ÜBUNG 11.: PLATTEN

Aufgabe 1.: Spannungszustand einer Platte

Gegeben: Die Dicke und der Spannungszustand / die Schnittgrößen im Punkt P_0 der Mittelebene einer Platte.

$b = 40$ mm, $Q_x = 100$ N/mm, $Q_y = -50$ N/mm, $M_x = 2 \cdot 10^4$ Nmm/mm, $M_y = -4 \cdot 10^4$ Nmm/mm,

$M_{xy} = M_{yx} = 2 \cdot 10^4$ Nmm/mm.

Aufgabe: a) Veranschaulichung / Grafische Darstellung der Schnittgrößen (der Flächenkräfte / der Querkräfte und der Flächenmomente / der Biegemomente und des Drillmomentes) am elementaren Quadrat im Punkt P_0 der Mittelebene der Platte.

b) Veranschaulichung / Grafische Darstellung des Charakters der Spannungsverläufe über die Dicke im Punkt P_0.

c) Berechnung des Spannungstensors im Punkt $z = -b/4$.

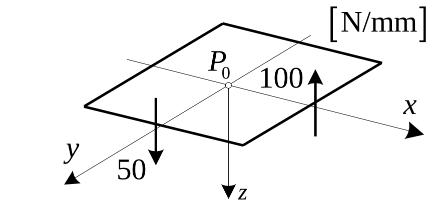
Lösung:

a) Veranschaulichung / Grafische Darstellung der Querkräfte (der Querkräfte) und der Flächenmomente (der Biegemomente und des Drillmomentes) am elementaren Quadrat im Punkt P_0 der Mittelebene der Platte:

Die Flächenkräfte / Die Querkräfte:

$Q_x = 100$ N/mm,

$Q_y = -50$ N/mm.

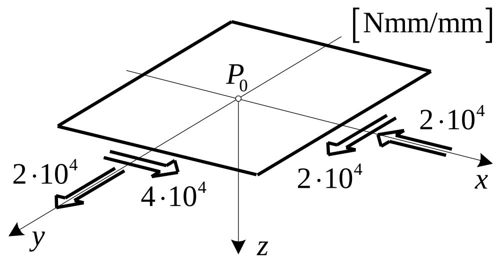


Die Flächenmomente /
Die Biegemomente und das Drillmoment:

$M_x = 2 \cdot 10^4$ Nmm/mm,

$M_y = -4 \cdot 10^4$ Nmm/mm,

$M_{xy} = M_{yx} = 2 \cdot 10^4$ Nmm/mm.



b) Veranschaulichung / Grafische Darstellung des Charakters der Spannungsverläufe über die Dicke im Punkt P_0:

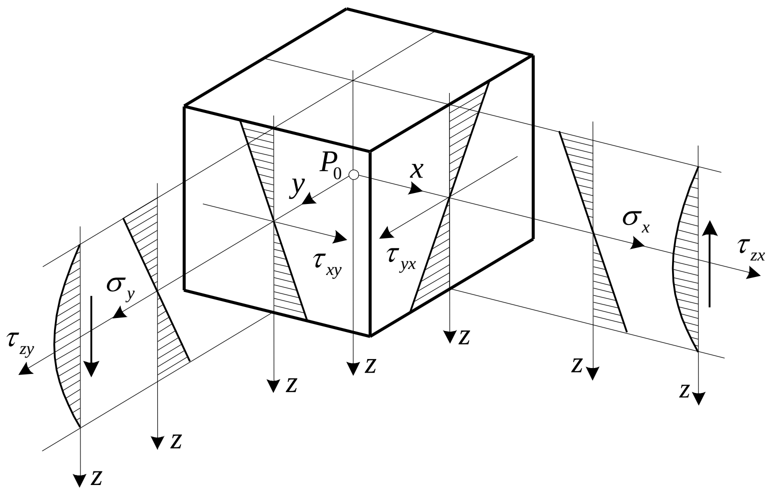
Spannungsverläufe:

$$\sigma_x = \frac{M_x}{I_1} z, \quad I_1 = \frac{b^3}{12},$$

$$\sigma_y = \frac{M_y}{I_1} z, \quad \tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{I_1} z,$$

$$\tau_{xz} = -\frac{Q_x}{2I_1}\left(\frac{b^2}{4} - z^2\right),$$

$$\tau_{yz} = -\frac{Q_y}{2I_1}\left(\frac{b^2}{4} - z^2\right).$$



c) Berechnung des Spannungstensors im Punkt $z = -b/4$:

