gamma}_{yx} & \bar{\varepsilon}_y & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\varepsilon}_z \end{bmatrix}, \qquad \left[\underline{\underline{\bar{F}}}\right] = \left[\underline{\underline{\bar{F}}}(x,y)\right] = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_x & \bar{\tau}_{xy} & 0 \\ \bar{\tau}_{yx} & \bar{\sigma}_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

wobei $\bar{\varepsilon}_z = -\dfrac{\nu}{1-\nu}\left(\bar{\varepsilon}_x + \bar{\varepsilon}_y\right)$ eine nicht unabhängige Verzerrungskoordinate ist.

82. Schreiben Sie die Gleichgewichtsbedingungen für den ebenen Spannungszustand mit Durchschnittsspannungen in kartesischen Koordinaten auf!

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} + \bar{q}_x = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \bar{q}_y = 0,$$

$$\bar{q}_z = 0.$$

83. Schreiben Sie das *Hookesche* Gesetz für den ebenen Spannungszustand auf!

$$\bar{\sigma}_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\bar{\varepsilon}_x + \nu\bar{\varepsilon}_y\right), \quad \bar{\sigma}_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\bar{\varepsilon}_y + \nu\bar{\varepsilon}_x\right), \quad \bar{\tau}_{xy} = G\bar{\gamma}_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\bar{\gamma}_{xy}.$$

$$\bar{\sigma}_z = 0 \;\Rightarrow\; \bar{\varepsilon}_z = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\bar{\varepsilon}_x + \bar{\varepsilon}_y\right), \qquad \bar{\tau}_{xz} = \bar{\tau}_{yz} = 0.$$

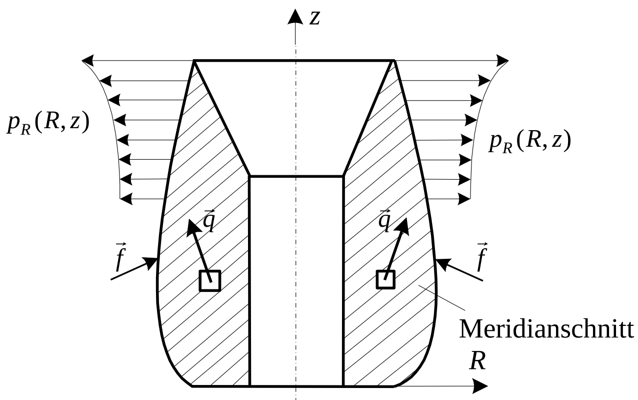
84. Definieren Sie die rotationssymmetrische / axialsymmetrische Aufgabe und die Folge der Definition in Bezug auf die Verschiebungen! Was ist die Meridianebene?

Definition: Sowohl die Geometrie, als auch die Belastung des zu untersuchenden Körpers sind axialsymmetrisch / rotationssymmetrisch.

Folge: Die Punkte des Körpers verschieben sich in der Meridianebene.

Meridianebene ist die *Rz*-Ebene, die die Rotationsachse enthält.

85. Veranschaulichen Sie die Aufnahme der Koordinatensystems bei rotationssymmetrischen Aufgaben und schreiben Sie das Verschiebungsfeld in diesem zweckmäßig gewählten Koordinatensystem auf!



Die rotationssymmetrische Aufgabe wird im Zylinder-KS formuliert / aufgeschrieben.

Zylinder-KS: R, z, φ.

Rotationssymmetrie

$\Downarrow$

Die mechanischen Größen hängen nicht von der Variable φ ab.

Das Verschiebungsfeld: $\bar{u} = u\vec{e}_R + v\vec{e}_z + w\vec{e}_\varphi$,

Die skalaren Koordinaten des Verschiebungsvektors: $u = u(R,z)$, $v = v(R,z)$, $w \equiv 0$.

Jeder Punkt verschiebt sich in der eigenen Meridianebene.

