ÜBUNG 1.: FESTIGKEITSZUSTÄNDE

Aufgabe 1.: Verzerrungszustand der elementaren Umgebung des Punktes P

Gegeben: Die Verzerrungskenngrößen und ein Richtungseinheitsvektor in der elementaren Umgebung des Punktes *P*:

$$\varepsilon_x = 5\cdot 10^{-3}, \quad \varepsilon_y = 4\cdot 10^{-3}, \quad \varepsilon_z = 10\cdot 10^{-3},$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 0, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = -10\cdot 10^{-3}, \quad \vec{e}_n = 0{,}8\,\vec{e}_x + 0{,}6\,\vec{e}_z\,.$$

Aufgabe:

a) Bestimmung der Matrix des Verzerrungstensors $\underline{\underline{A}}_P$ und die Veranschaulichung des Verzerrungszustandes des Punktes mittels des elementaren Dreibeines.

b) Berechnung der Dehnung ε_n und der Gleitung γ_{ny}.

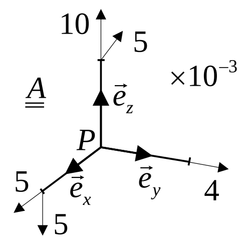
Lösung:

a) Bestimmung der Matrix des Verzerrungstensors $\underline{\underline{A}}_P$ und die Veranschaulichung des Verzerrungszustandes des Punktes mittels des elementaren Dreibeines:

Der Verzerrungstensor:

$$\left[\underline{\underline{A}}_P\right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \quad \left[\underline{\underline{A}}_P\right] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & 0 \\ -5 & 0 & 10 \end{bmatrix} 10^{-3}\,.$$

Veranschaulichung des Verzerrungszustandes:



b) Berechnung der Dehnung ε_n und der Gleitung γ_{ny}:

$$\vec{\alpha}_n = \underline{\underline{A}}_P \cdot \vec{n}\,,$$

$$\left[\vec{\alpha}_n\right] = \left[\underline{\underline{A}}_P\right]\cdot\left[\vec{n}\right] = 10^{-3}\begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & 0 \\ -5 & 0 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}8 \\ 0 \\ 0{,}6 \end{bmatrix} = 10^{-3}\begin{bmatrix} 4-3 \\ 0 \\ -4+6 \end{bmatrix}, \quad \left[\vec{\alpha}_n\right] = 10^{-3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\varepsilon_n = \vec{e}_n \cdot \vec{\alpha}_n = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0 & 0{,}6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} 10^{-3} = (0{,}8 + 1{,}2)\,10^{-3} = 2\cdot 10^{-3},$$

$$\gamma_{ny} = 2\,\vec{e}_y \cdot \vec{\alpha}_n = 0\,.$$

Aufgabe 2.: Spannungszustand der elementaren Umgebung des Punktes P

Gegeben: Der Spannungstensor $\underline{\underline{F}}_P$ und drei aufeinander senkrechte Richtungen im Punkt *P*.

$$\left[\underline{\underline{F}}_P\right] = \begin{bmatrix} 50 & 20 & -40 \\ 20 & 80 & 30 \\ -40 & 30 & -20 \end{bmatrix} \text{MPa}\,,$$

$$\vec{n} = \frac{1}{3}\vec{e}_x + \frac{2}{3}\vec{e}_y + \frac{2}{3}\vec{e}_z, \quad \vec{m} = -\frac{2}{3}\vec{e}_x - \frac{1}{3}\vec{e}_y + \frac{2}{3}\vec{e}_z, \quad \vec{l} = \frac{2}{3}\vec{e}_x - \frac{2}{3}\vec{e}_y + \frac{1}{3}\vec{e}_z$$

$$|\vec{n}| = |\vec{m}| = |\vec{l}| = 1, \quad \vec{n}\cdot\vec{m} = \vec{l}\cdot\vec{m} = \vec{n}\cdot\vec{l} = 0\,.$$

Aufgabe: a) Bestimmung der Spannungsvektoren $\vec{\rho}_x, \vec{\rho}_y, \vec{\rho}_z$ im Punkt *P*.

b) Veranschaulichung des Spannungszustandes im Punkt *P* mittels des elementaren Würfels.

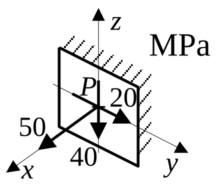
c) Berechnung des Spannungsvektors $\vec{\rho}_n$ und der Spannungskoordinaten / Spannungskomponenten $\sigma_n, \tau_{nm}, \tau_{nl}$ im Punkt *P*.

<u>Lösung:</u>

a) Bestimmung der Spannungsvektoren $\vec{\rho}_x, \vec{\rho}_y, \vec{\rho}_z$ im Punkt *P*:

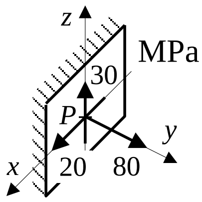
$$[\vec{\rho}_x] = \left[\underline{\underline{F}}_P\right][\vec{e}_x] = \begin{bmatrix} 50 & 20 & -40 \\ 20 & 80 & 30 \\ -40 & 30 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 20 \\ -40 \end{bmatrix} \text{MPa},$$

$$\vec{\rho}_x = \sigma_x \vec{e}_x + \tau_{xy} \vec{e}_y + \tau_{xz} \vec{e}_z = (50\vec{e}_x + 20\vec{e}_y - 40\vec{e}_z) \text{ MPa}.$$



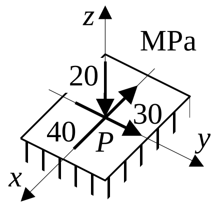
$$[\vec{\rho}_y] = \left[\underline{\underline{F}}_P\right][\vec{e}_y] = \begin{bmatrix} 50 & 20 & -40 \\ 20 & 80 & 30 \\ -40 & 30 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 80 \\ 30 \end{bmatrix} \text{MPa},$$

$$\vec{\rho}_y = \tau_{yx} \vec{e}_x + \sigma_y \vec{e}_y + \tau_{yz} \vec{e}_z = (20\vec{e}_x + 80\vec{e}_y + 30\vec{e}_z) \text{MPa}.$$



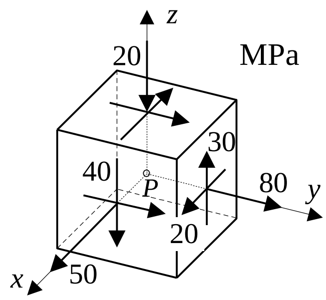
$$[\vec{\rho}_z] = \left[\underline{\underline{F}}_P\right][\vec{e}_z] = \begin{bmatrix} 50 & 20 & -40 \\ 20 & 80 & 30 \\ -40 & 30 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 \\ 30 \\ -20 \end{bmatrix} \text{MPa},$$

$$\vec{\rho}_z = \tau_{zx} \vec{e}_x + \tau_{zy} \vec{e}_y + \sigma_z \vec{e}_z = (-40\vec{e}_x + 30\vec{e}_y - 20\vec{e}_z) \text{MPa}.$$



b) Veranschaulichung des Spannungszustandes im Punkt *P* mittels des elementaren Würfels:

