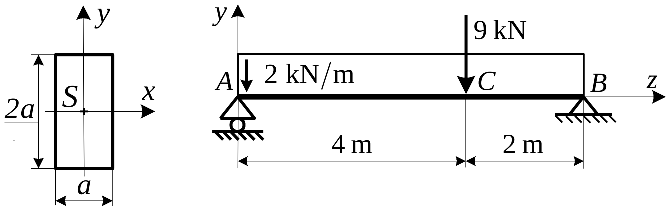
ÜBUNG 2.: DIMENSIONIERUNG

Aufgabe 1.: Dimensionierung bezüglich der Tragfähigkeit und der maximalen Spannung



Gegeben:

Die Abmessungen des Trägers und seines Querschnittes und die Belastungen, sowie $\sigma_F = R_{p0,2} = 330$ MPa, $n_F = 2$.

Aufgabe:

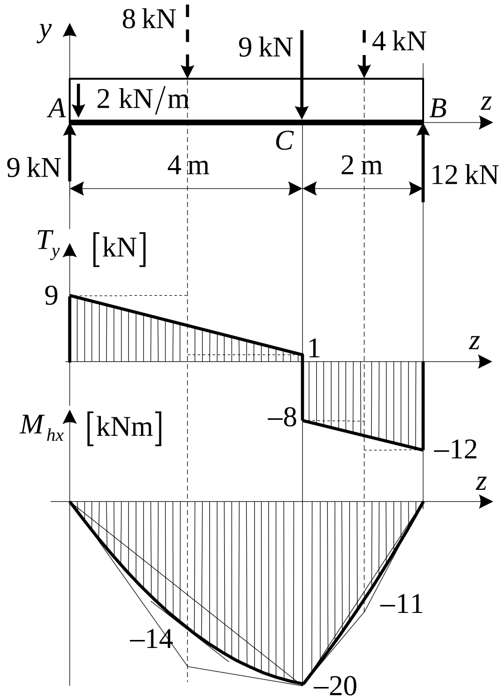
a) Ermittlung und graphische Darstellung der Schnittgrößen des Trägers.

b) Dimensionierung des Trägers bezüglich der Tragfähigkeit.

c) Dimensionierung des Trägers bezüglich der maximalen Spannung.

Lösung:

a) Ermittlung und graphische Darstellung der Schnittgrößen des Trägers:



Berechnung der Stützkräfte / Lagerreaktionen:

$M_a = 8\cdot 2 + 9\cdot 4 + 4\cdot 5 - F_{By} 6 = 0$,

$F_{By} = 12$ kN.

$M_b = F_{Ay} 6 - 8\cdot 4 - 9\cdot 2 - 4\cdot 1 = 0$,

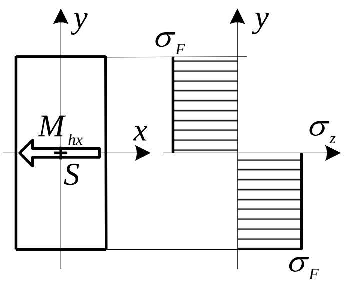
$F_{Ay} = 9$ kN.

Die graphische Darstellung der Schnittgrößenverläufe erfolgt in der üblichen Weise.

Der kritische Querschnitt des Trägers: *C*

$\left|M_{hx\max}\right| = 20$ kNm.

b) Dimensionierung des Trägers bezüglich der Tragfähigkeit:



Das Biegemoment im Grenzfall:

$$M_K = 2 \int\limits_{(A/2)} \sigma_F \, y \, dA = 2\sigma_F \underbrace{\int\limits_{(A/2)} y \, dA}_{S_x} = 2\sigma_F S_x(A/2)$$

S_x - das statische oder lineare Moment bezüglich der Achse *x* für den halben Flächenanteil des Querschnittes.

$$S_x(A/2) = \int\limits_{(A/2)} y \, dA = a^2 \frac{a}{2} = \frac{a^3}{2}.$$

Das Biegemoment im Grenzfall: $M_K = 2 \int\limits_{(A/2)} \sigma_F \, y \, dA = 2\sigma_F \, S_x(A/2) = \sigma_F \, a^3$.

