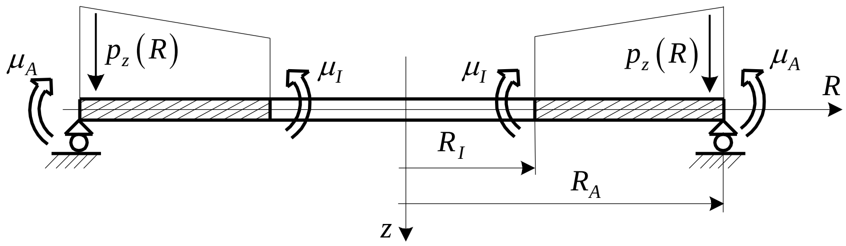
ÜBUNG 12.: KREIS- UND KREISRINGPLATTEN

Aufgabe 1.: Dimensionierung und Sicherheitsnachweis einer Kreisringplatte

Gegeben: Abmessungen und die Belastung der Platte.



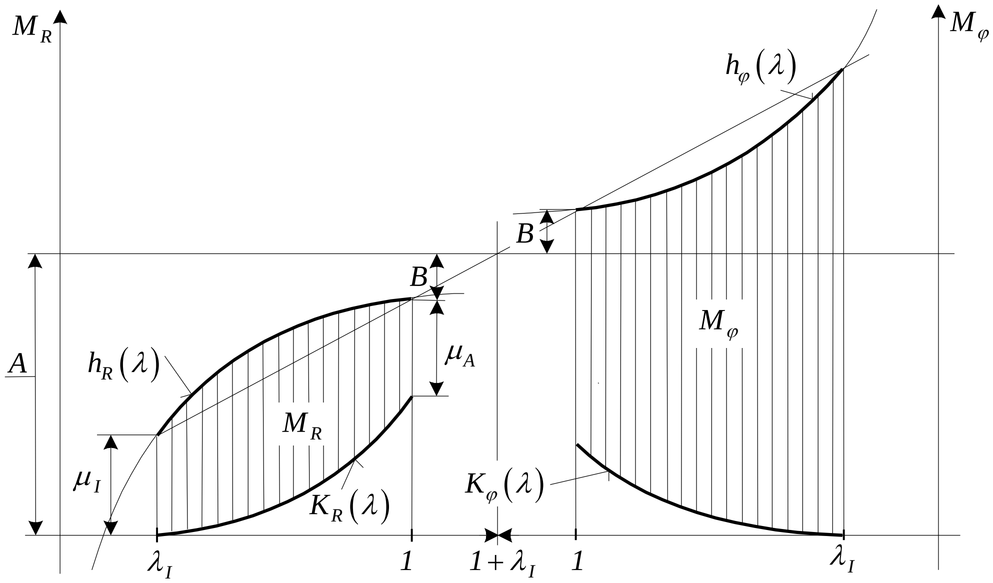
Aufgabe: Beschreibung des Gedankenganges der Dimensionierung und des Sicherheitsnachweises.

Gedankengang:

Randbedingungen: $\lambda = \lambda_I \;,\; M_R = \mu_I \;\Rightarrow\; h_R(\lambda) = \mu_I + K_R(\lambda_I),$

$\lambda = 1 \;,\; M_R = \mu_A \;\Rightarrow\; h_R(\lambda = 1) = \mu_A + K_R(\lambda = 1).$

Schnittgrößendiagramm:



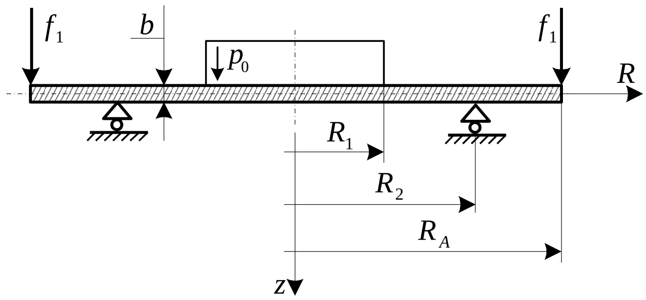
In diesem Fall $M_R > 0 \;,\; M_\varphi > 0.$

Aus dem Schnittgrößendiagramm kann man die kritische Stelle (den kritischen Radius) der Platte bestimmen.

Der kritische Radius ist in diesem Fall λ_I (oder R_I).