Auf die Seite des Würfels mit dem Normalen-einheitsvektor $\vec{e}_x$ werden die Koordinaten / Komponenten von $\vec{\rho}_x$, auf die Seite des Würfels mit dem Normaleneinheitsvektor $\vec{e}_y$ werden die Koordinaten / Komponenten von $\vec{\rho}_y$ und auf die Seite des Würfels mit der Normaleneinheitsvektor $\vec{e}_z$ werden die Koordinaten / Komponentenvon $\vec{\rho}_z$ aufgezeichnet.



c) Berechnung des Spannungsvektors $\vec{\rho}_n$ und der Spannungskoordinaten / Spannungskomponenten $\sigma_n, \tau_{nm}, \tau_{nl}$ im Punkt *P*:

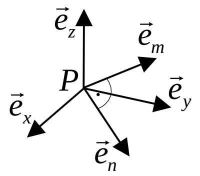
$$[\vec{\rho}_n] = [\underline{\underline{F}}_P][\vec{n}] = \begin{bmatrix} 50 & 20 & -40 \\ 20 & 80 & 30 \\ -40 & 30 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50/3 + 40/3 - 80/3 \\ 20/3 + 160/3 + 60/3 \\ -40/3 + 60/3 - 40/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/3 \\ 80 \\ -20/3 \end{bmatrix} \text{MPa},$$

$$\sigma_n = \vec{\rho}_n \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} & 80 & -\frac{20}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \frac{10}{9} + \frac{160}{3} - \frac{40}{9} = 50 \text{MPa},$$

$$\tau_{ln} = \tau_{nl} = \vec{\rho}_n \cdot \vec{l} = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} & 80 & -\frac{20}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = \frac{20}{9} - \frac{160}{3} - \frac{20}{9} = -\frac{160}{3} \text{MPa},$$

$$\tau_{mn} = \tau_{nm} = \vec{\rho}_n \cdot \vec{m} = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} & 80 & -\frac{20}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = -\frac{20}{9} - \frac{80}{3} - \frac{40}{9} = -\frac{100}{3} \text{MPa}.$$

Aufgabe 3.: Spannungszustand der elementaren Umgebung des Punktes P



Gegeben:

$\sigma_x = -60\,\text{MPa}$, $\sigma_z = 60\,\text{MPa}$, $\tau_{xz} = 60\,\text{MPa}$, $\tau_{yz} = 0$,

$\vec{e}_n = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_y$, $\vec{e}_m = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_y$, $\sigma_n = -85\,\text{MPa}$, $\tau_{mn} = 15\,\text{MPa}$.

Aufgabe: a) Berechnung der Normalspannung σ_y und der Schubspannung τ_{xy}.

b) Berechnung der Schubspannung τ_{zn}.

Lösung:

a) Berechnung der Normalspannung σ_y und der Schubspannung τ_{xy}:

Der Spannungstensor im Punkt *P* mit den bekannten und unbekannten Koordinaten / Spannungskomponenten:

$$\left[\underline{\underline{F}}_P\right] = \begin{bmatrix} -60 & \tau_{xy} & 60 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 60 & 0 & 60 \end{bmatrix} \text{MPa}.$$

Die Gleichungen, die man benutzen wird: $\sigma_n = \vec{e}_n \cdot \vec{\rho}_n$, $\tau_{mn} = \vec{e}_m \cdot \vec{\rho}_n$.

Vorbereitung zum Aufschreiben der Gleichungen:

$$[\vec{\rho}_n] = \left[\underline{\underline{F}}_P\right][\vec{e}_n] = \begin{bmatrix} -60 & \tau_{xy} & 60 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 60 & 0 & 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\tau_{xy} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\tau_{xy} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_y \\ 60\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix},$$

Die erste Gleichung:

$$\sigma_n = \vec{e}_n \cdot \vec{\rho}_n = \left(\sqrt{2}/2\,\vec{e}_x + \sqrt{2}/2\,\vec{e}_y\right) \cdot \Big[\left(-60\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2\,\tau_{xy}\right)\vec{e}_x +$$
$$+\left(\sqrt{2}/2\,\tau_{xy} + \sqrt{2}/2\,\sigma_y\right)\vec{e}_y + 60\sqrt{2}/2\,\vec{e}_z\Big] = -30 + \tau_{xy} + \frac{1}{2}\sigma_y.$$

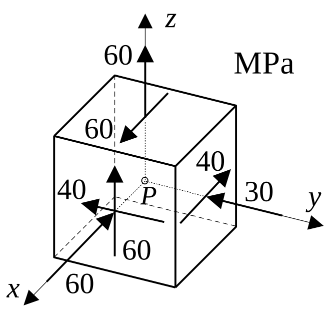
Die zweite Gleichung:

$$\tau_{mn} = \vec{e}_m \cdot \vec{\rho}_n = \left(-\sqrt{2}/2\,\vec{e}_x + \sqrt{2}/2\,\vec{e}_y\right) \cdot \Big[\left(-60\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2\,\tau_{xy}\right)\vec{e}_x +$$
$$+\left(\sqrt{2}/2\,\tau_{xy} + \sqrt{2}/2\,\sigma_y\right)\vec{e}_y + 60\sqrt{2}/2\,\vec{e}_z\Big] = 30 + 0{,}5\,\sigma_y.$$

Das zu lösende Gleichungssystem und seine Lösung:

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xy} + \frac{1}{2}\sigma_y &= 30 - 85 \\ \frac{1}{2}\sigma_y &= -30 + 15 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \sigma_y &= -30\ \text{MPa}, \\ \tau_{xy} &= -40\ \text{MPa}. \end{aligned}$$

Die Matrix der Spannungstensors: $\left[\underline{\underline{F}}_P\right] = \begin{bmatrix} -60 & -40 & 60 \\ -40 & -30 & 0 \\ 60 & 0 & 60 \end{bmatrix}$ MPa .



b) Berechnung der Schubspannung τ_{zn} :

$$\tau_{zn} = \vec{e}_n \cdot \vec{\rho}_z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\, \vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\, \vec{e}_y \right) \cdot \left(60\vec{e}_x + 60\vec{e}_z \right) = 30\sqrt{2} \cong 42{,}3\,\text{MPa} .$$

Aufgabe 4.: Spannungszustand der elementaren Umgebung des Punktes P

Gegeben:
Die Matrix des Spannungstensors $\underline{\underline{F}}$ im Punkt P des Festkörpers.

$$\left[\underline{\underline{F}}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 30\sqrt{2} \\ 0 & 40 & -30\sqrt{2} \\ 30\sqrt{2} & -30\sqrt{2} & 40 \end{bmatrix} \text{MPa} .$$

Aufgabe:
a) Berechnung der skalaren Invarianten F_I , F_{II} und F_{III} .
b) Bestimmung der Hauptspannungen σ_1 , σ_2 und σ_3 .

Lösung:
a) Berechnung der skalaren Invarianten:

$$F_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 40 + 40 + 40 = 120 \text{ MPa} ,$$

$$F_{II} = \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 40 & -30\sqrt{2} \\ -30\sqrt{2} & 40 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 40 & 30\sqrt{2} \\ 30\sqrt{2} & 40 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 40 & 0 \\ 0 & 40 \end{vmatrix},$$

$$F_{II} = (1600 - 1800) + (1600 - 1800) + 1600 = -400 + 1600 = 1200 \text{ MPa}^2 .$$

$$F_{III} = \det \begin{vmatrix} 40 & 0 & 30\sqrt{2} \\ 0 & 40 & -30\sqrt{2} \\ 30\sqrt{2} & -30\sqrt{2} & 40 \end{vmatrix} = 40(-200) + 30\sqrt{2}\left(-1200\sqrt{2}\right) = -80000\,\text{MPa}^3 .$$

b) Bestimmung der Hauptspannungen:

Eine nichttriviale Lösung existiert, wenn $\det\left|\underline{\underline{F}} - \sigma_e \underline{\underline{E}}\right| = 0$.