Dimensionierung:

Der Träger kann die gegebene Belastung aufnehmen, wenn die Bedingung $M_{hx\max} \le \dfrac{M_K}{n_F}$, das heißt die Bedingung $M_{hx\max} \le \dfrac{\sigma_F \, a^3}{n_F}$ erfüllt ist.

$$a \ge \sqrt[3]{\frac{n_F M_{hx\max}}{\sigma_F}} = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 20 \cdot 10^6}{330}} = 49{,}49 \text{ mm}.$$

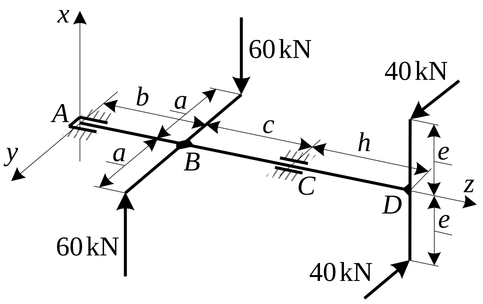
c) Dimensionierung des Trägers bezüglich der maximalen Spannung:

Der Träger ausreichend dimensioniert, wenn die Bedingung $\sigma_{z\max} \le \dfrac{\sigma_F}{n_F}$ erfüllt ist.

$$\sigma_{z\max} = \frac{M_{hx\max}}{K_x}, \qquad K_x = \frac{a(2a)^2}{6} = \frac{4}{6}a^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{6M_{hx\max}}{4a^3} \le \frac{\sigma_F}{n_F}.$$

$$a \ge \sqrt[3]{\frac{6n_F \, M_{hx\max}}{4\sigma_F}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 2 \cdot 20 \cdot 10^6}{4 \cdot 330}} = 56{,}65 \text{ mm}.$$

Aufgabe 2.: Dimensionierung bezüglich der Tragfähigkeit und der maximalen Spannung



Gegeben: Die Abmessungen des eingespannten Tragwerkes *ABCD* mit einem Kreisquerschnitt: $a = h = 0{,}2\,\text{m}$, $b = 0{,}4\,\text{m}$, $c = 0{,}5\,\text{m}$, $e = 0{,}3\,\text{m}$ und $n_F = 2$, $\tau_F = 160\,\text{MPa}$.

Aufgabe:

a) Ermittlung und graphische Darstellung der Schnittgrößen des Trägerabschnittes *ABCD*.

b) Dimensionierung des Trägerabschnittes *ABCD* bezüglich der Tragfähigkeit.

c) Dimensionierung des Trägerabschnittes *ABCD* bezüglich der maximalen Spannung.

Lösung:

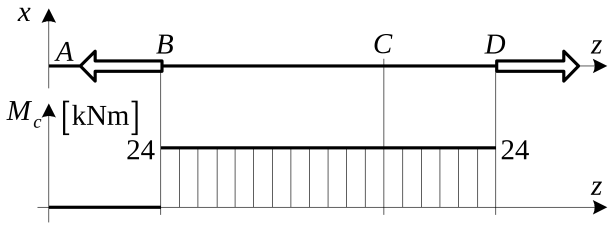
a) Ermittlung und graphische Darstellung der Schnittgrößen des Trägerabschnittes *ABCD*:

Das Moment im Punkt *B*: $\vec{M}_B = -(60 \cdot 0{,}4)\vec{e}_z = (-24\vec{e}_z)$ kNm.

Das Moment im Punkt *D*: $\vec{M}_D = (40 \cdot 0{,}6)\vec{e}_z = (24\vec{e}_z)$ kNm.

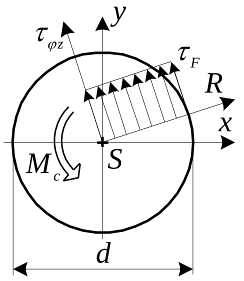
Die Beanspruchung des Trägerabschnittes *ABCD* ist eine reine Torsion.