$$\sigma_x = \frac{M_x}{I_1}\left(-\frac{b}{4}\right) = -\frac{3M_x}{b^2} = -\frac{6\cdot 10^4}{16\cdot 10^2} = -\frac{300}{8} = -37{,}5\ \text{MPa}\,,$$

$$\sigma_y = \frac{M_y}{I_1}\left(-\frac{b}{4}\right) = -\frac{3M_y}{b^2} = \frac{12\cdot 10^4}{16\cdot 10^2} = \frac{300}{4} = 75\ \text{MPa}\,,$$

$$\tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{I_1}\left(-\frac{b}{4}\right) = -\frac{3M_{xy}}{b^2} = -\frac{6\cdot 10^4}{16\cdot 10^2} = -\frac{600}{16} = -37{,}5\ \text{MPa}\,,$$

$$\tau_{xz} = -\frac{Q_x}{\frac{b^3}{6}}\left(\frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{16}\right) = -\frac{9Q_y}{8b^3} = \frac{450}{320} = -2{,}8125\ \text{MPa}\,,\quad \tau_{yz} = -\frac{Q_y}{\frac{b^3}{6}}\left(\frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{16}\right) = -\frac{9Q_y}{8b} = \frac{450}{320} \cong 1{,}4\ \text{MPa}\,.$$

Der Spannungstensor:

$$\left[\underline{\underline{F}}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -37{,}5 & -37.5 & -2{,}81 \\ -37{,}5 & 75 & 1{,}4 \\ -2.81 & 1{,}4 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

Aufgabe 2.: Spannungszustand einer Platte

<u>Gegeben</u>: Die Dicke und der Spannungszustand / die Schnittgrößen im Punkt P_0 der Mittelebene einer Platte.

$b = 20\ \text{mm}$, $Q_x = Q_y = -100\ \text{N/mm}$, $M_{xy} = M_{yx} = -666\ \text{MPa}$, $M_x = 1320\ \text{MPa}$, $M_y = 2640\ \text{MPa}$.

<u>Aufgabe</u>: a) Veranschaulichung /Grafische Darstellung der Schnittgrößen (der Flächenkräfte / der Querkräfte und der Flächenmomente / der Biegemomente und des Drillmomentes) am elementaren Quadrat im Punkt P_0 der Mittelebene der Platte.

b) Berechnung des Spannungstensors im Punkt *B*: $z_B = -5\ \text{mm}$.

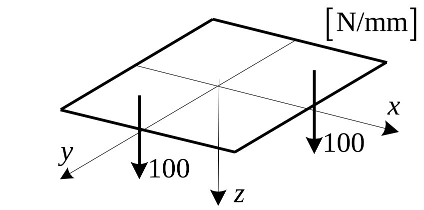
c) Veranschaulichung / Grafische Darstellung des Charakters der Spannungsverläufe über die Dicke im Punkt P_0.

<u>Lösung</u>:

a) Veranschaulichung / Grafische Darstellung der Schnittgrößen (der Flächenkräfte / der Querkräfte und der Flächenmomente / der Biegemomente und des Drillmomentes) am elementaren Quadrat im Punkt P_0 der Mittelebene der Platte:

Die Flächenkräfte / Die Querkräfte:

$Q_x = Q_y = -100\ \text{N/mm}$.

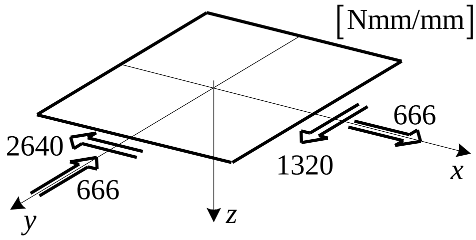


Die Flächenmomente /
Das Drillmoment und die Biegemomente:

$M_{xy} = M_{yx} = -666\ \text{Nmm/mm}$,

$M_x = 1320\ \text{Nmm/mm}$,

$M_y = 2640\ \text{Nmm/mm}$.