86. Schreiben Sie den Verzerrungs- und den Spannungstensor für die rotationssymmetrische Aufgabe mit Nichtnullelementen auf!

$$\left[\underline{\underline{A}}\right] = \left[\underline{\underline{A}}(R,z)\right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_R & \frac{1}{2}\gamma_{Rz} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{zR} & \varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\varphi \end{bmatrix}, \qquad \left[\underline{\underline{F}}\right] = \left[\underline{\underline{F}}(R,z)\right] = \begin{bmatrix} \sigma_R & \tau_{Rz} & 0 \\ \tau_{zR} & \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\varphi \end{bmatrix}.$$

87. Schreiben Sie die Übereinstimmungen zwischen dem ebenen Verzerrungszustand und dem ebenen Spannungszustand auf!

- zwei Verschiebungsfelder: $u(x,y), v(x,y)$ / $u(R,\varphi), v(R,\varphi)$,
- drei unabhängige Verzerrungsgrößen: $\varepsilon_x(x,y)$, $\varepsilon_y(x,y)$, $\gamma_{xy}(x,y)$ / $\varepsilon_R(R,\varphi)$, $\varepsilon_\varphi(R,\varphi)$, $\gamma_{R,\varphi}(R,\varphi)$,
- drei unabhängige Spannungsgrößen: $\sigma_x(x,y)$, $\sigma_y(x,y)$, $\tau_{xy}(x,y)$ / $\sigma_R(R,\varphi)$, $\sigma_\varphi(R,\varphi)$, $\tau_{R,\varphi}(R,\varphi)$,
- alle mechanischen Größen hängen nur von x,y / R,φ ab,
- die Form der kinematischen und Gleichgewichtsgleichungen.

88. Schreiben Sie die Unterschiede zwischen dem ebenen Verzerrungszustand und dem ebenen Spannungszustand auf!

- beim EVZ sind die mechanischen Größen vom Ort abhängig,

- beim ESZ sind die mechanischen Größen Durchschnittswerte über die Dicke,
- die Form des Stoffgesetzes,
- nicht unabhängige mechanische Größen:

$$\left.\begin{array}{l}\text{bei EVZ: } \sigma_z \neq 0 \\ \text{bei ESZ: } \varepsilon_z \neq 0\end{array}\right\} \text{sind nicht unabhängige Größen},$$

89. Wie kann man die *Airysche* Spannungsfunktion bei den ebenen Aufgaben einführen und wie können die Spannungen aus der *Airyschen* Spannungsfunktion in kartesischen Koordinaten berechnet werden?

Die *Airysche* Spannungsfunktion muss so eigeführt werden, dass die Spannungen die Gleichgewichtsbedingungen befriedigen.

Die Berechnung der Spannungen in kartesischen Koordinaten:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}.$$

90. Mit welcher Superposition kann die Lösung der Aufgaben dickwandiger Rohre dargestellt werden? Wie bestimmt man die axiale Normalspannung beim offenen und beim geschlossenen Rohr?

Die Aufgabe dickwandiger Rohre kann mit der Superposition eines ebenen Verzerrungszustandes und einer Zug/Druck-Aufgabe gelöst werden.

$$\sigma_R = \sigma'_R, \ \sigma_\varphi = \sigma'_\varphi, \ \sigma_z = \sigma'_z + \sigma''_z .$$

Die Bezeichnung ’ weist auf den ebenen Verzerrungszustand hin und das Zeichen ’’ ist für die Zug-Druck-Aufgabe.
Für das offene Rohr: $\sigma_z = 0$, deshalb $\sigma''_z = \sigma'_z$.

Für das geschlossene Rohr: $\sigma_z = \dfrac{F}{A} = \dfrac{p_I R_I^2 \pi - p_A R_A^2 \pi}{R_A^2 \pi - R_I^2 \pi} = \sigma'_z + \sigma''_z$, deshalb $\sigma''_z = \sigma_z - \sigma'_z$.

91. Geben Sie den Verlauf der Spannungen σ_R und σ_φ über die Dicke für die dickwandigen Rohre mit der Anwendung der Veränderlichen ψ an!