- Berechnung der Spannungen: $\sigma_R = \dfrac{M_R}{I_1} z, \qquad \sigma_\varphi = \dfrac{M_\varphi}{I_1} z, \qquad \tau_{zR} = -\dfrac{Q_R}{2I_1}\left(\dfrac{b^2}{4} - z^2\right), \qquad \sigma_z = 0.$
- Bei der Plattenbiegung: $\sigma_{R\,max} \;, \sigma_{\varphi\,max} >> \tau_{Rz\,max}.$ Kritische Stelle: die $z = \pm\dfrac{b}{2}$ Oberflächen.
- Die maximale Vergleichsspannung an der Stelle $R = R_I$ und $z = \pm\dfrac{b}{2}$: $\sigma_{V\,max} = \left(\sigma_\varphi - \sigma_z\right)_{max} = \sigma_\varphi(\lambda_I).$
- Dimensionierung, Sicherheitsnachweis: $\sigma_{V\,max} << \sigma_{zul}.$

Aufgabe 2.: Rotationssymmetrisch belastete Kreisplatte



Gegeben:

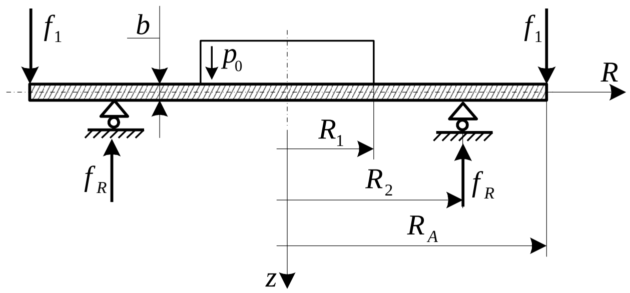
Die Abmessungen und die Belastung einer Kreisplatte:
$p_0 = 2$ MPa, $f_1 = 10$ N/mm, $R_1 = 50$ mm,
$R_2 = 100$ mm, $R_A = 150$ mm.

Aufgabe:

Ermittlung und Veranschaulichung des Verlaufes der Querkraft / Grafische Darstellung des Querkraftverlaufes $Q_R(R)$.

Lösung:

- Bestimmung der Reaktionskräfte:



Gleichgewichtsbedingung in Rotationsachsenrichtung:

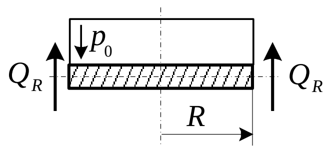
$$p_0 R_1^2 \pi + f_1 2R_A \pi - f_R 2R_2 \pi = 0,$$

$$f_R = \frac{p_0}{2}\frac{R_1^2}{R_2} + f_1 \frac{R_A}{R_2} = \frac{2}{2}\frac{2500}{100} + 10\frac{150}{100} = 25 + 15 = 40,$$

$$f_R = 40 \text{ N/mm}.$$

- Ermittlung der Querkraft:

a) Wenn $0 < R < R_1$:

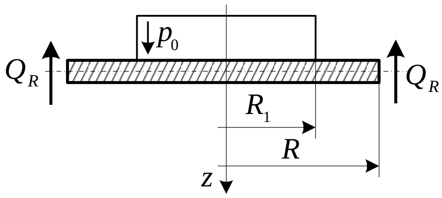


Gleichgewichtsbedingung in Rotationsachsenrichtung:

$$p_0 R^2 \pi - Q_R 2R\pi = 0.$$

$$Q_R = \underbrace{\frac{p_0}{2}R}_{\text{Gerade}}, \quad Q_R(0) = 0, \quad Q_R(R_1) = 50 \text{ N/mm}.$$

b) Wenn $R_1 < R < R_2$:

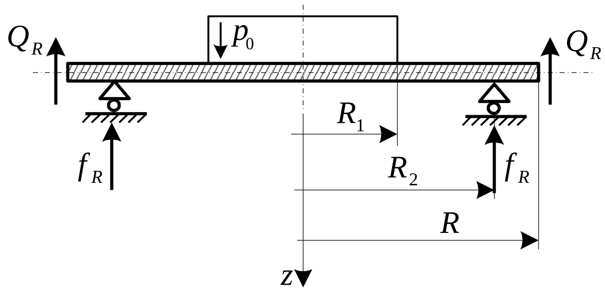


Gleichgewichtsbedingung in Rotationsachsenrichtung:

$$p_0 R_1^2 \pi - Q_R 2R\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_R = \underbrace{\frac{p_0}{2} R_1^2 \frac{1}{R}}_{\text{Hyperbel}}.$$

$$Q_R(R_1) = 50 \text{ N/mm}, \quad Q_R(R_2) = 25 \text{ N/mm}.$$

c) Wenn $R_2 < R < R_A$:



Gleichgewichtsbedingung in Rotationsachsenrichtung:

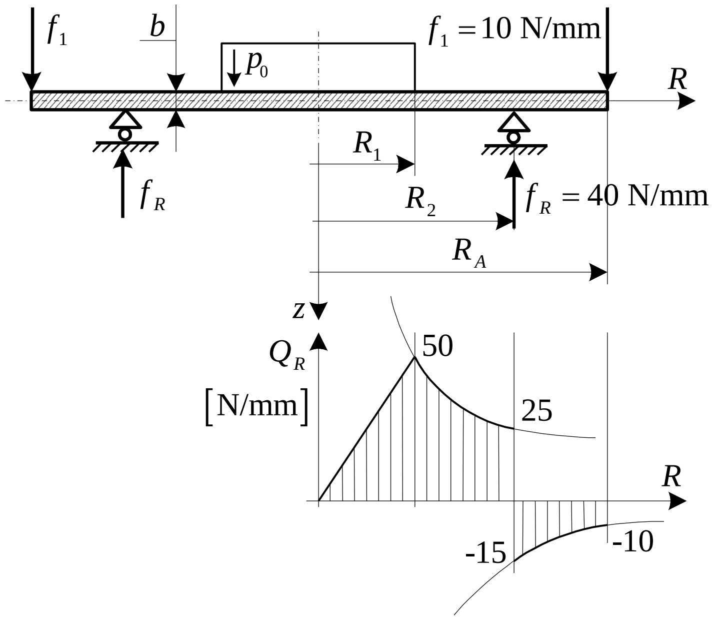
$$p_0 R_1^2 \pi - f_R 2R_2 \pi - Q_R 2R\pi = 0$$

$$Q_R = \underbrace{\left(\frac{p_0}{2}R_1^2 - f_R R_2\right)\frac{1}{R}}_{\text{Hyperbel}} = -1500\frac{1}{R}.$$

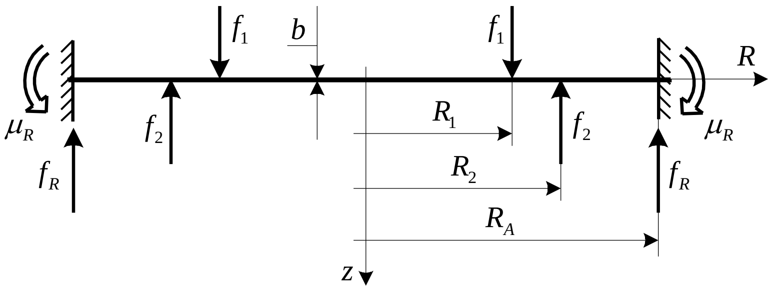
$$Q_R(R_2) = \frac{p_0}{2}\frac{R_1^2}{R_2} - f_R = 25 - 40 = -15 \text{ N/mm}.$$

$$Q_R\left(R_A\right)=\frac{p_0}{2}\frac{R_1^2}{R_A}-\frac{p_0}{2}\frac{R_1^2}{R_2}\frac{R_2}{R_A}-f_1\frac{R_A}{R_2}\frac{R_2}{R_A}=-f_1, \qquad Q_R\left(R_A\right)=-10\ \text{N/mm}$$

- Veranschaulichung / Grafische Darstellung des Querkraftverlaufes:



Aufgabe 3.: Rotationssymmetrisch belastete Kreisplatte



<u>Gegeben:</u> Die Abmessungen und die Belastung einer Kreisplatte:
$f_1 = 12$ N/mm, $f_2 = 15$ N/mm,
$R_1 = 40$ mm, $R_2 = 60$ mm, $R_A = 70$ mm.

<u>Aufgabe:</u> Ermittlung und Veranschaulichung des Verlaufes der Querkraft / Grafische Darstellung des Querkraftverlaufes $Q_R(R)$.

