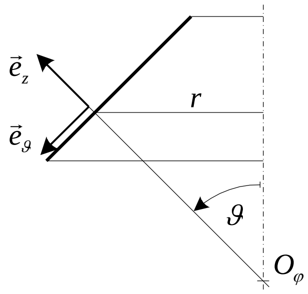
ÜBUNG 10.: ROTATIONSSCHALEN

Aufgabe 1.: Geometrische Kenngrößen der häufigsten Rotationsschalen

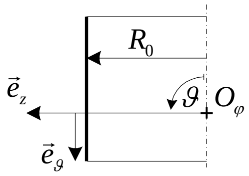
a) Kegelschale



$R_\vartheta \to \infty$,

$R_\varphi = \dfrac{r}{\sin\vartheta}$.

b) Kreiszylinderschale

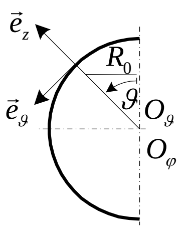


$R_\vartheta \to \infty$,

$R_\varphi = R_0$,

$\vartheta = 90^\circ$.

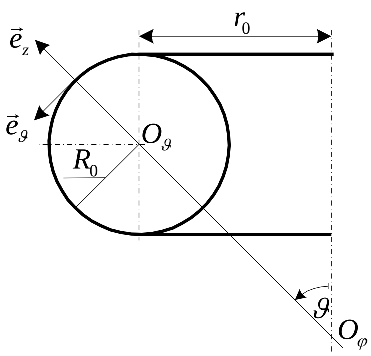
c) Kugelschale



$R_\vartheta = R_0$,

$R_\varphi = R_0$.

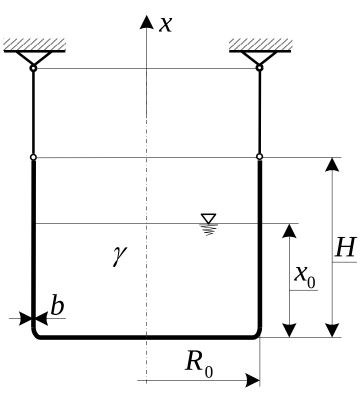
d) Torus-/ Kreisring-Schale



$R_\vartheta = R_0$,

$R_\varphi = R_0 + \dfrac{r_0}{\sin\vartheta}$.

Aufgabe 2.: Mit Flüssigkeit gefüllte Kreiszylinderschale



Gegeben: die Abmessungen eines Kreiszylinder-Behälters mit senkrechter Rotationsachse und die Dichte / das spezifisches Gewicht der Flüssigkeit:
$R_0, x_0, H, b, \gamma = g\rho$.
Wir nehmen an, daß sich der mittlere Teil der Schale im Membranspannungszustand befindet.

Aufgabe: Ermittlung des Spannungszustandes / der Schnittgrößen und des Verzerrungszustandes für die folgenden zwei Fälle:

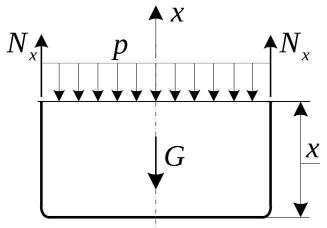
a) Wenn $0 < x < x_0$ und $p_z = \gamma(x_0 - x)$.

b) Wenn $x_0 < x < H$ und $p_z = 0$.

Lösung:

Die Kenngrößen der Geometrie: $s_\vartheta = x$, $R_\vartheta \to \infty$, $R_\varphi = R_0$.

a) Fall $0 < x < x_0$ und $p_z = \gamma(x_0 - x)$:



Das Gewicht der Flüssigkeit im dargestellten Behälterteil: $G = \left(R_0^2 \pi x\right)\gamma$.

Der Flüssigkeitsdruck an der oberen Schnittfläche: $p(x) = \gamma(x_0 - x)$.