Berechnung der Determinante:

$$(40 - \sigma_e)\left[(40 - \sigma_e)(40 - \sigma_e) - \left(-30\sqrt{2}\right)\left(-30\sqrt{2}\right)\right] - 0 + 30\sqrt{2}\left[0 - (40 - \sigma_e) \cdot 30\sqrt{2}\right] = 0 .$$

Nach dem Ausklammern des Faktors $(40 - \sigma_e)$, der in jedem Glied auftritt:

$$(40 - \sigma_e)\left[\sigma_e^2 - 80\sigma_e + 1600 - 1800 - 1800\right] = (40 - \sigma_e)\left(\sigma_e^2 - 80\sigma_e - 2000\right) = 0 .$$

Bestimmung der Wurzel des zweiten Faktors:

$$\sigma_e^2 - 80\sigma_e - 2000 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{1,3} = \frac{80 \pm \sqrt{80^2 + 4 \cdot 2000}}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_1 = 100, \\ \sigma_3 = -20. \end{cases}$$

$$(\sigma_e - 40)(\sigma_e - 100)(\sigma_e + 20) = 0 .$$

Die Hauptspannungen: $\sigma_1 = 100\,\text{MPa}$, $\sigma_2 = 40\,\text{MPa}$, $\sigma_3 = -20\,\text{MPa}$.

Aufgabe 5.: Spannungszustand der elementaren Umgebung des Punktes P

Gegeben:
Die Matrix des Spannungstensors $\underline{\underline{F}}$ im Punkt P des Festkörpers.

$$\left[\underline{\underline{F}}\right]=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}60 & 20 & 50\\ 20 & -40 & 0\\ 50 & 0 & 130\end{bmatrix}\text{ MPa}.$$

Aufgabe:
a) Bestimmung der Matrix des Spannungsdeviator-Tensors $\underline{\underline{F}}_d$.
b) Berechnung der skalaren Invarianten F_{d_I} und $F_{d_{II}}$ des Spannungsdeviator-Tensors $\underline{\underline{F}}_d$.
c) Erstellung der charakteristischen Gleichung.

Lösung:
a) Die Matrix des Spannungsdeviator-Tensors $\underline{\underline{F}}_d$:

$\left[\underline{\underline{F}}_d\right]=\left[\underline{\underline{F}}\right]-\frac{F_I}{3}\left[\underline{\underline{E}}\right]$, wobei F_I die erste skalare Invariante des Spannungstensors $\underline{\underline{F}}$ ist.

$$F_I=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z=60-40+130=150\text{ MPa}.$$

$$\left[\underline{\underline{F}}_d\right]=\begin{bmatrix}f_{d_{11}} & f_{d_{12}} & f_{d_{13}}\\ f_{d_{21}} & f_{d_{22}} & f_{d_{23}}\\ f_{d_{31}} & f_{d_{32}} & f_{d_{33}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}60 & 20 & 50\\ 20 & -40 & 0\\ 50 & 0 & 130\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}50 & 0 & 0\\ 0 & 50 & 0\\ 0 & 0 & 50\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 20 & 50\\ 20 & -90 & 0\\ 50 & 0 & 80\end{bmatrix}\text{ MPa}.$$

b) Berechnung der skalaren Invarianten F_{d_I} und $F_{d_{II}}$ des Spannungsdeviator-Tensors $\underline{\underline{F}}_d$:

$$F_{d_I}=f_{d_{11}}+f_{d_{22}}+f_{d_{33}}=10-90+80=0\text{ MPa},$$

$$F_{d_{II}}=\begin{vmatrix}f_{d_{22}} & f_{d_{23}}\\ f_{d_{32}} & f_{d_{33}}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}f_{d_{11}} & f_{d_{13}}\\ f_{d_{31}} & f_{d_{33}}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}f_{d_{11}} & f_{d_{12}}\\ f_{d_{21}} & f_{d_{22}}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-90 & 0\\ 0 & 80\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}10 & 50\\ 50 & 80\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}10 & 20\\ 20 & -90\end{vmatrix}=-10200\text{ MPa}^2.$$

c) Erstellung der charakteristischen Gleichung:

$\sigma_e^3-F_I\sigma_e^2+F_{II}\sigma_e-F_{III}=0$, wobei

$$F_I=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z=60-40+130=150\text{ MPa},$$

$$F_{II}=\begin{vmatrix}\sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zy} & \sigma_z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\sigma_x & \tau_{xz}\\ \tau_{zx} & \sigma_z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{yx} & \sigma_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-40 & 0\\ 0 & 130\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}60 & 50\\ 50 & 130\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}60 & 20\\ 20 & -40\end{vmatrix}=-2700\text{ MPa}^2,$$

$$F_{III}=\begin{vmatrix}60 & 20 & 50\\ 20 & -40 & 0\\ 50 & 0 & 130\end{vmatrix}=-264000\text{ MPa}^3.$$

Die charakteristische Gleichung: $\sigma_e^3-150\sigma_e^2-2700\sigma_e+264000=0$.

Aufgabe 6.: Hauptspannungen und Hauptrichtungen im Punkt P

Gegeben: $\left[\underline{\underline{F}}_P\right]=\begin{bmatrix}-20 & 0 & 0\\ 0 & 30 & -40\\ 0 & -40 & 90\end{bmatrix}$ MPa.

Aufgabe: Bestimmung der Hauptspannungen und Hauptrichtungen im Punkt P.

Lösung:

Die Eigenwertaufgabe: $\vec{\rho}_e=\sigma_e\vec{e}\quad\Rightarrow\quad\underline{\underline{F}}\cdot\vec{e}=\sigma_e\underline{\underline{E}}\cdot\vec{e}\quad\Rightarrow\quad(\underline{\underline{F}}-\sigma_e\underline{\underline{E}})\cdot\vec{e}=\vec{0}$.

Das entsprechende lineare algebraische Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccc} (-20-\sigma_e)e_x + & 0 & + & 0 & = 0, \\ 0 & +(30-\sigma_e)e_y - & & 40e_z & = 0, \\ 0 & - & 40e_y & +(90-\sigma_e)e_z & = 0. \end{array}$$

Die Voraussetzung der nichttrivialen Lösung – die charakteristische Gleichung:

$$\det\left|\underline{\underline{F}} - \sigma_e \underline{\underline{E}}\right| = 0 .$$

Ausführlich aufgeschrieben: $(20+\sigma_e)\left[(30-\sigma_e)(90-\sigma_e)-40^2\right]=0$.

Die eine Wurzel der charakteristischen Gleichung: $\sigma_3 = -20$ MPa .

Die Hauptrichtung, die zu dieser Wurzel gehört: $\vec{e}_3 = \vec{e}_x$.

Weitere Wurzeln der charakteristischen Gleichung:

$$(30-\sigma_e)(90-\sigma_e)-40^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_e^2 - 120\sigma_e + 1100 = 0.$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{120 \pm \sqrt{14400-4400}}{2} = \frac{120 \pm 100}{2} \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 = 110 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 10 \text{ MPa} .$$

Bestimmung der Spannungshauptrichtungen – die Hauptspannungen werden in das lineare algebraische Gleichungssystem einsetzt.