$\sigma_R = a - b\psi, \quad \sigma_\varphi = a + b\psi$,

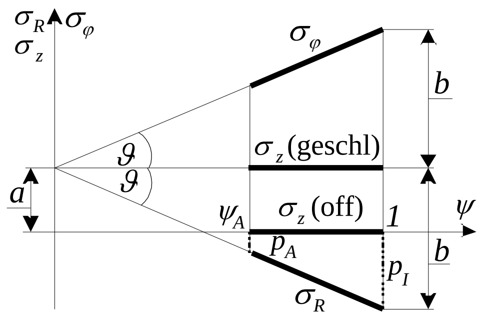
wobei die Konstante *a* und *b* aus den Randbedingungen bestimmt werden können, während $\psi = \dfrac{R_B^2}{R^2}$.

92. Schreiben Sie die Randbedingungen bei dickwandigen Rohren auf, aus denen die Konstante *a* und *b* bestimmt werden können!

Bestimmung der Konstante aus Randbedingungen:

$$\sigma_R(R = R_I) = \sigma_R(\psi = 1) = -p_I,$$
$$\sigma_R(R = R_A) = \sigma_R(\psi = \psi_A) = -p_A.$$

93. Skizzieren Sie das Spannungsdiagramm eines dickwandigen Rohres für den Fall $p_I > p_A$!



94. Formulieren Sie die Aufgabe der optimalen Dimensionierung doppelwandiger Rohre!

    Bekannt: R_I, R_A, p_A, $\sigma_{zul\,I}$, $\sigma_{zul\,A}$.

    Frage: Wie soll man $\rho_A \approx \rho_I$ (d.h. $\bar{\psi}_A$) wählen, damit der innere Druck p_I ein Maximum erreichen wird?

95. Geben Sie den Verlauf der Spannungen σ_R, σ_φ und σ_z über die Dicke für die schnell rotierenden Rohrwellen mit der Anwendung der Veränderliche λ an! Schreiben Sie die Definition der Veränderliche λ und die Bestimmung der Konstante $\sigma_{\omega 0}$, μ_1, μ_2, a und b in dem Zusammenhang auf!

    Der Spannungsverlauf:

    $$\sigma_R = \sigma_R' = a - \frac{b}{\lambda} - \sigma_{\omega 0}\lambda, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\varphi' = a + \frac{b}{\lambda} - \mu_1 \sigma_{\omega 0}\lambda, \quad \sigma_z = \sigma_z' + \sigma_z'' = \mu_2 \sigma_{\omega 0}\left(1 + \lambda_B - 2\lambda\right),$$

    wobei $\lambda = \dfrac{R^2}{R_A^2}$.

    Die Konstante aus der Rotation: $\sigma_{\omega 0} = \dfrac{3-2\nu}{1-\nu}\dfrac{\rho}{8}\left(R_A\,\omega\right)^2$.

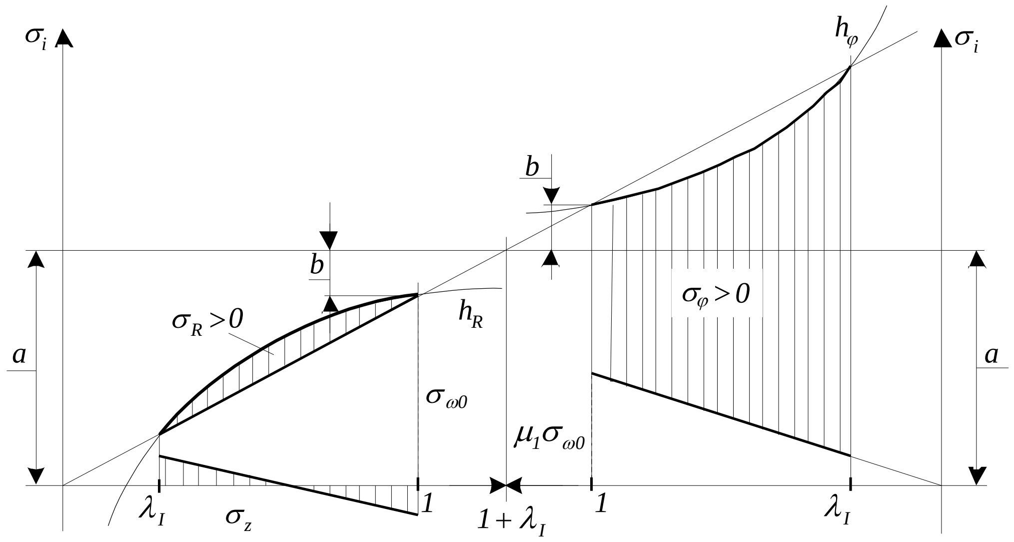
    Die vom Material abhängige Konstante: $\mu_1 = \dfrac{1+2\nu}{3-2\nu} < 1$, $\mu_2 = \dfrac{2\nu}{3\text{-}2\nu} < 1$, $\mu_2 < \mu_1$.