Gleichgewichtsbedingung in Richtung der Rotationsachse:

$$2R_0\pi N_x - R_0^2\pi\gamma(x_0 - x) - R_0^2\pi x\gamma = 0,$$

$$N_x = \frac{R_0\gamma(x_0 - x - x)}{2} = \frac{R_0}{2}\gamma(x_0 - 2x).$$

Gleichgewichtsbedingung der Rotationsschale: $\dfrac{N_\vartheta}{R_\vartheta} + \dfrac{N_\varphi}{R_\varphi} = p_z \quad \Rightarrow \quad N_\varphi = R_0 p = R_0\gamma(x_0 - x)$.

Bestimmung der Verzerrungskenngrößen:

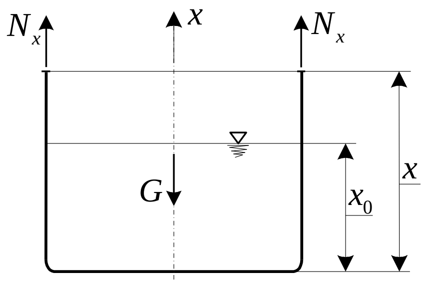
$$\varepsilon_{x0} = \frac{1}{Eb}\left(N_x - \nu N_\varphi\right) = \frac{1}{Eb}\left[\frac{R_0\gamma}{2}(x_0 - 2x) - \nu R_0\gamma(x_0 - x)\right] = \frac{R_0\gamma\nu}{2Eb}\left[\frac{1}{\nu}(x_0 - 2x) - 2(x_0 - x)\right],$$

$$\varepsilon_{\varphi0} = \frac{1}{Eb}\left(N_\varphi - \nu N_x\right) = \frac{1}{Eb}\left[\frac{R_0\gamma}{2}(x_0 - x) - \frac{R_0\gamma}{2}\nu(x_0 - 2x)\right] = \frac{R_0\gamma\nu}{2Eb}\left[\frac{2}{\nu}(x_0 - x) - (x_0 - 2x)\right].$$

Ermittlung der Verschiebungskomponente in radialer Richtung:

$$w_0 = r\varepsilon_{\varphi0} = r\frac{R_\varphi}{bE}\left[p_z - \left(\frac{1}{R_\vartheta} + \frac{\nu}{R_\varphi}\right)N_\vartheta\right] = \frac{R_0^2}{bE}\left[\gamma(x_0 - x) + \frac{\nu}{R_0}\frac{R_0}{2}\gamma(x_0 - 2x)\right] > 0.$$

b) Fall $x_0 < x < H$ und $p_z = 0$:



Gleichgewichtsbedingung in Richtung der Rotationsachse:

$$2R_0\pi N_x - R_0^2\pi x_0\gamma = 0.$$

$$N_x = \frac{R_0 x_0}{2}\gamma = \text{konstant},$$

Gleichgewichtsbedingung der Rotationsschale:

$$\frac{N_\vartheta}{R_\vartheta} + \frac{N_\varphi}{R_\varphi} = p_z \quad \Rightarrow \quad N_\varphi = p_z R_\varphi = 0.$$

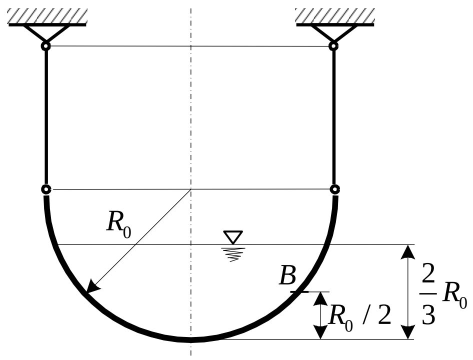
Bestimmung der Verzerrungskenngrößen:

$$\varepsilon_{x0} = \frac{1}{Eb}N_x = \frac{R_0 x_0\gamma}{2Eb}, \quad \varepsilon_{\varphi0} = -\frac{\nu N_\varphi}{Eb} = -\frac{\nu R_0 x_0\gamma}{2Eb}.$$