Hauptrichtung 1.:

$$\begin{bmatrix} -130 & 0 & 0 \\ 0 & -80 & -40 \\ 0 & -40 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \\ e_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lösung des Gleichungssystems: $e_{1x} = 0$, $e_{1z} = -2e_{1y}$.

$$|\vec{e}_1| = 1 = \sqrt{e_{1y}^2 + e_{1z}^2} = \sqrt{5}\, e_{1y} \quad \Rightarrow \quad e_{1y} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{e}_y - 2\vec{e}_z) .$$

Hauptrichtung 2.: $\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_x \times \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{e}_y - 2\vec{e}_z) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{e}_y + \vec{e}_z)$.

Aufgabe 7.: Identität der Hauptrichtungen des Verzerrungs- und Spannungstensors

<u>Gegeben:</u> Die Matrix des Verzerrungstensors $\underline{\underline{A}}$ und die Matrix des Spannungstensors $\underline{\underline{F}}$ in demselben Punkt *P* des Festkörpers:

$$\left[\underline{\underline{A}}\right] = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 0 \\ 6 & 20 & -8 \\ 0 & -8 & 10 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5} , \qquad \left[\underline{\underline{F}}\right] = \begin{bmatrix} 30 & 6 & 0 \\ 6 & 40 & -8 \\ 0 & -8 & 30 \end{bmatrix} \text{MPa} .$$

<u>Aufgabe:</u>

a) Es ist zu beweisen, daß das *Hookesche* Gesetzt im Punkt *P* gilt.

b) Berechnung der Hauptdehnungen ε_1, ε_2 und ε_3 des Verzerrungszustandes.

c) Bestimmung der Hauptrichtungen des Verzerrungszustandes.

d) Berechnung der Hauptspannungen σ_1, σ_2 und σ_3 .

e) Bestimmung der Hauptrichtungen des Spannungszustandes.

<u>Lösung:</u>

a) Beweis der Gültigkeit des *Hookeschen* Gesetztes:

Nach dem *Hookeschen* Gesetz ist der Quotient der Elemente / der Koordinaten / der Komponenten der Spannungs- und Verzerrungstensoren, die nicht in der Hauptdiagonalen stehen, gleich. Dieser Quotient heißt der Schubmodul *G* (der Schubmodul ist ein Materialkennwert).

$$\frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}} = \frac{\tau_{zy}}{\gamma_{zy}} = \frac{\tau_{zx}}{\gamma_{zx}} = G = 0{,}5\cdot 10^5\,\text{MPa}\,.$$

Nach dem *Hookeschen* Gesetz gilt für die Koordinaten in der Hauptdiagonale der Zusammenhang:

$$\sigma_i = 2G\left(\varepsilon_i + \frac{\nu}{1-2\nu}A_I\right) \text{ mit } A_I = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 40\cdot 10^{-5}\,.$$

$$\sigma_x = 2G\left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}A_I\right) = 2\cdot 0{,}5\cdot 10^5\left(10\cdot 10^{-5} + \frac{\nu}{1-2\nu}40\cdot 10^{-5}\right) = 30\,.$$

$$10 + \frac{\nu}{1-2\nu}40 = 30 \quad \Rightarrow \quad \nu = 0{,}25 \text{ (der \textit{Poissonsche} Koeffizient)}$$

Dieses Ergebnis bekommt man auch für σ_y, σ_z. Das heißt das *Hookesche* Gesetz gibt den Zusammenhang zwischen den Koordinaten / Komponenten des Spannungs- und Verzerrungstensors an. Die Materialkennwerte sind: $G = 0{,}5\cdot 10^5\,\text{MPa}$, $\nu = 0{,}25$.

b) Berechnung der Hauptdehnungen ε_1, ε_2 und ε_3 des Verzerrungszustandes:

(Bestimmung der Eigenwerte des Verzerrungstensors)

Die Voraussetzung der nichttrivialen Lösung – die charakteristische Gleichung:

$\det\left|\underline{\underline{A}} - \varepsilon_e \underline{\underline{E}}\right| = 0$.

Berechnung der Determinanten:

$$\left(10\cdot 10^{-5} - \varepsilon_e\right)\left[\left(20\cdot 10^{-5} - \varepsilon_e\right)\left(10\cdot 10^{-5} - \varepsilon_e\right) - \left(-8\cdot 10^{-5}\right)\left(-8\cdot 10^{-5}\right)\right] -$$

$$-6\cdot 10^{-5}\left[6\cdot 10^{-5}\left(10\cdot 10^{-5} - \varepsilon_e\right) - 0\right] + 0 = 0$$

Nach dem Ausklammern von $\left(10\cdot 10^{-5} - \varepsilon_e\right)$:

$$\left(10\cdot 10^{-5} - \varepsilon_e\right)\left[\varepsilon_e^2 - 30\cdot 10^{-5}\varepsilon_e + (200-64-36)\cdot 10^{-5}\cdot 10^{-5}\right]\cdot 10^{-5} = .$$

$$= \left(10\cdot 10^{-5} - \varepsilon_e\right)\left(\varepsilon_e^2 - 30\cdot 10^{-5}\varepsilon_e + 100\cdot 10^{-10}\right)\cdot 10^{-5} = 0$$

Die Wurzeln des zweiten Faktors:

$$\varepsilon_e^2 - 30\cdot 10^{-5}\varepsilon_e + 100\cdot 10^{-10} = 0$$

$$\varepsilon_{1,3} = \frac{30 \pm \sqrt{30^2 - 4\cdot 100}}{2}\cdot 10^{-5} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \varepsilon_1 = (15 + 5\sqrt{5})\cdot 10^{-5}, \\ \varepsilon_3 = (15 - 5\sqrt{5})\cdot 10^{-5}. \end{cases}$$

Die Hauptdehnungen: $\varepsilon_1 = \left(15 + 5\sqrt{5}\right)\cdot 10^{-5}$, $\varepsilon_2 = 10\cdot 10^{-5}$, $\varepsilon_3 = \left(15 - 5\sqrt{5}\right)\cdot 10^{-5}$.

c) Bestimmung der Hauptrichtungen des Verzerrungszustandes:

Hauptrichtung 1.:

Das lineare homogene algebraische Gleichungssystem: $\left(\underline{\underline{A}} - \varepsilon_1 \underline{\underline{E}}\right)\vec{e}_1 = \vec{0}$.

In Matrizenform:
$$\begin{bmatrix} (10-15-5\sqrt{5}) & 6 & 0 \\ 6 & (20-15-5\sqrt{5}) & -8 \\ 0 & -8 & (10-15-5\sqrt{5}) \end{bmatrix}\cdot 10^{-5}\begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \\ e_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bei der Lösung kann man den Multiplikator 10^{-5} einfach weglassen.

Eine Unbekannte kann man beliebig annehmen: $e_{1x} = 1$

Aus der ersten Gleichung: $\left(10 - 15 - 5\sqrt{5}\right)\cdot 1 + 6e_{1y} = 0 \quad \Rightarrow \quad e_{1y} = \dfrac{5\left(1+\sqrt{5}\right)}{6} \approx 2{,}6967$.