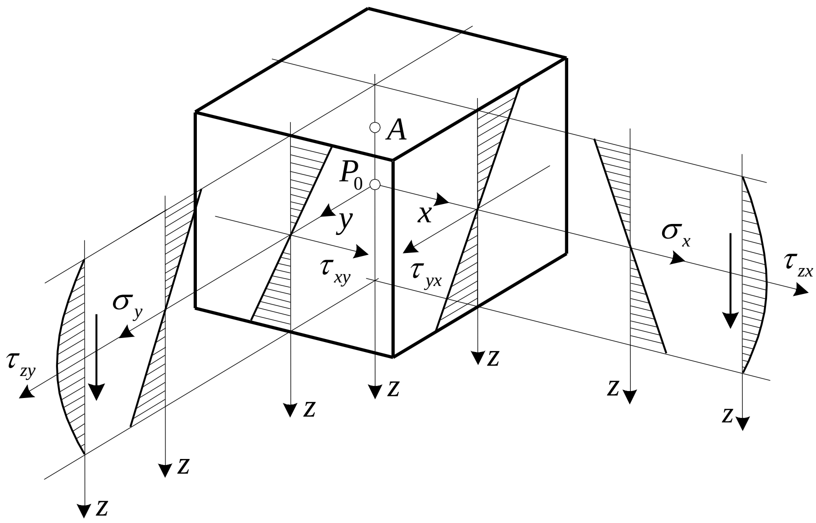


b) Berechnung des Spannungstensors im Punkt *B*: $z_B = -5\ \text{mm}$:

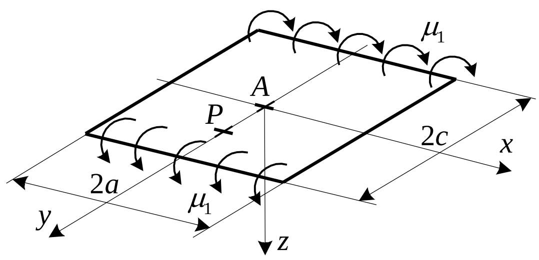
$$\sigma_x = \frac{M_x}{\frac{b^3}{12}}\left(-\frac{b}{4}\right) = -\frac{3M_x}{b^2} = -\frac{3\cdot 1320}{4\cdot 10^2} = 9{,}9\ \text{MPa}\,,\qquad \tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{\frac{b^3}{12}}\left(-\frac{b}{4}\right) = -\frac{3M_{xy}}{b^2} = -\frac{3\cdot 666}{4\cdot 10^2} = 5\ \text{MPa}\,,$$

$$\tau_{zx} = -\frac{Q_x}{2I_1}\left(\frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{16}\right) = -\frac{6Q_x}{b^3}\frac{3b^2}{16} = -\frac{9}{8}Q_x\frac{1}{b} = -\frac{900}{160} = 5{,}625\ \text{MPa}\ .$$

c) Veranschaulichung / Grafische Darstellung des Charakters der Spannungsverläufe über die Dicke im Punkt P_0:



Aufgabe 3.: Spannungszustand einer mit Momenten belasteten Platte



Die Rechteckplatte mit der Dicke $b = 20$ mm ist an ihren parallelen Seiten mit den Linienmomenten μ_1 belastet. Die Durchbiegung der Mittelfläche wird mit der Funktion $w_0 = C_1x^2 + C_2y^2$ bestimmt.

Gegeben: Die Abmessungen und das Material der Platte:

$$a = 200\ \text{mm},\ c = 240\ \text{mm},\ \mu_1 = 3000\ \text{Nmm/mm},\ \nu = \frac{1}{3},\ E = 200\ \text{GPa} = 2\cdot 10^5\text{MPa}\ .$$

Aufgabe: a) Formulierung der dynamischen Randbedingungen.

b) Ermittlung der Konstanten C_1 und C_2 der Durchbiegungsfunktion.

c) Berechnung der Schnittgrößen (der Flächenkräfte / der Querkräfte und der Flächenmomente / der Biegemomente und des Drillmomentes) im Punkt $P(0, y, 0)$ der Mittelebene der Platte.

d) Berechnung des Spannungstensors im Punkt A $\left(x_A = y_A = 0,\ z_A = -10\ \text{mm}\right)$.

Lösung:

a) Formulierung der dynamischen Randbedingungen:

$$\left.\begin{array}{ll} y = \pm c & M_y = -\mu_1 \\ x = \pm a & M_x = 0 \end{array}\right\}$$

b) Ermittlung der Konstanten C_1 und C_2 der Durchbiegungsfunktion:

Die geometrischen und Material-Koeffizienten: $I_1 = \frac{b^2}{12}$, $E_1 = E\frac{1}{1-\nu^2}$.