Ermittlung der Verschiebungskomponente in Radial-Richtung:

$$w_0 = r\varepsilon_{\varphi0} = -\frac{\nu R_0^2 x_0\gamma}{2Eb} < 0.$$

Aufgabe 3.: Mit Flüssigkeit gefüllte Halbkugelschale



Gegeben: die Meridiankurve der Mittelfläche eines Halbkugelbehälters und die Dichte / das spezifisches Gewicht der Flüssigkeit:

$E = 2\cdot 10^5$ N/mm^2, $R_0 = 4\cdot 10^3$ mm, $\nu = 0{,}3$,

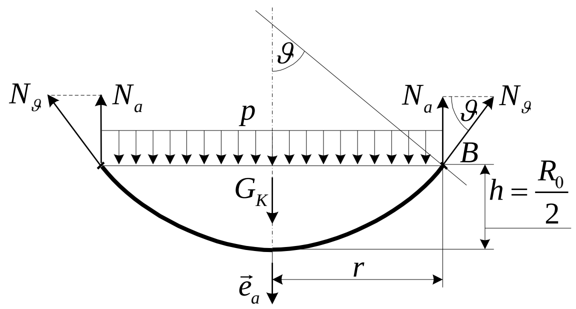
$b = 22{,}5$ mm, $\gamma = 5\cdot 10^{-2}$ N/mm^3.

Wir nehmen an, daß sich die Schale im Membranspannungszustand befindet.

Aufgabe: Ermittlung der Schnittgrößen, der Dehnung $\varepsilon_{\varphi 0}$ und der radialen Verschiebung w_0 im Punkt *B* der Mittelfläche.

Lösung:

a) Bestimmung der Schnittgrößen im Punkt *B* der Mittelfläche:



Das Volumen des Kugelschnittes:

$$V_K = \frac{h\pi}{6}\left[3r^2 + h^2\right].$$

$$\cos\vartheta = \frac{R_0/2}{R_0} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \vartheta = 60^\circ .$$

Die Intensität der Belastung an der Schnittfläche:

$$p = p_z = \gamma\left(\frac{2}{3}R_0 - \frac{1}{2}R_0\right) = \gamma\frac{R_0}{6} = 5\cdot 10^{-4}\cdot\frac{400}{6} = \frac{0{,}2}{6}\ \text{N/mm}^2 .$$

Gleichgewichtsbedingung in Richtung der Rotationsachse: $-2r\pi N_a + r^2\pi p + \gamma V_{sz} = 0$,

$$2r\pi N_a = r^2\pi p + \gamma\frac{h\pi r^2}{6}\left(3 + \frac{h^2}{r^2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad N_a = \frac{rp}{2} + \gamma\frac{rh}{12}\left(3 + \frac{h^2}{r^2}\right).$$

$$N_a(B) = \frac{\sqrt{3}}{4}R_0 p + \gamma\frac{\sqrt{3}}{24}R_0 h\left(3 + \frac{4h^2}{3R_0}\right) = \frac{8\sqrt{3}}{9}\cdot 10^2\ \text{N/mm},$$

$$N_\vartheta(B) = \frac{N_a(B)}{\cos\vartheta} = \frac{1600}{9} = 177{,}78\ \text{N/mm}.$$

Gleichgewichtsbedingung der Rotationsschale: $\frac{N_\vartheta}{R_\vartheta} + \frac{N_\varphi}{R_\varphi} = p_z$,