    Die Konstante a und b können aus den Randbedingungen bestimmt werden.

96. Schreiben Sie bei schnell rotierenden Rohrwellen die Randbedingungen auf, aus denen die Konstante a und b bestimmt werden können!

    Die Randbedingungen: $\sigma_R\big|_{\lambda_B} = 0 = a - \dfrac{b}{\lambda_B} - \sigma_{\omega 0}\lambda_B$, $\quad \sigma_R\big|_{\lambda=1} = 0 = a - b - \sigma_{\omega 0}$.

97. Skizzieren Sie das Spannungsdiagramm von schnell rotierenden Rohrwellen für den Fall $p_I = p_A = 0$!



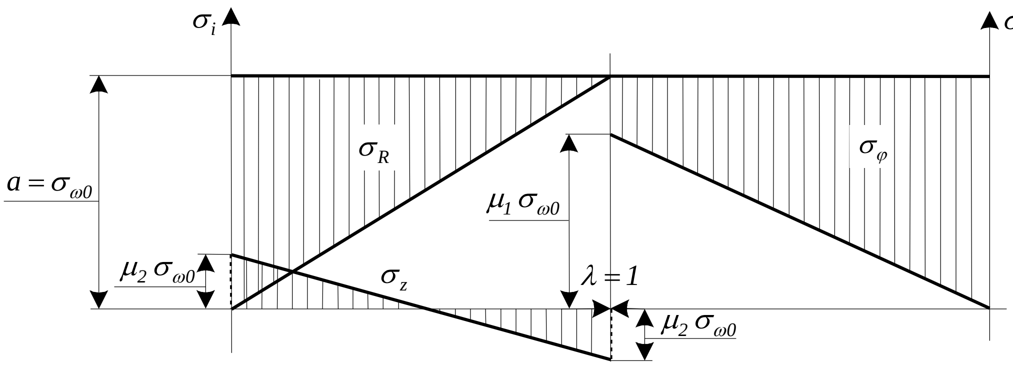
98. Geben Sie die Spannungsverläufe σ_R, σ_φ und σ_z einer schnell rotierenden Welle mit der Anwendung der Veränderliche λ an! Definieren Sie die Veränderliche λ und die Konstante in den Zusammenhängen! Wie kann man die Konstante bestimmen?

Spannungen: $\sigma_R = a - \sigma_{\omega 0}\lambda$, $\sigma_\varphi = a - \mu_1 \sigma_{\omega 0}\lambda$, $\sigma_z = \mu_2 \sigma_{\omega 0}(1-2\lambda)$. wobei $\lambda = \dfrac{R^2}{R_A^2}$

Konstante: $\sigma_{\omega 0} = \dfrac{3-2\nu}{1-\nu}\dfrac{\rho}{8}(R_A\,\omega)^2$. $\mu_1 = \dfrac{1+2\nu}{3-2\nu} < 1$, $\mu_2 = \dfrac{2\nu}{3\text{-}2\nu} < 1$, $\mu_2 < \mu_1$.

Randbedingung: $R = R_A(\lambda = 1)$ $\sigma_R = 0 = a - \sigma_{\omega 0}$ $\Rightarrow$ $a = \sigma_{\omega 0}$.

99. Skizzieren Sie das Spannungsdiagramm der schnell rotierenden Welle für den Fall $p_I = p_A = 0$!



100. Schreiben Sie den Verlauf der Durchschnittsspannungen $\bar{\sigma}_R$ und $\bar{\sigma}_\varphi$ für eine Kreisringscheibe als Funktion der Veränderliche ψ auf! Geben Sie die Definition von ψ und die Bestimmung der Konstante *a* und *b* in den Formeln an!