Kritische Querschnitte sind alle Querschnitte des Trägerabschnittes *B-D*: $M_{c\max} = 24$ kNm.



b) Dimensionierung des Trägerabschnittes *ABCD* bezüglich der Tragfähigkeit:

Spannungsverteilung im Grenzzustand:



Das Torsionsmoment im Grenzfall:

$$M_{cK} = \int_{(A)} R\,\tau_F\; dA = \tau_F \underbrace{\int_{(A)} R\; dA}_{S_p} = \tau_F S_p \, .$$

S_p - polares statisches / lineares Moment des Querschnittes bezüglich des Schwerpunktes *S*.

$$S_p = \int_{(A)} r\,dA = \int_{r=0}^{d/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r\,r\,d\varphi\,dr = 2\pi \int_{r=0}^{d/2} r^2 dr = 2\pi \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{d/2} = \frac{d^3\pi}{12} \quad .$$

Das Torsionsmoment im Grenzfall: $M_{cK} = \tau_F S_P = \tau_F \dfrac{d^3\pi}{12}$.

Dimensionierung:

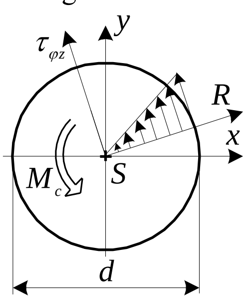
Das Tragwerk ist ausreichend dimensioniert, wenn die Bedingung $M_{c\max} \le \dfrac{M_{cK}}{n_F}$, das heißt die Bedingung

$M_{c\max} \le \dfrac{\tau_F\, d^3\pi}{12\, n_F}$ erfüllt ist.

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{12\; n_F M_{c\max}}{\pi\,\tau_F}} = \sqrt[3]{\frac{12\cdot 2\cdot 24\cdot 10^6}{\pi 160}} = 104{,}6\,\text{mm} \, .$$

c) Dimensionierung des Trägerabschnittes *ABCD* bezüglich der maximalen Spannung:

Spannungsverteilung bei elastischer Formänderung:

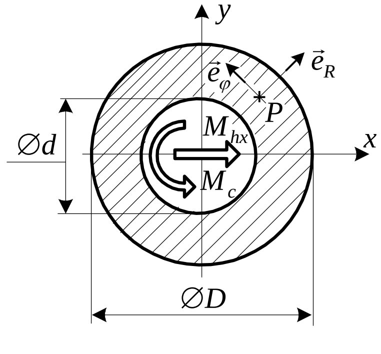


Das Tragwerk ist ausreichend dimensioniert, wenn die Bedingung $\tau_{\max} \le \dfrac{\tau_F}{n_F}$ erfüllt ist, wobei $\tau_{\max} = \dfrac{M_{c\max}}{K_p}$.

$$K_p = \frac{d^3\pi}{16} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{16\,M_{c\max}}{\pi\, d^3} \le \frac{\tau_F}{n_F} \, .$$

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{16\; n_F\; M_{c\max}}{\pi\,\tau_F}} = \sqrt[3]{\frac{16\cdot 2\cdot 24\cdot 10^6}{\pi 160}} = 115{,}2\ \text{mm}$$

Aufgabe 3.: Dimensionierung einer Rohrwelle bezüglich der maximalen Spannung



<u>Gegeben:</u> Die Beanspruchung des kritischen Querschnittes eines Trägers mit einem Kreisringquerschnitt (einer Rohrwelle) $\vec{M}_S = (600\vec{e}_x + 800\vec{e}_z)$ Nm , sowie $\sigma_{zul} = 80$ MPa , $D = 2\,d$.

<u>Aufgabe:</u>

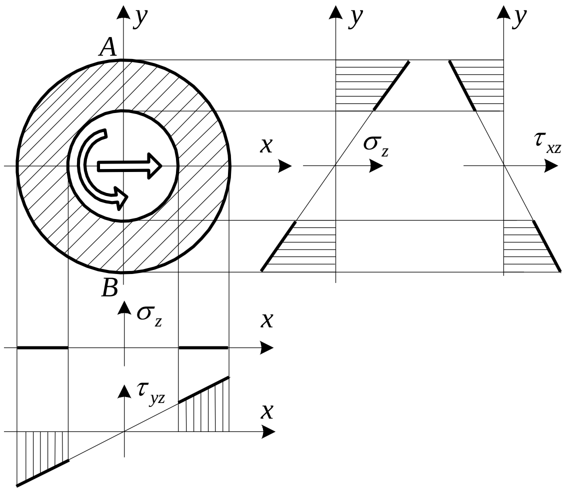
a) Graphische Darstellung der Spannungsverteilung entlang den Achsen *x* und *y*, Bestimmung der kritischen Punkte des Querschnittes.

b) Ermittlung der Vergleichsspannungen nach *Coulomb, Mohr* und *Huber-Mises-Hencky*.

c) Dimensionierung des Querschnittes nach der *Mohrschen* Theorie.