<u>Lösung:</u>

- Bestimmung der Reaktionskräfte:

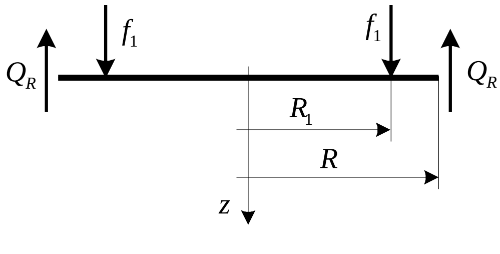
Gleichgewichtsbedingung in Rotationsachsenrichtung: $f_1 2R_1\pi - f_2 2R_2\pi - f_R 2R_A\pi = 0$.

$$f_R = \frac{1}{R_A}\left(f_1R_1 - f_2R_2\right) = -6\ \text{N/mm}.$$

- Ermittlung der Querkraft:

a) Wenn $0 < R < R_1$: $Q_R = 0$.

b) Wenn $R_1 < R < R_2$:



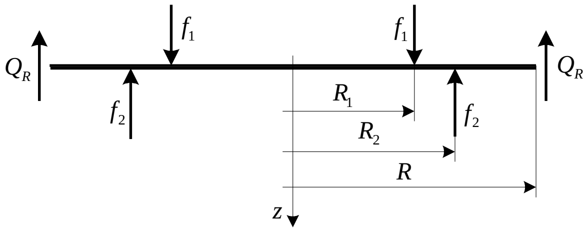
Gleichgewichtsbedingung in Rotationsachsenrichtung:

$2R_1\pi f_1 - 2R\pi Q_R = 0$.

$$Q_R = \underbrace{R_1 f_1 \frac{1}{R}}_{\text{Hyperbel}}.$$

$Q_R\left(R_1\right) = f_1 = 12$ N/mm, $\quad Q_R\left(R_2\right) = 8$ N/mm.

c) Wenn $R_2 < R < R_A$:



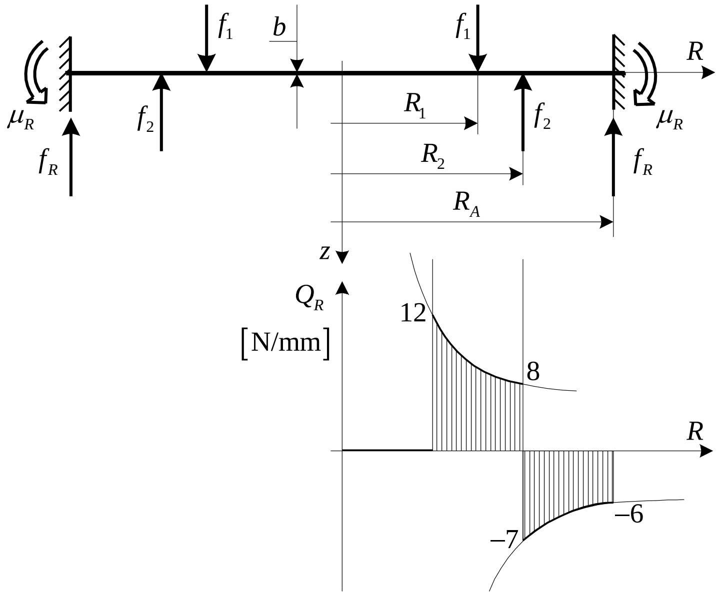
Gleichgewichtsbedingung in Rotationsachsenrichtung:

$$2R_1\pi f_1 - 2R_2\pi f_2 - Q_R 2R\pi = 0 .$$

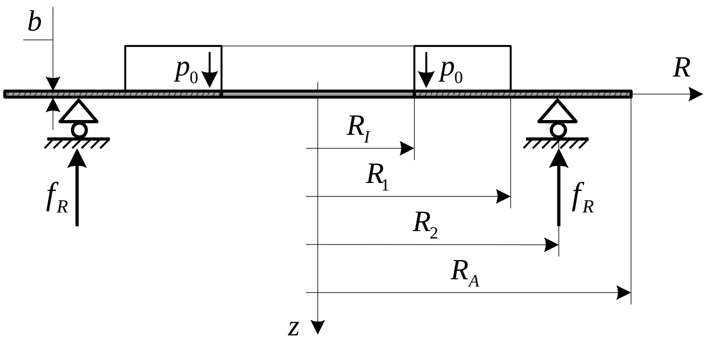
$$Q_R = \underbrace{\left(f_1R_1 - f_2R_2\right)\frac{1}{R}}_{\text{Hyperbel}} = \left(480-900\right)\frac{1}{R} = -\frac{420}{R} .$$

$$Q_R\left(R_2\right) = -7\ \text{N/mm} , \quad Q_R\left(R_A\right) = -6\ \text{N/mm} .$$

- Veranschaulichung / Grafische Darstellung des Querkraftverlaufes:



Aufgabe 4.: Rotationsymmetrisch belastete Kreisringplatte



Gegeben: Die Abmessungen und die Belastung einer Kreisringplatte:
$p_0 = 2\ \text{MPa}$, $R_I = 50\ \text{mm}$,
$R_1 = 100\ \text{mm}$, $R_2 = 150\ \text{mm}$,
$R_A = 200\ \text{mm}$.