Spannungsverteilung:
$$\left.\begin{aligned}\bar{\sigma}_R &= a - b\psi \\ \bar{\sigma}_\varphi &= a + b\psi\end{aligned}\right\}, \text{ wobei } \psi = \frac{R_I^2}{R^2}$$
$$\bar{\sigma}_z = 0.$$

Die Konstante *a* und *b* können aus Randbedingungen bestimmt werden:

$\bar{\sigma}_R(\psi=1)=a-b=-p_I$, $\bar{\sigma}_R(\psi=\psi_A)=a-b\psi_A=-p_A$.

101. Geben Sie die Verläufe der Durchschnittsspannungen $\bar{\sigma}_R$, $\bar{\sigma}_\varphi$ und $\bar{\sigma}_z$ einer schnell rotierenden Kreisringscheibe mit der Anwendung der Veränderliche λ an! Definieren Sie die Veränderliche λ und die Konstante in den Zusammenhängen! Wie kann man die Konstante bestimmen?

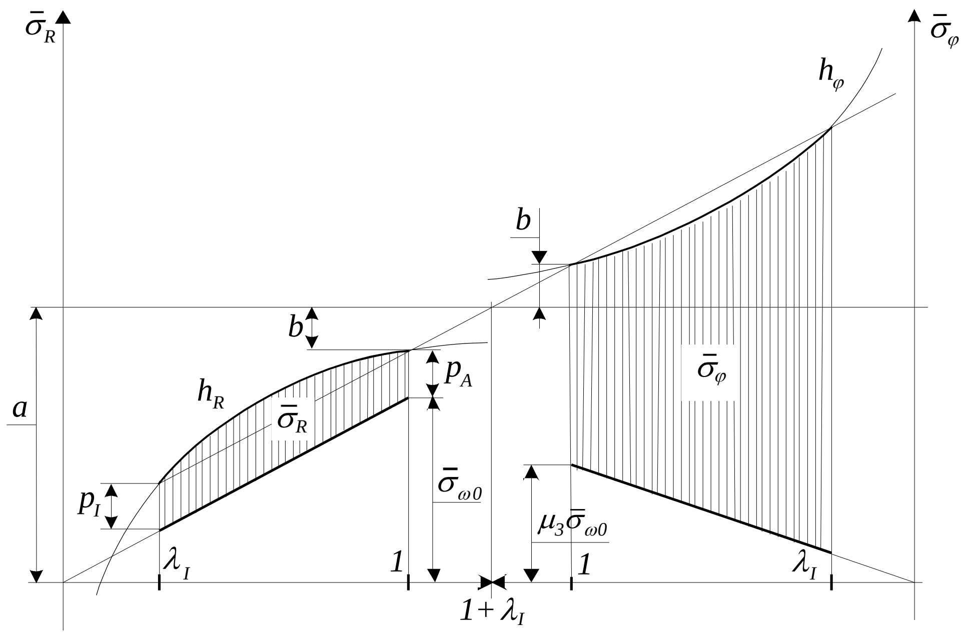
Spannungsverläufe: $\bar{\sigma}_R=a-\dfrac{b}{\lambda}-\bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda,\quad \bar{\sigma}_\varphi=a+\dfrac{b}{\lambda}-\mu_3\bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda,\quad \bar{\sigma}_z=0$, wobei $\lambda=\dfrac{R^2}{R_A^2}$

Konstante: $\bar{\sigma}_{\omega 0}=\dfrac{(3+\nu)}{\nu}\dfrac{\rho}{8}(R_A\,\omega)^2,\quad \mu_3=\dfrac{1+3\nu}{3+\nu}$.

Die Konstante a und b können aus den Randbedingungen bestimmt werden:

$R=R_I$, $(\lambda=\lambda_I)$, $\bar{\sigma}_R=p_I$, $R=R_A$, $(\lambda=1)$, $\bar{\sigma}_R=p_A$.