Die zweiten Ableitungen der Durchbiegungsfunktion: $\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 2C_1$, $\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 2C_2$

$$\left.\begin{aligned} M_y &= -I_1E_1\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) = -I_1E_1\left(2C_2+\nu 2C_1\right) = -\mu_1 \\ M_x &= -I_1E_1\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) = -I_1E_1\left(2C_1+\nu 2C_2\right) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_1 = -C_2\nu .$$

In die ersten Gleichung eingesetzt: $2\nu^2C_2 - 2C_2 = \dfrac{\mu_1}{I_1E_1}$, $\Rightarrow$ $C_2 = \dfrac{1}{1-\nu^2}\dfrac{\mu_1}{2I_1E_1} = \dfrac{6\mu_1}{b^3E}$.

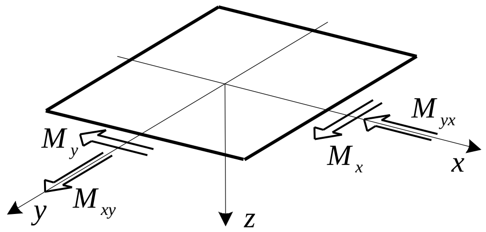
$$C_1 = -\nu C_2 = -\nu\frac{1}{1-\nu^2}\frac{\mu_1}{2I_1E_1} .$$

c) Berechnung der Schnittgrößen (der Flächenkräfte / der Querkräfte und der Flächenmomente / der Biegemomente und des Drillmomentes) im Punkt $P(0,y,0)$ der Mittelebene der Platte:

Die Flächenkräfte / Die Querkräfte:

$$\left.\begin{aligned} Q_x &= I_1E_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta w_0\right) = 0 \\ Q_y &= I_1E_1\frac{\partial}{\partial y}\left(\Delta w_0\right) = 0 \end{aligned}\right\} .$$

Die Flächenmomente /
Die Biegemomente und das Drillmoment:



$$M_y = -I_1E_1\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) = -\mu_1 ,$$

$$M_x = -I_1E_1\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) = 0 ,$$

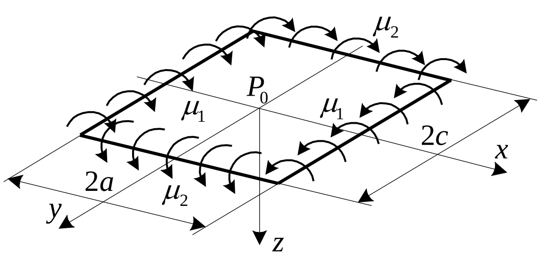
$$M_{xy} = M_{yx} = -I_1E_1(1-\nu)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0 .$$

d) Berechnung des Spannungstensors im Punkt A $\left(x_A = y_A = 0,\ z_A = -10\,\text{mm}\right)$:

$$\sigma_y\big|_A = \frac{M_y}{I_1}z_A = -\frac{\mu_1}{I_1}z_A = -\frac{12\cdot 3000}{20^3}\left(-10\right) = 45\,\text{MPa} .$$

$$\left[\underline{\underline{F}}_A\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\text{MPa} .$$

Aufgabe 4.: Spannungszustand einer mit Momenten belasteten Platte



Die Rechteckplatte mit der Dicke $b = 30\,\text{mm}$ ist an ihren parallelen Seiten mit den Linienmomenten μ_1 belastet. Die Durchbiegung der Mittelfläche wird mit der Funktion $w_0 = C_1x^2 + C_2y^2 + C_3xy + C_4x + C_5y + C_6$ bestimmt.

Gegeben: $\mu_1 = 1000\,\text{Nmm/mm}$, $\mu_1 = 1500\,\text{Nmm/mm}$,

$\nu = \dfrac{1}{3}$, $a = 200\,\text{mm}$, $c = 240\,\text{mm}$, $E = 2\cdot 10^5\,\text{MPa}$.

Aufgabe: a) Formulierung der dynamischen Randbedingungen.
b) Ermittlung der Konstanten C_1, …, C_6 der Durchbiegungsfunktion.
c) Bestimmung und Veranschaulichung / grafische Darstellung der Schnittgrößen im Punkt P_0.
d) Veranschaulichung / Grafische Darstellung der Spannungsverläufe über die Dicke im Punkt P_0.

Lösung:

a) Formulierung der dynamischen Randbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} x=\pm a \qquad & M_x=-I_1E_1\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)=\mu_1, \\ y=\pm c \qquad & M_y=-I_1E_1\left(\nu\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)=-\mu_2. \end{aligned}\right\}$$

b) Ermittlung der Konstanten $C_1, \ldots, C_6$ der Durchbiegungsfunktion.

Die zweiten Ableitungen der Durchbiegungsfunktion: $\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}=2C_1 \qquad \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}=2C_2$.