Aufgabe:

Ermittlung und Veranschaulichung des Verlaufes der Querkraft / Grafische Darstellung des Querkraftverlaufes $Q_R\left(R\right)$.

Lösung:

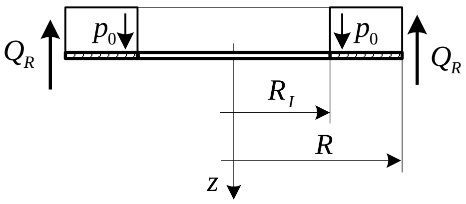
- Bestimmung der Reaktionskräfte:

Gleichgewichtsbedingung in Rotationsachsenrichtung: $p_0\left(R_1^2 - R_I^2\right)\pi - 2R_2\pi f_R = 0$,

$$f_R = \frac{p_0}{2R_2}\left(R_1^2 - R_I^2\right) = 50\ \text{N/mm} .$$

- Ermittlung der Querkraft:

a) Wenn $R_I < R < R_1$:



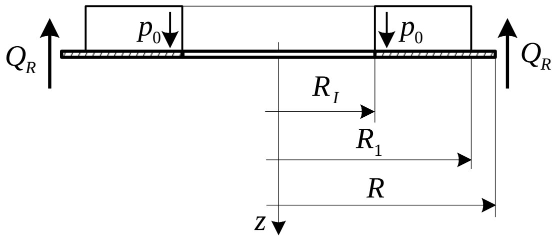
Gleichgewichtsbedingung in Rotationsachsenrichtung:

$$p_0\pi\left(R^2-R_I^2\right)-Q_R 2R\pi=0\,,$$

$$Q_R=\underbrace{\frac{p_0}{2}R}_{\text{Gerade}}-\underbrace{\frac{p_0R_I^2}{2}\frac{1}{R}}_{\text{Hyperbel}}\,.$$

$$Q_R\left(R_I\right)=0\,,\quad Q_R\left(R_1\right)=75\text{ N/mm}\,.$$

b) Wenn $R_1<R<R_2$:



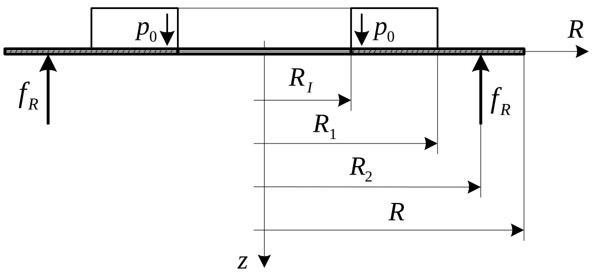
Gleichgewichtsbedingung in Rotationsachsenrichtung:

$$p_0\pi\left(R_1^2-R_I^2\right)-Q_R 2R\pi=0\,,$$

$$Q_R=\underbrace{\frac{p_0}{2}\left(R_1^2-R_I^2\right)\frac{1}{R}}_{\text{Hyperbel}}\,.$$

$$Q_R\left(R_1\right)=75\text{ N/mm}\,,\quad Q_R\left(R_2\right)=50\text{ N/mm}\,.$$

c) Wenn $R_2<R<R_A$:

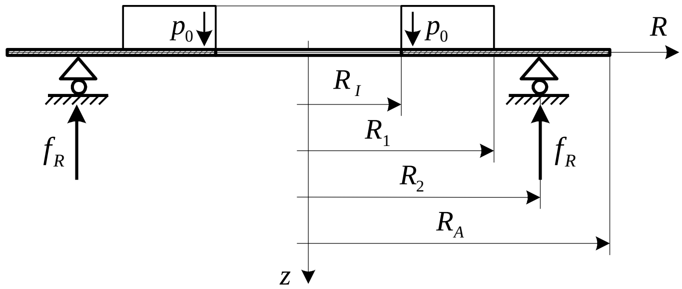


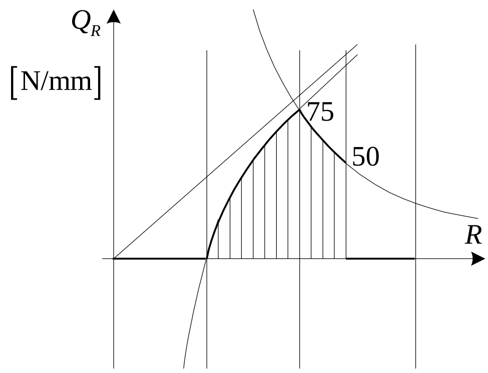
Gleichgewichtsbedingung in Rotationsachsenrichtung:

$$\underbrace{p_0\pi\left(R_1^2-R_I^2\right)-2R_2\pi\, f_R}_{=0}-2R\pi Q_R=0\cdot$$