Aus der dritten Gleichung:

$$-8e_{1y}+\left(10-15-5\sqrt{5}\right)e_{1z}=0 \quad\Rightarrow\quad e_{1z}=\frac{8}{-5\left(1+\sqrt{5}\right)}e_{1y}=-\frac{8}{6}.$$

Darstellung eines normierten Richtungsvektors / eines Richtungseinheitsvektors:

Der Betrag des Vektors: $\sqrt{e_{1x}^2+e_{1y}^2+e_{1z}^2}=3{,}1702$.

Wenn man den Vektor durch diesen Wert teilt, erhält man den Richtungseinheitsvektor:

$$\vec{e}_1=0{,}3154\vec{e}_x+0{,}8506\vec{e}_y-0{,}4206\vec{e}_z.$$

Hauptrichtung 2.:

Das lineare homogene algebraische Gleichungssystem: $\left(\underline{\underline{A}}-\varepsilon_2\underline{\underline{E}}\right)\vec{e}_2=\vec{0}$.

In Matrizenform: $\begin{bmatrix}(10-10) & 6 & 0\\ 6 & (20-10) & -8\\ 0 & -8 & (10-10)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_{2x}\\ e_{2y}\\ e_{2z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$.

Aus den ersten und dritten Gleichungen folgt: $e_{2y}=0$.

Eine Unbekannte kann man beliebig annehmen: $e_{2x}=1$

Aus der zweiten Gleichung: $6\cdot 1+10\cdot 0-8e_{2z}=0 \quad\Rightarrow\quad e_{2z}=0{,}75$.

Darstellung eines normierten Richtungsvektors / eines Richtungseinheitsvektors:

Der Betrag des Vektors: $\sqrt{e_{2x}^2+e_{2y}^2+e_{2z}^2}=1{,}25$.

Nach der Normierung erhält man den Richtungseinheitsvektor: $\vec{e}_2=0{,}8\vec{e}_x+0{,}6\vec{e}_z$.

Hauptrichtung 3.:

$\vec{e}_3=\vec{e}_1\times\vec{e}_2=0{,}5104\vec{e}_x-0{,}5257\vec{e}_y-0{,}6805\vec{e}_z$.

d) Berechnung der Hauptspannungen σ_1, σ_2 und σ_3:

(Bestimmung der Eigenwerte des Spannungstensors)

Die Voraussetzung der nichttrivialen Lösung – die charakteristische Gleichung:

$\det\left|\underline{\underline{F}}-\sigma_e\underline{\underline{E}}\right|=0$.

Berechnung der Determinanten:

$$\left(30-\sigma_e\right)\left[\left(40-\sigma_e\right)\left(30-\sigma_e\right)-(-8)(-8)\right]-6\left[6\left(30-\sigma_e\right)-0\right]+0=0.$$

Die charakteristische Gleichung nach dem Ausklammern von $\left(30-\sigma_e\right)$:

$$\left(30-\sigma_e\right)\left[\sigma_e^2-70\sigma_e+1200-64-36\right]=\left(30-\sigma_e\right)\left(\sigma_e^2-70\sigma_e-1100\right)=0.$$

Die Wurzel des zweiten Faktors:

$$\sigma_e^2-70\sigma_e-1100=0 \quad\Rightarrow\quad \sigma_{1,3}=\frac{70\pm\sqrt{70^2+4\cdot 1100}}{2} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\sigma_1=35+5\sqrt{5}\text{ MPa},\\ \sigma_3=35-5\sqrt{5}\text{ MPa}.\end{cases}$$

$$\left(\sigma_e-30\right)\left(\sigma_e-35-5\sqrt{5}\right)\left(\sigma_e-35+5\sqrt{5}\right)=0.$$

Die Hauptspannungen: $\sigma_1=\left(35+5\sqrt{5}\right)\text{MPa}$, $\sigma_2=30\,\text{MPa}$, $\sigma_3=\left(35-5\sqrt{5}\right)\text{MPa}$.

e) Bestimmung der Hauptrichtungen des Spannungszustandes:

Hauptrichtung 1.:

Das lineare homogene algebraische Gleichungssystem: $\left(\underline{\underline{A}}-\sigma_1\underline{\underline{E}}\right)\vec{e}_1=\vec{0}$.

In Matrizenform: $\begin{bmatrix} 30-35-5\sqrt{5} & 6 & 0 \\ 6 & 40-35-5\sqrt{5} & -8 \\ 0 & -8 & 30-35-5\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \\ e_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Eine Unbekannte kann man beliebig annehmen: $e_{1x} = 1$.

Aus der ersten Gleichung: $\left(10-15-5\sqrt{5}\right)e_{1x} + 6e_{1y} = 0 \quad \Rightarrow \quad e_{1y} = \dfrac{5\left(1+\sqrt{5}\right)}{6} \approx 2,6967$.

Aus der dritten Gleichung: $-8e_{1y} + \left(10-15-5\sqrt{5}\right)e_{1z} = 0 \Rightarrow e_{1z} = \dfrac{8}{-5\left(1+\sqrt{5}\right)} e_{1y} = -\dfrac{8}{6}$.

Der Betrag des Richtungsvektors: $\sqrt{e_{1x}^2 + e_{1y}^2 + e_{1z}^2} = 3{,}1702$.

Nach der Normierung erhält man den Richtungseinheitsvektor:

$\vec{e}_1 = 0{,}3154\vec{e}_x + 0{,}8506\vec{e}_y - 0{,}4206\vec{e}_z$.

Hauptrichtung 2.:

Das lineare homogene algebraische Gleichungssystem: $\left(\underline{\underline{A}} - \sigma_2 \underline{\underline{E}}\right)\vec{e}_2 = \vec{0}$.

In Matrizenform: $\begin{bmatrix} 30-30 & 6 & 0 \\ 6 & 40-30 & -8 \\ 0 & -8 & 30-30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{2x} \\ e_{2y} \\ e_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Aus den ersten und dritten Gleichungen folgt: $e_{2y} = 0$.

Eine Unbekannte kann man beliebig annehmen: $e_{2x} = 1$

Aus der zweiten Gleichung: $6 \cdot 1 + 10 \cdot 0 - 8e_{2z} = 0 \quad \Rightarrow \quad e_{2z} = 0{,}75$.

Darstellung eines normierten Richtungsvektors / eines Richtungseinheitsvektors:

Der Betrag des Vektors: $\sqrt{e_{2x}^2 + e_{2y}^2 + e_{2z}^2} = 1{,}25$.

Nach der Normierung erhält man den Richtungseinheitsvektor: $\vec{e}_2 = 0{,}8\vec{e}_x + 0{,}6\vec{e}_z$.

Hauptrichtung 3:

$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = 0{,}5104\vec{e}_x - 0{,}5257\vec{e}_y - 0{,}6805\vec{e}_z$.

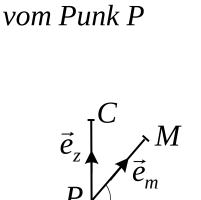
<u>Bemerkung:</u> Man erhält für den Verzerrungs- und Spannungszustand dieselben Hauptrichtungen.

Aufgabe 8.: Der spezifische relative Verschiebungszustand in der Umgebung vom Punk P

<u>Gegeben:</u> Der Verschiebungsgradienten-Tensor im Punkt *P*:

$$\left[\underline{\underline{D}}_P\right] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix} 10^{-3}, \quad \vec{e}_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_y - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_z\right),$$

$$\vec{e}_m = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_y + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_z\right), \quad |\vec{e}_m| = |\vec{e}_n| = 1 .$$



<u>Aufgabe:</u>

a) Bestimmung der spezifischen relativen Verschiebungsvektoren in den Punkten *A*, *B* und *C*.

b) Berechnung der spezifischen relativen Verschiebungsvektoren in den Punkten *N* und *M*.