<u>Lösung:</u>

a) Graphische Darstellung der Spannungsverteilung entlang der Achsen *x* und *y*, Bestimmung der kritischen Punkte des Querschnittes:



Kritische Punkte:
- aus der Biegung die Punkte A und B,
- aus der Torsion alle Punkte am Kreis mit $R = D/2$ (die Punkte des äußeren Kreisumfanges),
- gemeinsam aus der Biegung und Torsion die Punkte A und B.

Die Vergleichsspannungen muß man in den Punkten *A*, oder *B* berechnen. Die Dimensionierung muß man also in diesen Punkten vornehmen.

b) Ermittlung der Vergleichsspannungen nach *Coulomb, Mohr* und *Huber-Mises-Hencky*:

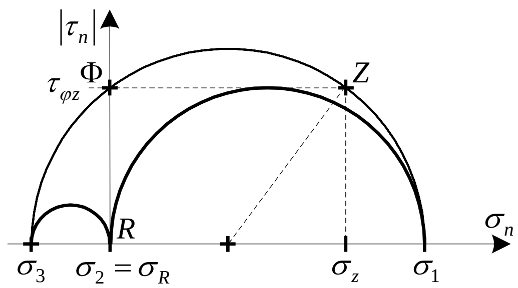
Der Spannungstensor:

$$\left[\underline{\underline{F}}\right]_{R,\varphi,z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\varphi z} \\ 0 & \tau_{z\varphi} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

Biegung: $\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y$, Torsion: $\tau_{z\varphi} = \tau_{\varphi z} = \frac{M_c}{I_p} \rho$, wobei $I_p = 2 I_x$.

Maximale Werte: $\sigma_{z\max} = \frac{M_{hx}}{I_x}\frac{D}{2} = \frac{M_{hx}}{K_x}$, $\tau_{\varphi z\max} = \frac{M_c}{I_p}\frac{D}{2} = \frac{M_c}{K_p}$, $K_p = 2K_x$.

Vergleichsspannung nach *Coulomb*:



$$\sigma_V(Coulomb) = \sigma_1,$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{\varphi z}^2},$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{\varphi z}^2}.$$

$$\sigma_{1\max} = \frac{M_{hx}}{2K_x} + \sqrt{\left(\frac{M_{hx}}{2K_x}\right)^2 + \left(\frac{M_c}{K_p}\right)^2}$$

$$\sigma_{1\max} = \frac{M_{hx}}{2K_x} + \sqrt{\left(\frac{M_{hx}}{2K_x}\right)^2 + \left(\frac{M_c}{K_p}\right)^2} = \frac{1}{2K_x}\left(M_{hx} + \sqrt{M_{hx}^2 + M_c^2}\right) = \frac{M_V}{K_p}.$$

Vergleichsspannung nach *Mohr* und *Huber-Mises-Hencky (HMH)*:

$$\sigma_V(Mohr) = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{\varphi z}^2} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{\varphi z}^2}.$$

$$\sigma_V(HMH) = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2\right]} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_3)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_3^2\right]}$$

Nach dem Einsetzen und der Umformung: $\sigma_V(HMH) = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_{\varphi z}^2}$

Zusammenfassung:

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma_z^2 + \beta\,\tau_{\varphi z}^2}, \quad Mohr: \beta = 4, \quad HMH: \beta = 3.$$

Vergleichsspannungen in den kritischen Punkten:

$$\sigma_{V\max} = \sigma_V(A) = \sigma_V(B) = \sqrt{\sigma_{z\max}^2 + \beta\,\tau_{\varphi z\max}^2}\ ,$$

$$\sigma_{V\max} = \sqrt{\left(\frac{M_{hx}}{K_x}\right)^2 + \beta\left(\frac{M_c}{K_p}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_{hx}^2 + \frac{\beta}{4}M_c^2}}{K_x} = \frac{M_V}{K_x}\ .$$

Nach *Mohr*: $\beta = 4$: $\quad M_V = \sqrt{M_{hx}^2 + \frac{\beta}{4}M_c^2} = \sqrt{\left(6^2 + \frac{4}{4}8^2\right)10^4} = 1000\ \text{Nm}$.