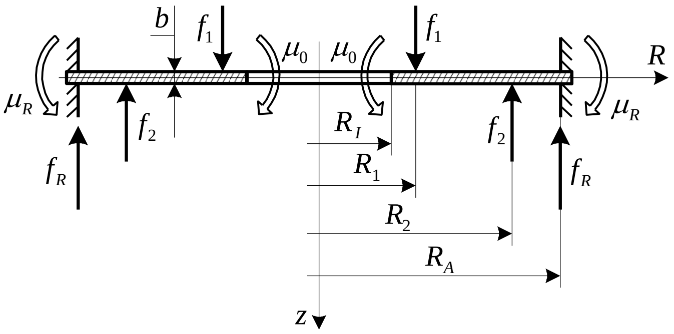
$$Q_R=0\,.$$

- Veranschaulichung / Grafische Darstellung des Querkraftverlaufes:





Aufgabe 5.: Rotationssymmetrisch belastete Kreisringplatte



Gegeben: Die Abmessungen und die Belastung einer Kreisringplatte:

$\mu_0 = 20$ Nmm/mm, $f_1 = 8$ N/mm,

$f_2 = 16$ N/mm, $R_I = 30$ mm,

$R_1 = 40$ mm, $R_2 = 80$ mm, $R_A = 10$ mm.

Aufgabe: Ermittlung und Veranschaulichung des Verlaufes der Querkraft / Grafische Darstellung des Querkraftverlaufes $Q_R(R)$.

Lösung:

- Bestimmung der Reaktionskräfte:

Gleichgewichtsbedingung in Rotationsachsenrichtung: $f_1 2R_1\pi - f_2 2R_2\pi - f_R 2R_A\pi = 0$,

$$f_R = \frac{1}{R_A}\left(f_1R_1 - f_2R_2\right) = -9{,}6 \text{ N/mm}.$$

- Ermittlung der Querkraft:

a) Wenn $R_I < R < R_1$: $Q_R \equiv 0$.

b) Wenn $R_1 < R < R_2$ $2R_1\pi f_1 - 2R\pi Q_R = 0$.

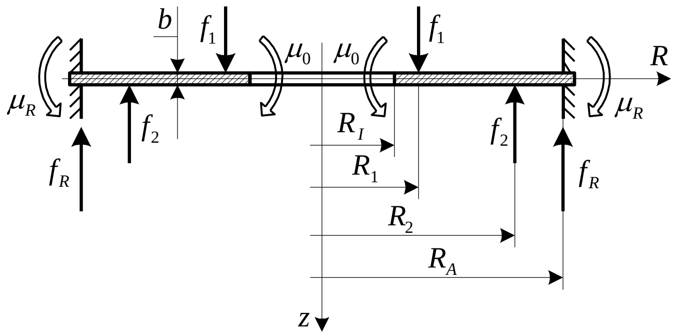
$$Q_R(R) = f_1R_1\frac{1}{R}. \qquad Q_R(R_1) = f_1 = 8 \text{ N/mm}, \quad Q_R(R_2) = f_1\frac{R_1}{R_2} = 4 \text{ N/mm}.$$

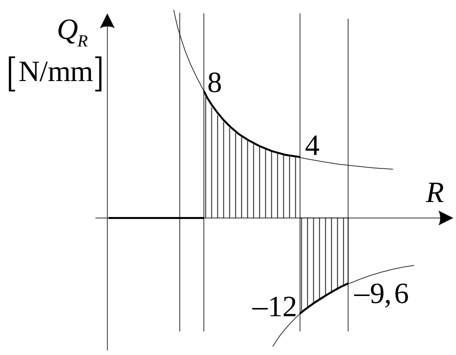
c) Wenn $R_2 < R < R_A$ $2R_1\pi f_1 - 2R_2\pi f_2 - 2R\pi Q_R = 0$.

$$Q_R = \left(f_1R_1 - f_2R_2\right)\frac{1}{R} = -\frac{960}{R}\ [\text{N/mm}].$$