<u>Lösung:</u>

a) Bestimmung der spezifischen relativen Verschiebungsvektoren in den Punkten *A*, *B* und *C*:

Die gesuchten spezifischen relativen Verschiebungsvektoren bestehen aus den Elementen der Matrixspalten:

$\vec{u}_A = \left(2\vec{e}_x + 4\vec{e}_z\right)\cdot 10^{-3}$, $\vec{u}_B = \left(2\vec{e}_y - 4\vec{e}_z\right)\cdot 10^{-3}$, $\vec{u}_C = \left(-2\vec{e}_x - 4\vec{e}_z\right)\cdot 10^{-3}$.

b) Berechnung der spezifischen relativen Verschiebungsvektoren in den Punkten *N* und *M:*

Punkt N:

$$\left[\vec{u}_N\right] = \left[\underline{\underline{D}}_P\right]\cdot\left[\vec{e}_n\right] = 10^{-3}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} 10^{-3}.$$

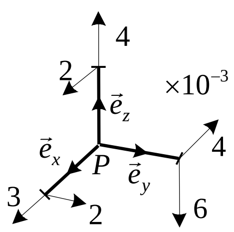
$$\vec{u}_N = \left(\sqrt{2}\,\vec{e}_x + \sqrt{2}\,\vec{e}_y + \sqrt{2}\,\vec{e}_z\right)\cdot 10^{-3}.$$

Punkt M:

$$\left[\vec{u}_M\right] = \left[\underline{\underline{D}}_P\right]\cdot\left[\vec{e}_m\right] = 10^{-3}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} \end{bmatrix} 10^{-3},$$

$$\vec{u}_M = \left(-\sqrt{2}\,\vec{e}_x + \sqrt{2}\,\vec{e}_y - 3\sqrt{2}\,\vec{e}_z\right)\cdot 10^{-3}.$$

Aufgabe 9.: Der spezifische relative Verschiebungszustand in der Umgebung vom Punk P



Gegeben: Der spezifische relative Verschiebungszustand des Punktes *P* mit dem elementaren Dreibein.

Aufgabe:

a) Bestimmung des Verschiebungsgradienten-Tensors $\underline{\underline{D}}_P$ in dyadischer und Matrizendarstellung.

b) Bestimmung des Rotationstensors $\underline{\underline{\Psi}}_P$ in dyadischer und Matrizenform.

c) Bestimmung des Verzerrungstensors $\underline{\underline{A}}_P$ in dyadischer und Matrizendarstellung.

Lösung:

a) Bestimmung des Verschiebungsgradienten-Tensors $\underline{\underline{D}}_P$ in dyadischer und Matrizendarstellung:

Dyadische / symbolische Form: $\underline{\underline{D}}_P = \vec{u}_x \circ \vec{e}_x + \vec{u}_y \circ \vec{e}_y + \vec{u}_z \circ \vec{e}_z$,

$$\underline{\underline{D}}_P = \left[\left(3\vec{e}_x + 2\vec{e}_y\right)\circ\vec{e}_x + \left(-4\vec{e}_x - 6\vec{e}_z\right)\circ\vec{e}_y + \left(2\vec{e}_x + 4\vec{e}_z\right)\circ\vec{e}_z\right]\cdot 10^{-3}.$$

Matrizenform / Matrizendarstellung: $\left[\underline{\underline{D}}_P\right] = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 4 \end{bmatrix} 10^{-3}.$

Der transponierte Verschiebungsgradienten-Tensors $\underline{\underline{D}}_P$:

Dyadische Form: $\underline{\underline{D}}_P^T = \vec{e}_x \circ \vec{u}_x + \vec{e}_y \circ \vec{u}_y + \vec{e}_z \circ \vec{u}_z$,

$$\underline{\underline{D}}_P^T = \left[\vec{e}_x \circ\left(3\vec{e}_x + 2\vec{e}_y\right) + \vec{e}_y \circ\left(-4\vec{e}_x - 6\vec{e}_z\right) + \vec{e}_z \circ\left(2\vec{e}_x + 4\vec{e}_z\right)\right]\cdot 10^{-3}.$$

Matrizenform: $\left[\underline{\underline{D}}_P^T\right] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} 10^{-3}.$

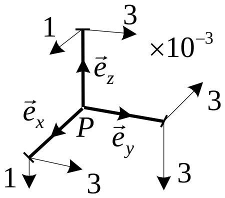
b) Bestimmung des Rotationstensors $\underline{\underline{\Psi}}_P$ in dyadischer und Matrizenform:

Dyadische Form: $\underline{\underline{\Psi}}_P = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{D}}_P - \underline{\underline{D}}_P^T\right)$,

$$\underline{\underline{\Psi}}_P = \left[\left(3\vec{e}_y - \vec{e}_z\right)\circ\vec{e}_x + \left(-3\vec{e}_x + 3\vec{e}_z\right)\circ\vec{e}_y + \left(\vec{e}_x - 3\vec{e}_y\right)\circ\vec{e}_z\right]\cdot 10^{-3}$$

Matrizenform: $\left[\underline{\underline{\Psi}}_P\right] = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} 10^{-3}$.

Veranschaulichung:



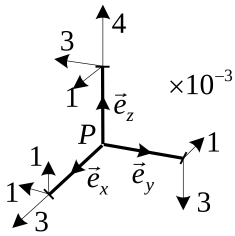
c) Bestimmung des Verzerrungstensors $\underline{\underline{A}}_P$ in dyadischer und Matrizendarstellung:

Symbolische Darstellung: $\underline{\underline{A}}_P = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{D}}_P + \underline{\underline{D}}_P^T\right)$,

$$\underline{\underline{A}}_P = \left[\left(3\vec{e}_x - \vec{e}_y - \vec{e}_z\right)\circ\vec{e}_x + \left(-\vec{e}_y - 3\vec{e}_z\right)\circ\vec{e}_y + \left(\vec{e}_x - 3\vec{e}_y + 4\vec{e}_z\right)\circ\vec{e}_z\right]\cdot 10^{-3}.$$

Matrizenform: $\left[\underline{\underline{A}}_P\right] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} 10^{-3}$.

Veranschaulichung:



Aufgabe 10.: Mohrsches Kreisdiagramm, Hauptspannungen, Spannungshauptrichtungen

Gegeben: Die Elemente der Matrix des Spannungstensors $\underline{\underline{F}}$ im Punkt *P* des Festkörpers:

$\sigma_x = -20$ MPa, $\sigma_y = 30$ MPa, $\sigma_z = 90$ MPa, $\tau_{yz} = \tau_{zy} = -40$ MPa,

$\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$ MPa.

Aufgabe:

a) Bestimmung der Hauptspannungen und Spannungshauptrichtungen mittels der Lösung der Eigenwertaufgabe und mit dem *Mohrschen* Kreisdiagramm.

b) Berechnung der skalaren Invarianten F_I, F_{II} und F_{III} des Spannungstensors $\underline{\underline{F}}$.

c) Bestimmung der Matrix des Spannungsdeviator-Tensors.