Die dynamischen Randbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} & M_x=-2I_1E_1\left(C_1+\nu C_2\right)=\mu_1 \\ & M_y=-2I_1E_1\left(\nu C_1+C_2\right)=-\mu_2 \qquad /\,\nu \end{aligned}\right\}$$

Die zweite Gleichung multipliziert mit ν und abgezogen von der ersten Gleichung:

$$-2I_1E_1\left[\left(1-\nu^2\right)C_1+0\right]=\mu_1+\nu\mu_2, \qquad \Rightarrow \qquad C_1=-\frac{1}{2I_1E_1}\frac{1}{1-\nu^2}\left(\mu_1+\nu\mu_2\right),$$

$$-2I_1E_1\left[0+\left(1-\nu^2\right)C_2\right]=-\left(\mu_2+\nu\mu_1\right), \qquad \Rightarrow \qquad C_2=\frac{1}{2I_1E_1}\frac{1}{1-\nu^2}\left(\mu_2+\nu\mu_1\right).$$

Geometrische Bedingung: die deformierte Mittelfläche soll die Ebene xy im Punkt $x=y=0$ berühren:

$$w_0=0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial y}=0 \quad \Rightarrow \quad C_4=C_5=C_6=0.$$

Die Formänderung soll symmetrisch sein: $\Rightarrow \quad C_3=0$.

c) Bestimmung und Veranschaulichung / grafische Darstellung der Schnittgrößen im Punkt P_0:

$$M_x=-I_1E_1\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)=-2I_1E_1\left(C_1+\nu C_2\right)=$$

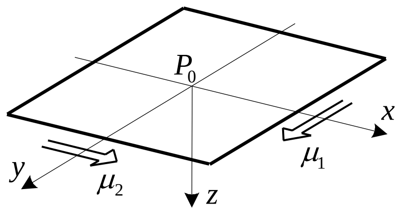
$$=-2I_1E_1\left[-\frac{1}{2I_1E_1}\left(\mu_1+\nu\mu_2\right)+\nu\frac{1}{2I_1E_1}\left(\mu_2+\nu\mu_1\right)\right]\frac{1}{1-\nu^2}=\frac{1}{1-\nu^2}\left[\mu_1+\nu\mu_2-\nu\mu_2-\nu^2\mu_1\right]=\mu_1,$$

$$M_y=-I_1E_1\left(\nu\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)=-2I_1E_1\left(\nu C_1+C_2\right)=$$

$$=-2I_1E_1\frac{1}{2I_1E_1}\left[-\nu\left(\mu_1+\nu\mu_2\right)+\mu_2+\nu\mu_1\right]\frac{1}{1-\nu^2}=-\frac{1}{1-\nu^2}\left[-\nu\mu_1-\nu^2\mu_2+\mu_2+\nu\mu_1\right]=-\mu_2,$$

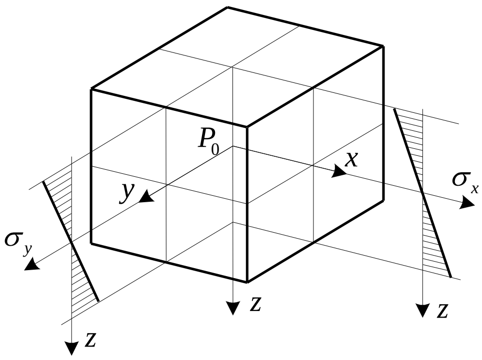
$$M_{xy}=M_{yx}=-I_1E_1(1-\nu)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}=0, \quad Q_x=I_1E_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta w_0\right)=0, \quad Q_y=I_1E_1\frac{\partial}{\partial y}\left(\Delta w_0\right)=0.$$

Veranschaulichung:



d) Veranschaulichung / Grafische Darstellung der Spannungsverläufe über die Dicke im Punkt P_0:

Spannungsverläufe:



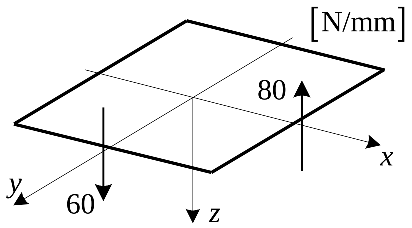
$$\sigma_x = \frac{M_x}{I_1} z = \frac{\mu_1}{I_1} z\,,\quad \sigma_y = \frac{M_y}{I_1} z = -\frac{\mu_2}{I_1} z\,,$$