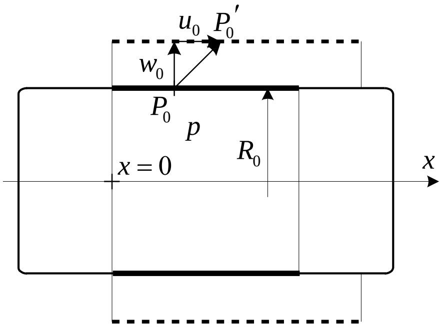
$$N_\varphi = R_0 p_z - N_\vartheta = 400\cdot\frac{1}{30} - \frac{1600}{9} = \frac{120 - 1600}{9} - 164{,}44\ \text{N/mm}.$$

b) Berechnung der Dehnung $\varepsilon_{\varphi 0}$ und der radialen Verschiebung w_0 im Punkt *B* der Mittelfläche:

$$\varepsilon_{\varphi 0} = \frac{1}{Eb}\left(N_\varphi - \nu N_\vartheta\right) = \frac{1}{2\cdot 10^5\cdot 22{,}5}\left(-177{,}78 + 0{,}3\cdot 164{,}44\right) = -2{,}854\cdot 10^{-5}.$$

$$w_0 = r\varepsilon_{\varphi 0} = 400\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-2{,}854\cdot 10^{-5}\right) = -0{,}0098\,\text{mm}\,.$$

Aufgabe 4.: Formänderung einer Kreiszylinderschale im Membranspannungszustand



Gegeben:

Die Abmessungen und das Material einer Kreiszylinderschale sowie ihre Belastung, ein Innendruck: R_0, b, E, ν, p

Es wird der mittlere Teil der Schale, der sich im Membranspannungszustand befindet, untersucht.

Aufgabe:

a) Bestimmung der Schnittgrößen.

b) Ermittlung der Verzerrungen.

c) Berechnung der Verschiebungskomponenten.

Lösung:

a) Bestimmung der Schnittgrößen:

$$N_x = \frac{pR_0}{2} = \text{konstant}\,, \qquad N_\varphi = pR_0 = \text{konstant}\,.$$

b) Ermittlung der Verzerrungen:

$$\varepsilon_{x0} = \frac{1}{Eb}\left(N_x - \nu N_\varphi\right) = \frac{1}{Eb}\left(\frac{pR_0}{2} - \nu pR_0\right) = \frac{1-2\nu}{2}\frac{R_0}{b}\frac{p}{E}\,.$$

$$\varepsilon_{\varphi 0} = \frac{1}{Eb}\left(-\nu N_x + \mathrm{N}_\varphi\right) = \frac{1}{Eb}\left(-\nu\frac{pR_0}{2} + pR_0\right) = \frac{2-\nu}{2}\frac{R_0}{b}\frac{p}{E}\,.$$

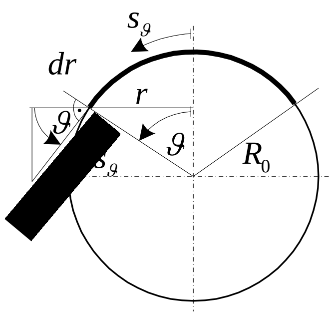
c) Berechnung der Verschiebungskomponenten:

$$w_0 = R_0\varepsilon_{\varphi 0} = \frac{2-\nu}{2}\frac{R_0^2}{b}\frac{p}{E} = \text{konstant}\,.$$

$$u_0 - \underbrace{u_0\big|_{x=0}}_{=0} = \int_{\xi=0}^{x}\varepsilon_{x0}\,d\xi = \varepsilon_{x0}\cdot x = \frac{1-2\nu}{2}\frac{R_0}{b}\frac{p}{E}x\,.$$

$w_0 = \text{konstant}$ $\Rightarrow$ Die Kreiszylinderschale dehnt sich im Membranspannungszustand gleichmäßig aus.

Aufgabe 5.: Formänderung einer Kugelschale im Membranspannungszustand



Aus dem Bild: $\dfrac{dr}{ds_\vartheta} = \cos\vartheta$.

Gegeben:

Die Abmessungen und das Material einer Kugelschale sowie ihre Innendruck-Belastung: R_0, b, E, ν, p

Es wird angenommen, daß sich die Schale im Membranspannungszustand befindet.

Aufgabe:

a) Bestimmung der Schnittgrößen aus den Gleichgewichtsbedingungen.

b) Ermittlung der Verzerrungen.

c) Berechnung der Verschiebungskomponenten.