Lösung:

a) Bestimmung der Hauptspannungen und Spannungshauptrichtungen mittels der Lösung der Eigenwertaufgabe und mit dem *Mohrschen* Kreisdiagramm:

Die Matrix des Spannungstensors $\underline{\underline{F}}$: $\left[\underline{\underline{F}}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & -40 \\ 0 & -40 & 90 \end{bmatrix}$ MPa.

- Lösung der Eigenwertaufgabe:

$$\left(\underline{\underline{F}} - \sigma\underline{\underline{E}}\right)\vec{e} = 0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \left(-20-\sigma\right)e_x + 0 + 0 = 0, \\ 0 + \left(30-\sigma\right)e_y - 40e_z = 0, \\ 0 - 40e_y + \left(90-\sigma\right)e_z = 0. \end{cases}$$

Die charakteristische Gleichung: $\det\left|\underline{\underline{F}} - \sigma\underline{\underline{E}}\right| = 0$,

$$\left(-20-\sigma\right)\left[\left(30-\sigma\right)\left(90-\sigma\right) - 40^2\right] = 0 \quad\Rightarrow\quad \sigma_e = -20\,\text{MPa}.$$

$$2700 - 90\sigma - 30\sigma + \sigma^2 - 1600 = 0\,,$$

$$\sigma^2 - 120\sigma + 1100 = 0 \ ,$$

Lösung der charakteristischen Gleichung:

$$\sigma_{1,2} = \frac{120 \pm \sqrt{14400 - 4400}}{2} = \frac{120 \pm 100}{2} = \left\langle \begin{matrix} 110, \\ 10. \end{matrix} \right.$$

Die Hauptspannungen: $\sigma_1 = 110\,\text{MPa}$, $\sigma_2 = 10\,\text{MPa}$, $\sigma_3 = \sigma_x = -20\,\text{MPa}$.

- Bestimmung der Hauptrichtungen:

Die dritte Hauptspannung ist $\sigma_x = \sigma_3 = -20\,\text{MPa}$, deshalb ist die dritte Spannungshauptrichtung $\vec{e}_3 = \vec{e}_x$.

Spannungshauptrichtung 1.:

$$\left(\underline{\underline{F}} - \sigma_1 \underline{\underline{E}}\right)\vec{e}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} (-20-\sigma_1)e_{1x} & +0 & +\ 0 = 0 \\ 0 + (30-\sigma_1)e_{1y} & -40e_{1z} & = 0 \\ 0 - 40e_{1y} + (90-\sigma_1)e_{1z} & = 0 & \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} (-20-110)e_{1x} & +0 & +\ 0 = 0 \\ 0 + (30-110)e_{1y} & -40e_{1z} & = 0 \\ 0 - 40e_{1y} + (90-110)e_{1z} & = 0 & \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{matrix} -130e_{1x} \ +0 \ + \ 0 = 0 \\ 0 + -80e_{1y} - 40e_{1z} = 0 \\ 0 - 40e_{1y} + -20e_{1z} = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} e_{1x} = 0 \\ e_{1z} = -2e_{1y} \ , \\ e_{1z} = -2e_{1y} \end{matrix}$$

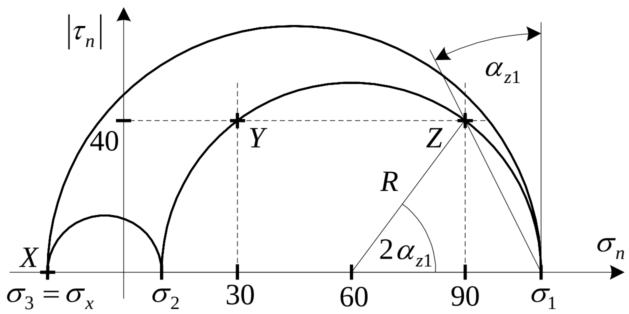
$$|\vec{e}_1| = 1 = \sqrt{e_{1x}^2 + e_{1y}^2 + e_{1z}^2} = \sqrt{e_{1y}^2 + 4e_{1y}^2} = \sqrt{5}\,e_{1y} \qquad \Rightarrow \quad e_y = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Die normierte Hauptrichtung: $\vec{e}_1 = \left(0\vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_y - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_z\right) = \left(0,447\vec{e}_y - 0,894\vec{e}_z\right).$

Spannungshauptrichtung 2.:

$$\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_x \times \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_y - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_z\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_y + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_z\right) = \left(0,894\vec{e}_y + 0,447\vec{e}_z\right).$$

- Konstruktion und Darstellung des *Mohrschen* Kreisdiagrammes:



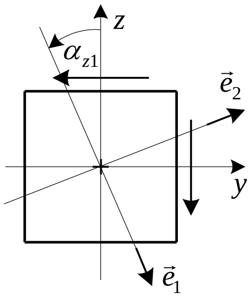
Bestimmung der Hauptrichtungen:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{yz}^2} \ , \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{yz}^2} \ , \quad \sigma_3 = \sigma_x .$$

$R = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50\,\text{MPa}$,

$\sigma_1 = 60 + 50 = 110$ MPa ,
$\sigma_2 = 60 - 50 = 10$ MPa ,
$\sigma_3 = \sigma_x = -20$ MPa .

Bestimmung der Hauptrichtungen:



Den Winkel α_{z1} zeichnet man in der Richtung der Schubspannung τ !

$$tg\alpha_{z1} = \frac{20}{40} \quad \Rightarrow \quad \alpha_{z1} = 26{,}57^\circ .$$

$$\vec{e}_1 = \left(\sin\alpha_{z1}\vec{e}_y - cos\alpha_{z1}\vec{e}_z\right) = \left(0{,}447\vec{e}_y - 0{,}894\vec{e}_z\right).$$

$$\vec{e}_2 = \left(cos\alpha_{z1}\vec{e}_y + \sin\alpha_{z1}\vec{e}_z\right) = \left(0{,}894\vec{e}_y + 0{,}447\vec{e}_z\right).$$

b) Berechnung der skalaren Invarianten F_I, F_{II} und F_{III} des Spannungstensors $\underline{\underline{F}}$:

$$F_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 100 \text{ MPa} ,$$

$$F_{II} = \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} = \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2 = -1300 \text{MPa}^2 ,$$

$$F_{III} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = -22000 \text{MPa}^3 .$$

c) Bestimmung der Matrix des Spannungsdeviator-Tensors.

$$\left[\underline{\underline{F}}_d\right] = \left[\underline{\underline{F}}\right] - \frac{F_I}{3}\left[\underline{\underline{E}}\right], \text{ wobei } \quad F_I = 100 \text{MPa} .$$

$$\left[\underline{\underline{F}}_d\right] = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & -40 \\ 0 & -40 & 90 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 100/3 & 0 & 0 \\ 0 & 100/3 & 0 \\ 0 & 0 & 100/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -53{,}3 & 0 & 0 \\ 0 & -3{,}3 & -40 \\ 0 & -40 & 56{,}7 \end{bmatrix} \text{MPa} .$$

Aufgabe 11.: Das Mohrsche Spannungskreisdiagramm, das allgemeine Hookesche Gesetz

Gegeben:

Der Spannungstensor $\underline{\underline{F}}$ im Punkt P des Festkörpers, sowie $\nu = 0{,}3$, $G = 0{,}8 \cdot 10^5$ MPa .

$$\left[\underline{\underline{F}}\right] = \begin{bmatrix} 70 & 0 & 40 \\ 0 & 50 & 0 \\ 40 & 0 & 10 \end{bmatrix} \text{MPa} .$$

Aufgabe:

a) Veranschaulichung des Spannungszustandes im Punkt P mittels des elementaren Würfels.

b) Veranschaulichung des Spannungszustandes im Punkt P mit dem *Mohrschen* Kreisdiagramm.