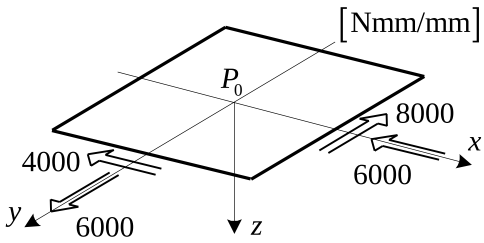
$$\tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{I_1} z = 0\,,\quad I_1 = \frac{b^3}{12}$$

$$\tau_{xz} = -\frac{Q_x}{2I_1}\left(\frac{b^2}{4} - z^2\right) = 0\,,\quad \tau_{yz} = -\frac{Q_y}{2I_1}\left(\frac{b^2}{4} - z^2\right) = 0\,.$$

Aufgabe 5.: Spannungszustand einer Platte

Gegeben: die Schnittgrößen im Punkt P_0 einer Platte mit der Dicke $b = 20$ mm:





Aufgabe:

a) Bestimmung der Schnittgrößen.

b) Veranschaulichung / Grafische Darstellung der Spannungsverläufe über die Dicke im Punkt P_0.

c) Berechnung der Spannungskomponenten σ_x, τ_{xy} und τ_{zy} an der Stelle $z = -5$ mm.

Lösung:

a) Bestimmung der Schnittgrößen:

Die Querkräfte:

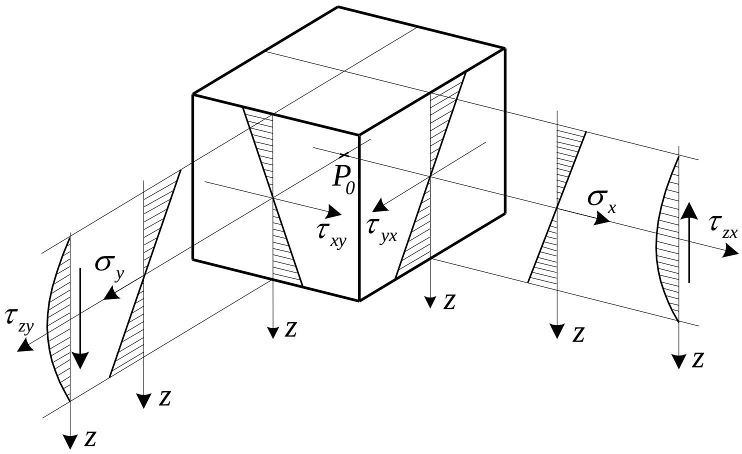
$Q_x = 80$ N/mm, $Q_y = -60$ N/mm.

Die Flächenmomente:

$M_{yx} = 6000$ Nmm/mm, $M_y = 4000$ Nmm/mm,

$M_x = -8000$ Nmm/mm.

b) Veranschaulichung / Grafische Darstellung der Spannungsverläufe über die Dicke im Punkt P_0:



c) Berechnung der Spannungskomponenten σ_x, σ_y, τ_{xy}, τ_{zx} und τ_{zy} an der Stelle $z = -5$ mm:

$$z = -\frac{b}{4} = -5\text{ mm}\,,$$

$$\sigma_x = \frac{M_x}{\frac{b^3}{12}}\left(-\frac{b}{4}\right) = -\frac{3M_x}{b^2} = -\frac{3\cdot(-8000)}{400} = 60 \text{ MPa}\,, \quad \sigma_y = \frac{M_y}{\frac{b^3}{12}}\left(-\frac{b}{4}\right) = -\frac{3M_y}{b^2} = -\frac{3\cdot 4000}{400} = -30 \text{ MPa}\,,$$

$$\tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{\frac{b^3}{12}}\left(-\frac{b}{4}\right) = -\frac{3M_{xy}}{b^2} = -\frac{3\cdot 60\cdot 10^2}{4\cdot 10^2} = -45 \text{ MPa}\,,$$

$$\tau_{zy} = -\frac{Q_y}{2I_1}\left(\frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{16}\right) = -\frac{6Q_y}{b^3}\frac{3b^2}{16} = -\frac{Q_y}{b}\frac{9}{8} = \frac{60\cdot 9}{20\cdot 8} = 3{,}375 \text{ MPa}\,,$$

$$\tau_{zx} = -\frac{Q_x}{2I_1}\left(\frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{16}\right) = -\frac{6Q_x}{b^3}\frac{3b^2}{16} = -\frac{Q_x}{b}\frac{9}{8} = -\frac{80\cdot 9}{20\cdot 8} = -4{,}5 \text{ MPa}\,.$$