Nach *Huber-Mises-Hencky*: $\beta = 3$:

$$M_V = \sqrt{M_{hx}^2 + \frac{\beta}{4}M_c^2} = \sqrt{\left(6^2 + \frac{3}{4}8^2\right)10^4} = 916{,}5\ \text{Nm}\ .$$

c) Dimensionierung des Querschnittes nach der *Mohrschen* Theorie:

Der Querschnitt ist ausreichend dimensioniert, wenn,

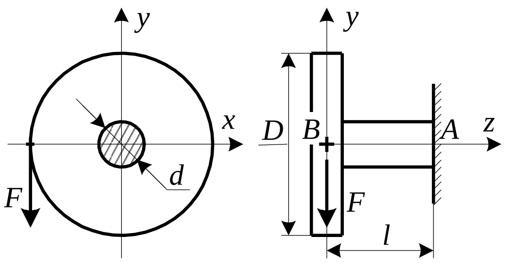
$$\sigma_{\text{red}\max} \le \sigma_{\text{meg}}\ , \quad \Rightarrow \quad \frac{M_{\text{red}}}{K_x} \le \sigma_{\text{meg}} \quad \Rightarrow \quad K_x \ge \frac{M_{\text{red}}}{\sigma_{\text{meg}}}\ .$$

Mit dem Zusammenhang $D = 2\,d$ ist $K_x = \frac{(D^4 - d^4)\,\pi}{64}\,\frac{2}{D} = \frac{(16-1)\,d^4\,\pi}{64\,d} = \frac{15}{64}\,d^3\,\pi$.

Aus der Ungleichung der Dimensionierung: $\quad d \ge \sqrt[3]{\frac{64}{15\,\pi}\,\frac{M_V}{\sigma_{\text{meg}}}} = \sqrt[3]{\frac{64}{15\,\pi}\,\frac{10^6}{80}} = 25{,}7\ \text{mm}$,

Man wählt aus der (ungarischen) Norm MSz 4337-64 einen entsprechenden Durchmesser: $D = 60$ mm und $d = 30$ mm.

Aufgabe 4.: Dimensionierung und Sicherheitsnachweis einer Welle bezüglich der maximalen Spannung



Gegeben:

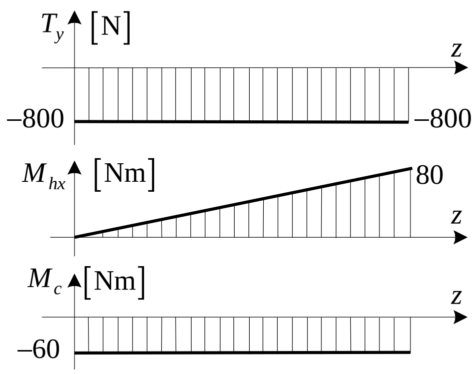
F =800 N, l =100 mm, D =150 mm, σ_{zul} =125 MPa .

Aufgabe:

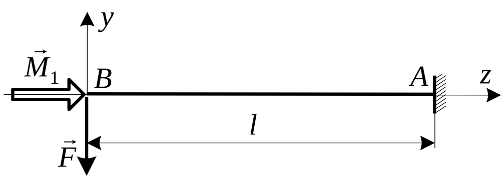
Dimensionierung und Sicherheitsnachweis der Welle bezüglich der maximalen Spannung.

Lösung:

Graphische Darstellung der Schnittgrößen:



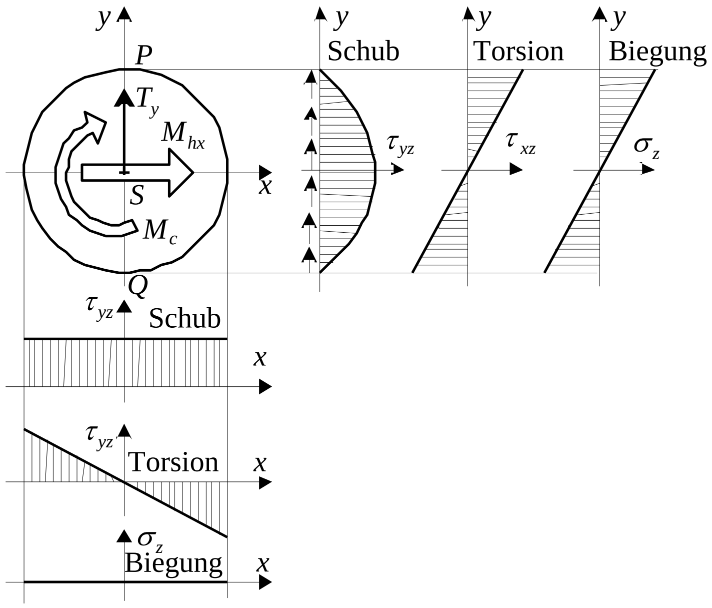
Reduktion der Belastung auf die Mittellinie der Welle:



Das Torsionsmoment: $M_1 = F\,\frac{D}{2} = 800 \cdot 0{,}075 = 60\,\text{Nm}$.

Der kritische Querschnitt: *A*.

Spannungsverteilung über dem kritischen Querschnitt *A*:



$$\tau_{yz} = -\frac{T_y S_x(y)}{I_x a(y)}\ ,\quad \tau_{yz\max} = \frac{4T_y}{3A}\ ,$$

$$\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y\ ,\qquad \sigma_{z\max} = \frac{M_{hx}}{K_x},$$

$$\tau_{\varphi z} = \frac{M_c}{I_p}\rho,\qquad \tau_{\varphi z\max} = \frac{M_c}{K_p},$$

$$I_p = 2I_x,\ K_p = 2K_x\ .$$

Die kritischen Punkte des kritischen Querschnittes *A* sind die Punkte *P* und *Q*.

Dimensionierung nach *Mohr* in den Punkten *P* und *Q*:

Die Vergleichsspannung: $\sigma_V = \sqrt{\sigma_z^2 + \beta\,\tau_{xz}^2}\ ,\quad \mathit{Mohr}:\ \beta = 4\ .$

$$\sigma_{V\max} = \sigma_V(P) = \sigma_V(Q) = \sqrt{\sigma_{z\max}^2 + \beta\,\tau_{xz\max}^2}\ ,$$

$$\sigma_{V\max} = \sqrt{\left(\frac{M_{hx}}{K_x}\right)^2 + \beta\left(\frac{M_c}{K_p}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_{hx}^2 + \frac{\beta}{4}M_c^2}}{K_x} = \frac{M_V}{K_x}\ .$$

Nach *Mohr* ist $\beta = 4$: $\quad M_V = \sqrt{M_{hx}^2 + \frac{\beta}{4}M_c^2} = \sqrt{\left(\left(8\cdot 10^4\right)^2 + \left(6\cdot 10^4\right)^2\right)} = 100\ \text{Nm}\ .$

Der Träger ist ausreichend dimensioniert, wenn $\sigma_{V\max} \le \sigma_{zul} \quad \Rightarrow \quad \frac{M_V}{K_x} \le \sigma_{zul}\ ,$

$$K_x \ge \frac{M_V}{\sigma_{zul}} = \frac{100\cdot 10^3}{125} = 800\ \text{mm}^3\ .$$

Aus $K_x \ge \frac{d^3\pi}{32} \quad \Rightarrow \quad d \ge \sqrt[3]{\frac{32K_x}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32\cdot 800}{3{,}14}} = \sqrt[3]{8150} = 20{,}124\ \text{mm}\ .$

Sicherheitsnachweis nach *Mohr* im Punkt *S*:

$$\sigma_{V\max}(S) = \frac{4}{3}\frac{T_y}{A}\sqrt{4} \le \sigma_{zul}\ ,\qquad A = \frac{d^2\pi}{4} = \frac{20{,}124^2\pi}{4} = 318\ \text{mm}^2\ .$$

$$\sigma_{V\max}(S) = \frac{4}{3}\frac{T_y}{A}\sqrt{4} = \frac{4}{3}\frac{800}{318}2 = 6{,}71\ \text{MPa}\ \le\ \sigma_{zul} = 125\text{MPa}\ .$$

Eine ausreichende Festigkeit der Welle ist gewährleistet.