Lösung:

a) Bestimmung der Schnittgrößen aus den Gleichgewichtsbedingungen:

$$N_\vartheta = N_\varphi = \frac{pR_0}{2} = \text{konstant}\,.$$

b) Ermittlung der Verzerrungen:

$$\varepsilon_{\vartheta 0} = \frac{1}{Eb}\left(N_\vartheta - \nu N_\varphi\right),\quad \varepsilon_{\varphi 0} = \frac{1}{Eb}\left(-\nu N_\vartheta + \mathrm{N}_\varphi\right),\ \Rightarrow\ \varepsilon_{\vartheta 0} = \varepsilon_{\varphi 0} = \frac{1}{Eb}\left(\frac{R_0 p}{2} - \nu\frac{R_0 p}{2}\right) = \frac{1-\nu}{2}\frac{R_0}{b}\frac{p}{E}\,.$$

c) Berechnung der Verschiebungskomponenten:

$$w_0 = \varepsilon_{\varphi 0} r = \frac{1-\nu}{2}\frac{R_0}{b}\frac{p}{E}\left(R_0 \sin\vartheta\right) = \frac{1-\nu}{2}\frac{R_0^2}{b}\frac{p}{E}\sin\vartheta\,.$$

$$\frac{du_0}{ds_\vartheta} = \frac{\varepsilon_{\vartheta 0}}{\sin\vartheta} - \operatorname{ctg}\vartheta\frac{d}{ds_\vartheta}\left(r\varepsilon_{\varphi 0}\right) = \frac{\varepsilon_{\vartheta 0}}{\sin\vartheta} - \operatorname{ctg}\vartheta\cos\vartheta\,\varepsilon_{\varphi 0}\,.$$

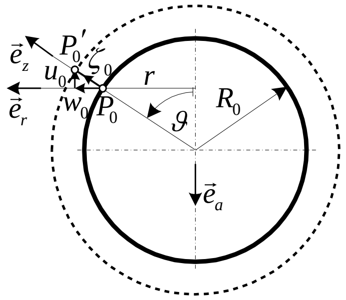
Umformung: $\dfrac{dr}{ds_\vartheta} = \cos\vartheta\,.$

$$\frac{du_0}{ds_\vartheta} = \varepsilon_{\vartheta 0}\frac{1}{\sin\vartheta} - \frac{\cos^2\vartheta}{\sin\vartheta}\varepsilon_{\varphi 0} = \varepsilon_{\vartheta 0}\frac{1-\cos^2\vartheta}{\sin\vartheta} = \varepsilon_{\vartheta 0}\sin\vartheta\,,$$

Integration mit Hilfe des Zusammenhanges $ds_\vartheta = R_0\, d\vartheta$: $\dfrac{u_0}{R_0} = \varepsilon_{\vartheta 0}\displaystyle\int \sin\vartheta\, d\vartheta = -\varepsilon_{\vartheta 0}\cos\vartheta + C\,.$

Randbedingung: $\vartheta = \dfrac{\pi}{2}$, $\quad u_0 = 0 \quad\Rightarrow\quad C = 0\,.$

$$u_0 = -R_0\varepsilon_{\vartheta 0}\cos\vartheta = -\frac{1-\nu}{2}\frac{R_0^2}{b}\frac{p}{E}\cos\vartheta\,.$$



Transformation:

$$\xi_0 = u_0\sin\vartheta + w_0\cos\vartheta\,,$$

$$\zeta_0 = -u_0\cos\vartheta + w_0\sin\vartheta\,.$$

Die Verschiebungskomponenten nach der Transformation: $\quad \xi_0 = 0\,,\quad \zeta_0 = \dfrac{1-\nu}{2}\dfrac{R_0^2}{b}\dfrac{p}{E} = \text{konstant}\,.$

Die Kugelschale dehnt sich im Membranspannungszustand gleichmäßig aus.