102. Skizzieren Sie das Spannungsdiagramm von schnell rotierenden Kreisringscheiben für den Fall $p_I\neq p_A\neq 0$!

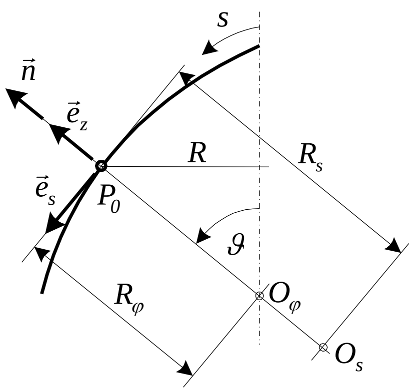


103. Definieren die Schale und die Mittelfläche einer Schale!

Schale: Ein Körper, bei dem die eine Dimension des Körpers wesentlich kleiner ist als die zwei anderen. Man kann eine Mittelfläche definieren, die nicht eben ist.

Mittelfläche: Die Punkte, die die Schalendicke halbieren, bilden die Mittelfläche.

104. Geben Sie die Definition der rotationssymmetrischen Schale, des Normalschnittes und des Meridianschnittes an! Veranschaulichen Sie die Antwort mit einem Bild!



Rotationsschale:

- Die Mittelfläche der Schale ist rotationssymmetrisch.
- Die Mittelfläche wird durch eine Umdrehung der Meridiankurve erzeugt.
- Die Belastung der Schale ist ebenfalls rotationssymmetrisch.

$\vec{e}_z = \vec{n}$ ist die Normale der Mittelfläche.

Meridianschnitt: ein Schnitt $[\vec{e}_z, \vec{e}_s]$ entlang der Rotationsachse eines Rotationskörpers.

Normalschnitt: der Schnitt, die durch die Einheitsvektoren $\vec{e}_\varphi$ und $\vec{e}_z$ bestimmt ist.

105. Charakterisieren Sie den Membranspannungszustand der Rotationsschalen!

- Die Spannungen ändern sich nicht über die Dicke.
- Alle mechanischen Größen hängen nur von der Veränderlichen s ab.

106. Schreiben Sie den Spannungstensor für den Membranspannungszustand einer Rotationsschale im zu der Mittelfläche gebundenen Koordinatensystem s, φ, z auf! Wie ändern sich die Spannungen über die Schalendicke?

Der Spannungstensor: $$\left[\underline{\underline{F}}\right]_{s\varphi z} = \left[\underline{\underline{F}}(s)\right]_{s\varphi z} = \begin{bmatrix} \sigma_s & \tau_{s\varphi} & 0 \\ \tau_{\varphi s} & \sigma_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Die Spannungsverteilung über die Dicke ist konstant: $$\left.\begin{array}{l} \sigma_s = \text{konstant}, \\ \sigma_\varphi = \text{konstant}, \\ \tau_{s\varphi} = \text{konstant}. \end{array}\right\}$$

107. Schreiben Sie die skalare Form der Gleichgewichtsbedingungen für den Membranspannungszustand einer Rotationsschale auf!

- $F_a = 0$ Gleichgewichtsbedingung in der Richtung der Rotationsachse.
- $\dfrac{N_s}{R_s} + \dfrac{N_\varphi}{R_\varphi} = p_z$.

108. Geben Sie die Definitionen der Platte und der Mittelebene sowie das Verschiebungsfeld der Mittelebene an!

Platte: Ein Körper, bei dem die eine Dimension des Körpers wesentlich kleiner ist als die zwei anderen. Man kann eine ebene Mittelfläche definieren. Die Belastung des Körpers erfolgt senkrecht zur Mittelebene.

Mittelebene: die Punkte, die die Dicke halbieren, bilden eine ebene Fläche.

Der Verschiebungsvektor der Punkte *P(x,y)* der Mittelebene: $\vec{u}(x,y) = w_0(x,y)\,\vec{e}_z$

109. Schreiben Sie die *Kirchhofsche* Hypothese und ihre Folgen, weiterhin die Spannungshypothese auf!

Die *Kirchhoffsche* Hypothese: Die Normalen der unverformten Mittelebene bleiben Normalen der deformierten Mittelebene und der Abstand zwischen den Punkten auf den Normalen ändert sich nicht.