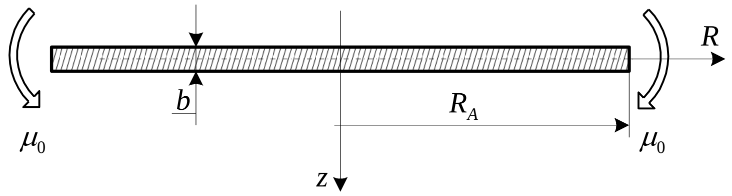
$$Q_R(R_2) = -12 \text{ N/mm}, \quad Q_R(R_A) = -9{,}6 \text{ N/mm}.$$

- Veranschaulichung / Grafische Darstellung des Querkraftverlaufes:





Aufgabe 6.: Sicherheitsnachweis einer Kreisplatte



Gegeben:

Die Abmessungen, das Material und die Belastung einer Kreisringplatte.

$\mu_0 = 8$ kNmm/mm, $b = 20$ mm

$R_A = 250$ mm, $\sigma_{zul} = 180$ MPa .

Aufgabe:

a) Formulierung der Randbedingungen.

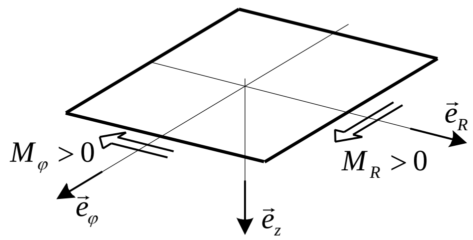
b) Bestimmung und Veranschaulichung der Flächenmomenten- / grafische Darstellung der Biegemomenten-Verläufe $M_R(\lambda)$ und $M_\varphi(\lambda)$.

c) Sicherheitsnachweis der Platte nach der *Mohrschen* Theorie.

Lösung:

a) Formulierung der Randbedingungen:

Vorzeichen der Flächenmomente / der Biegemomente:



Randbedingungen: $R = R_A$ $\quad M_R = -\mu_0$,

$R = 0$ $\quad M_R$, M_φ müssen endlich groß sein.

b) Bestimmung und Veranschaulichung der Flächenmomenten- / grafische Darstellung der Biegemomenten-Verläufe $M_R(\lambda)$ und $M_\varphi(\lambda)$:

$$\left.\begin{aligned} M_R(\lambda) &= A - \frac{B}{\lambda} - K_R(\lambda) \\ M_\varphi(\lambda) &= A + \frac{B}{\lambda} - K_\varphi(\lambda) \end{aligned}\right\} \quad \lambda = \frac{R^2}{R_A^2}.$$

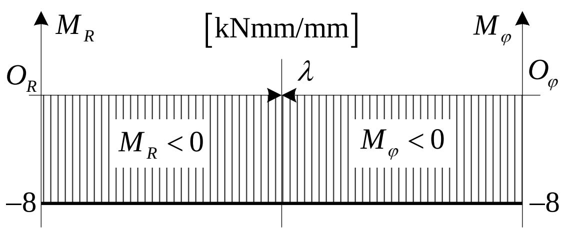
$K_R(\lambda) \equiv K_\varphi(\lambda) \equiv 0$.

Randbedingungen:

$R = 0$ $(\lambda = \lambda_I = 0)$ $\quad M_R$, M_φ ist endlich groß $\Rightarrow$ $B = 0$.

$R = R_A$ $(\lambda = 1)$ $\quad M_R = -\mu_0 \quad \Rightarrow \quad A = -\mu_0$.

Flächenmomenten- / Biegemomenten-Verlauf: $M_R(\lambda) = M_\varphi(\lambda) = -\mu_0 =$ -8 kNmm/mm $=$ konstant.



c) Sicherheitsnachweis der Platte nach der *Mohrschen* Theorie:

$$\sigma_z = 0, \qquad \sigma_R = \frac{M_R}{I_1} z, \qquad \sigma_\varphi = \frac{M_\varphi}{I_1} z, \qquad I_1 = \frac{b^3}{12}.$$

$$\sigma_{R\max} = \frac{M_R}{I_1}\frac{b}{2} = \frac{6\mu_0}{b^2}, \qquad \sigma_{\varphi\max} = \frac{M_\varphi}{I_1}\frac{b}{2} = \frac{6\mu_0}{b^2}.$$