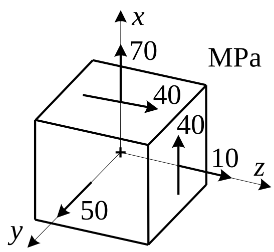
c) Bestimmung der Hauptspannungen und Hauptrichtungen aus dem *Mohrschen* Kreisdiagramm.

d) Bestimmung der Verzerrungszustandes im Punkt P, Veranschaulichung des Verzerrungszustandes mittels des elementaren Dreibeines.

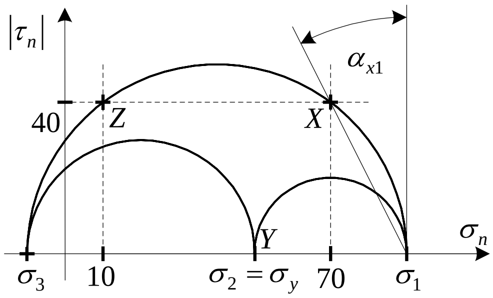
Lösung:

a) Veranschaulichung des Spannungszustandes im Punkt P mittels des elementaren Würfels:

$$\left[\underline{\underline{F}}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 & 0 & 40 \\ 0 & 50 & 0 \\ 40 & 0 & 10 \end{bmatrix} \text{MPa}$$



b) Veranschaulichung des Spannungszustandes im Punkt P mit dem *Mohrschen* Kreisdiagramm:



c) Bestimmung der Hauptspannungen und Hauptrichtungen aus dem *Mohrschen* Kreisdiagramm:

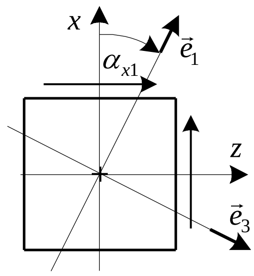
$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = 40 + \sqrt{30^2 + 40^2} = 90\,\text{MPa}\,, \quad \sigma_2 = \sigma_y = 50\,\text{MPa}\,,$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = 40 - \sqrt{30^2 + 40^2} = -10\,\text{MPa}\,.$$

Bestimmung der Hauptrichtungen:

$$tg\alpha_{x1} = \frac{20}{40} = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{x1} = 26{,}57^\circ.$$

Den Winkel α_{x1} zeichnet man in der Richtung der Schubspannung τ !



d) Bestimmung der Verzerrungszustandes im Punkt *P*, Veranschaulichung des Verzerrungszustandes mittels des elementaren Dreibeines:

Das allgemeine *Hookesche* Gesetz: $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2G}\left(\underline{\underline{F}} - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \underline{\underline{E}}\right).$

$$F_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 70 + 50 + 10 = 130\,\text{MPa}\,, \quad \frac{\nu}{1+\nu} F_I = \frac{0{,}3}{1+0{,}3} 130 = 30 \text{ MPa}\,.$$

$$\varepsilon_x = \frac{10^{-5}}{1{,}6}(70 - 30) = 2{,}5 \cdot 10^{-4}\,, \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = 0,$$

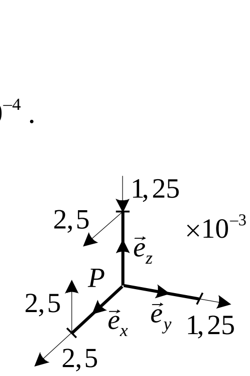
$$\varepsilon_y = \frac{10^{-5}}{1{,}6}(50 - 30) = 1{,}25 \cdot 10^{-4}\,, \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = 0,$$

$$\varepsilon_z = \frac{10^{-5}}{1{,}6}(10 - 30) = -1{,}25 \cdot 10^{-4}\,, \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = \frac{40}{0{,}8 \cdot 10^{-5}} = 5 \cdot 10^{-4}\,.$$

Der Verzerrungstensor:

$$\left[\underline{\underline{A}}_P\right] = \begin{bmatrix} 2{,}5 & 0 & 2{,}5 \\ 0 & 1{,}25 & 0 \\ 2{,}5 & 0 & -1{,}25 \end{bmatrix} 10^{-4}\,.$$

Veranschaulichung:



Aufgabe 12.: Das Mohrsche Spannungskreisdiagram

<u>Gegeben:</u> Die Matrix des Spannungstensors $\underline{\underline{F}}$ im Punkt *P* des Festkörpers.

$$\left[\underline{\underline{F}}\right] = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 40 \\ 0 & 50 & 0 \\ 40 & 0 & 70 \end{bmatrix} \text{MPa}\,.$$

<u>Aufgabe:</u>

a) Veranschaulichung des Spannungszustandes im Punkt *P* mittels des elementaren Würfels.

b) Veranschaulichung des Spannungszustandes im Punkt *P* mit dem *Mohrschen* Kreisdiagramm.

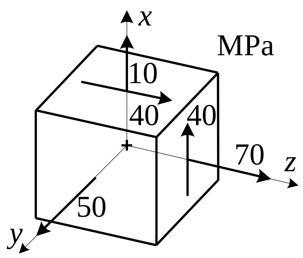
c) Bestimmung der Hauptspannungen und Hauptrichtungen aus dem *Mohrschen* Kreisdiagramm.

Lösung:

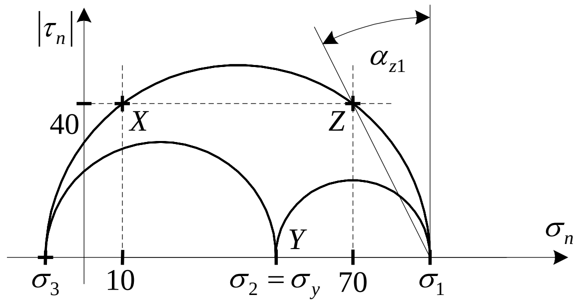
a) Veranschaulichung des Spannungszustandes im Punkt *P* mittels des elementaren Würfels:

Der Spannungstensor:

$$\left[\underline{\underline{F}}\right]=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 0 & 40\\ 0 & 50 & 0\\ 40 & 0 & 70\end{bmatrix}\text{MPa}$$



b) Veranschaulichung des Spannungszustandes im Punkt *P* mit dem *Mohrschen* Kreisdiagramm:



c) Bestimmung der Hauptspannungen und Hauptrichtungen aus dem *Mohrschen* Kreisdiagramm.

$$\sigma_1=\frac{\sigma_x+\sigma_z}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_z}{2}\right)^2+\tau_{xz}^2}=40+\sqrt{30^2+40^2}=90\,\text{MPa}\,,\quad \sigma_2=\sigma_y=50\,\text{MPa}\,,$$

$$\sigma_3=\frac{\sigma_x+\sigma_z}{2}-\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_z}{2}\right)^2+\tau_{xz}^2}=40-\sqrt{30^2+40^2}=-10\,\text{MPa}\,.$$

Bestimmung der Hauptrichtungen:

$tg\alpha_{z1}=20/40=0{,}5 \quad\Rightarrow\quad \alpha_{z1}=26{,}57^\circ$.

Den Winkel α_{z1} zeichnet man in der Richtung der Schubspannung τ !