Die Folgen der *Kirchhoffschen* Hypothese:

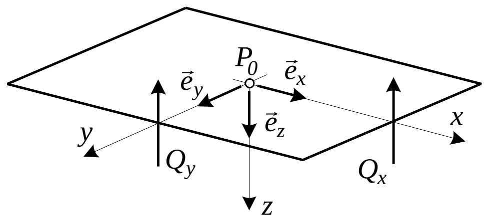
- Der Abstand zwischen den Punkten auf einer Normalen ändert sich nicht: $\varepsilon_z = 0$.
- Eine Normale zur nichtverformten Mittelebene bleibt auch bei der Verformung erhalten: $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$.

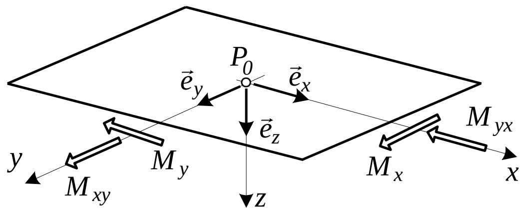
Die Spannungshypothese: $\sigma_z << \sigma_{x,} \sigma_y \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_z \approx 0$.

110. Geben Sie die Definition der Nicht-null-Flächenkräfte / Querkräfte bei der *Kirchhoffschen* Plattentheorie an, und veranschaulichen Sie die Flächenkräfte!

Die Querkräfte: $Q_x = -\int\limits_{(b)} \tau_{zx} dz$, $Q_y = -\int\limits_{(b)} \tau_{zy} dz$.

Veranschaulichung:



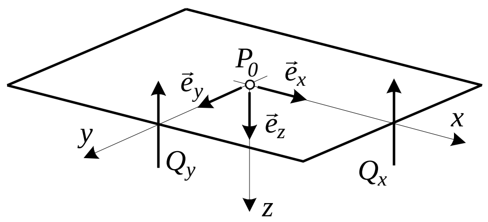


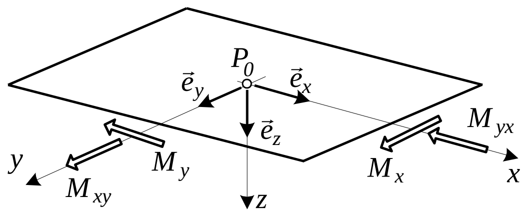
111. Geben Sie die Definition der Nicht-Null-Flächenmomente bei der *Kirchhoffschen* Plattentheorie an, und veranschaulichen Sie die Flächenmomente!

Die Flächenmomente:

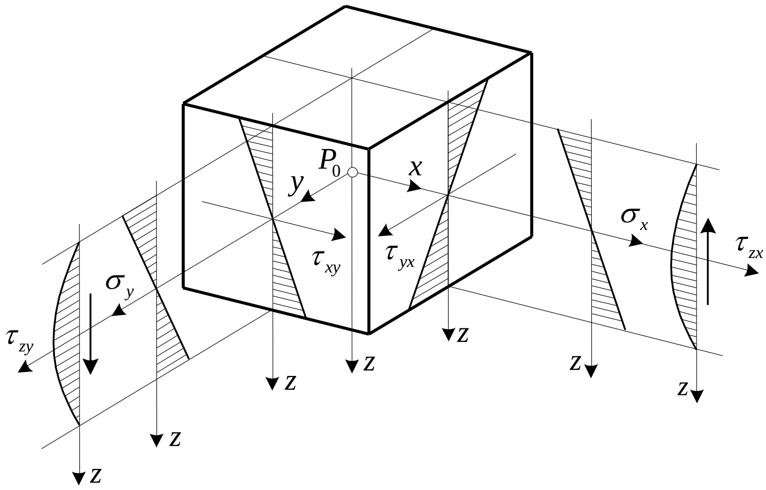
$$M_x = \int\limits_{(b)} z\sigma_x dz \,, \qquad M_y = \int\limits_{(b)} z\sigma_y dz \,, \qquad M_{xy} = M_{yx} = \int\limits_{(b)} z\tau_{xy} dz = \int\limits_{(b)} z\tau_{yx} dz$$

Veranschaulichung:





112. Veranschaulichen Sie den Spannungsverlauf über die Dicke bei der *Kirchhoffschen* Plattentheorie!



P_0
x
y
τ_{xy}
τ_{yx}
σ_x
τ_{zx}
σ_y
τ_{zy}
z