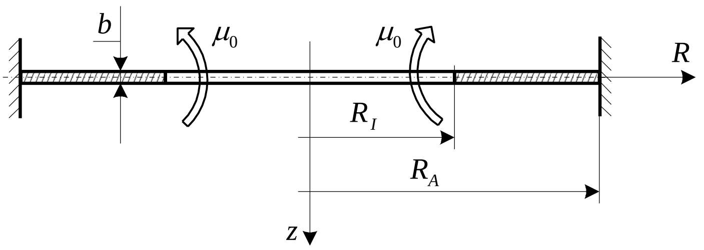
$$\sigma_{V\max} = \sigma_z - \sigma_{R\max}, \qquad \sigma_{V\max} = \frac{\mu_0}{I_1}\frac{b}{2} = \frac{6\mu_0}{b^2} = \frac{6 \cdot 8000}{400} = 120 \text{ MPa}.$$

$\sigma_{V\max} < \sigma_{zul}$, $\quad 120 < 180$, $\quad$ Die ausreichende Festigkeit der Platte ist gewährleistet.

Aufgabe 7.: Dimensionierung einer Kreisringplatte

Gegeben: Die radialen Abmessungen, das Material und die Belastung einer Kreisringplatte:

$$\mu_0 = 300 \text{ Nmm/mm}, \ R_I = 200 \text{ mm}, \ R_A = 400 \text{ mm}, \ \nu = \frac{1}{3}, \ \sigma_{zul} = 120 \text{ MPa}.$$



Aufgabe:

a) Formulierung der Randbedingungen.

b) Bestimmung und Veranschaulichung der Flächenmomenten- / grafische Darstellung der Biegemomenten-Verläufe $M_R(\lambda)$ und $M_\varphi(\lambda)$.

c) Dimensionierung der Kreisringplatte nach der *Mohrschen* Theorie, wenn $\sigma_{zul} = 120$ MPa.

Lösung:

a) Formulierung der Randbedingungen.

Randbedingungen:

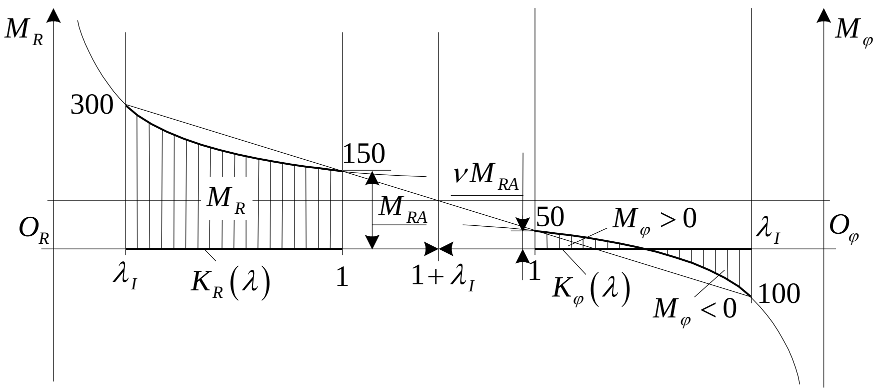
$$R = R_I \quad (\lambda = \lambda_I) \qquad M_R = \mu_0,$$
$$R = R_A \quad (\lambda = 1) \qquad \vartheta = 0 \ \Rightarrow \ M_\varphi = \nu M_R. \qquad \lambda_I = \frac{R_I^2}{R_A^2} = 0,25$$

b) Bestimmung und Veranschaulichung der Flächenmomenten- / grafische Darstellung der Biegemomenten-Verläufe $M_R(\lambda)$ und $M_\varphi(\lambda)$:

Flächenmomente / Biegemomente:

$$\left.\begin{aligned} M_R(\lambda) &= A - \frac{B}{\lambda} - K_R(\lambda) \\ M_\varphi(\lambda) &= A + \frac{B}{\lambda} - K_\varphi(\lambda) \end{aligned}\right\} \qquad K_R(\lambda) \equiv K_\varphi(\lambda) \equiv 0.$$

Flächenmomenten- / Biegemomenten-Diagramme:



c) Dimensionierung der Kreisringplatte nach der *Mohrschen* Theorie, wenn $\sigma_{zul} = 120$ MPa:

$$M_{V\max} = \left(M_R - M_\varphi\right)_{\lambda_I} = 300 + 100 = 400 \ \text{Nmm/mm}.$$

$$\sigma_{V\max} = \frac{6 M_{V\max}}{b^2} \le \sigma_{zul} \qquad \Rightarrow \qquad b \ge \sqrt{\frac{6 M_{V\max}}{\sigma_{zul}}} = \sqrt{\frac{2400}{120}} = \sqrt{20} = 4,47 \text{ mm}.$$

$b = 5$ mm.