

ÜBUNG 3.: GLEICHUNGEN DER ELASTIZITÄTSTHEORIE / ELASTIZITÄTSGLEICHUNGEN

Aufgabe 1.: Verschiebungs- und Verzerrungszustand eines elastischen Körpers

Gegeben: Der Verschiebungszustand des elastischen Körpers mit dem Verschiebungsfeld $\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(x, y, z)$, sowie der Ortsvektor \vec{r}_P des Punktes P des Körpers.

$$\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(x, y, z) = u(x, y, z)\vec{e}_x + v(x, y, z)\vec{e}_y + w(x, y, z)\vec{e}_z,$$

$$u = -vxy/R, \quad v = (vx^2 - vy^2 - z^2)/(2R), \quad w = yz/R,$$

$$R = 10 \text{ m}, \quad \nu = 0,25, \quad \vec{r}_P = (4\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + 5\vec{e}_z) \text{ mm}.$$

Aufgabe: a) Ermittlung der Matrix des Verschiebungsgradienten-Tensors $\underline{\underline{D}}(x, y, z)$ des Verzerrungstensors $\underline{\underline{A}}(x, y, z)$ und des Rotationstensors $\underline{\underline{\Psi}}(x, y, z)$.

b) Bestimmung der Matrix des Verzerrungstensors $\underline{\underline{A}}_P(x, y, z)$ im Punkt P , Veranschaulichung des Verzerrungszustandes mittels des elementaren Dreiebes.

c) Berechnung der Dehnung ε_n und der Gleitung γ_{mn} , wenn die Richtungseinheitsvektoren

$$\vec{e}_n = \left(0,5\vec{e}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y \right) \text{ und } \vec{e}_m = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x + 0,5\vec{e}_y \right) \text{ gegeben sind.}$$

Lösung:

a) Ermittlung der Matrix des Verschiebungsgradienten-Tensors $\underline{\underline{D}}(x, y, z)$ des Verzerrungstensors $\underline{\underline{A}}(x, y, z)$ und des Rotationstensors $\underline{\underline{\Psi}}(x, y, z)$:

Der Verschiebungsgradienten-Tensor:

$$\underline{\underline{D}} = (\vec{u}_x \circ \vec{e}_x + \vec{u}_y \circ \vec{e}_y + \vec{u}_z \circ \vec{e}_z) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \circ \vec{e}_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \circ \vec{e}_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \circ \vec{e}_z = \vec{u} \circ \nabla.$$

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\nu}{R}y & -\frac{\nu}{R}x & 0 \\ \frac{\nu}{R}x & -\frac{\nu}{R}y & -\frac{1}{R}z \\ 0 & \frac{1}{R}z & \frac{1}{R}y \end{bmatrix} \quad \text{- nicht-symmetrischer Tensor.}$$

Der Verschiebungsgradienten-Tensor $\underline{\underline{D}}(x, y, z)$ charakterisiert den spezifischen relativen Verschiebungszustand der elementaren Umgebung des Punktes $P(x, y, z)$.

Der Verzerrungstensor:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^T) = \frac{1}{2}(\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u}) \quad (\text{der symmetrischer Teil des Verschiebungsgradienten-Tensors}).$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -\frac{\nu}{R}y & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{R}y & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R}y \end{bmatrix}$$

Der Verzerrungstensor $\underline{\underline{A}}(x, y, z)$ charakterisiert den Verzerrungszustand / Formänderungen der elementaren Umgebung des Punktes $P(x, y, z)$.

Der Rotationstensor:

$$\underline{\underline{\Psi}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}^T) = \frac{1}{2}(\vec{u} \circ \nabla - \nabla \circ \vec{u}) \quad (\text{der antisymmetrischer Teil des Verschiebungsgradienten-Tensors}).$$

$$\underline{\underline{\Psi}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\nu}{R}x & 0 \\ \frac{\nu}{R}x & 0 & -\frac{1}{R}z \\ 0 & \frac{1}{R}z & 0 \end{bmatrix}$$

Der Rotationstensor $\underline{\underline{\Psi}}(x, y, z)$ charakterisiert die Starrkörperrotation der elementaren Umgebung des Punktes $P(x, y, z)$.

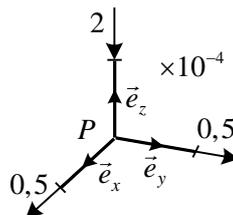
b) Bestimmung der Matrix des Verzerrungstensors $\underline{\underline{A}}_P(x, y, z)$ im Punkt P , Veranschaulichung des Verzerrungszustandes mittels des elementaren Dreibeines:

$$\varepsilon_x = -\frac{\nu}{R}y = -\frac{0,25}{10}(-0,002) = 0,5 \cdot 10^{-4}, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\tau_{yx}}{G} = 0,$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu}{R}y = -\frac{0,25}{10}(-0,002) = 0,5 \cdot 10^{-4}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\tau_{yz}}{G} = 0,$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{R}y = \frac{1}{10}(-0,002) = -2 \cdot 10^{-4}, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\tau_{xz}}{G} = 0.$$

$$\underline{\underline{A}}_P = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} 10^{-4}.$$



c) Berechnung der Dehnung ε_n und der Gleitung γ_{mn} :

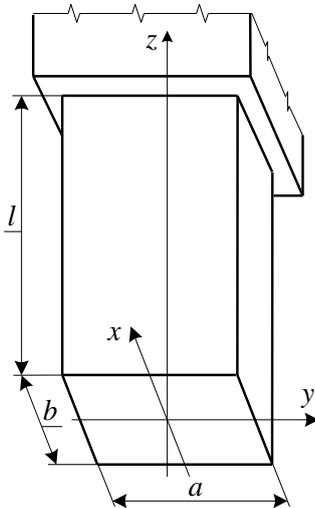
$$\vec{\alpha}_n = \underline{\underline{A_p}} \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 0 \end{bmatrix} 10^{-4} = \begin{bmatrix} 0,25 \\ -\sqrt{3}/4 \\ 0 \end{bmatrix} 10^{-4}.$$

Die Dehnung:

$$\varepsilon_n = \vec{\alpha}_n \cdot \vec{e}_n = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0,25 \\ -\sqrt{3}/4 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 & -\sqrt{3}/2 & 0 \end{bmatrix} = \left(0,125 + \frac{3}{8} \right) \cdot 10^{-4} = 0,5 \cdot 10^{-4}.$$

$$\text{Die Gleitung: } \frac{1}{2} \gamma_{mn} = \vec{\alpha}_n \cdot \vec{e}_m = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0,25 \\ -\sqrt{3}/4 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Aufgabe 2.: Elastizitätsgleichungen – der Zug-Druck-Stab



Gegeben:

Die skalaren Koordinaten des Verschiebungsfeldes eines prismatischen elastischen Körpers (die man aus mechanischer Sicht als einen Stab betrachten kann), der durch sein Eigengewicht belastet ist:

$$u = -\nu \rho g x z / E, \quad v = -\nu \rho g y z / E,$$

$$w = -\frac{\rho g}{2E} [l^2 - z^2 - \nu(x^2 + y^2)], \quad \text{wobei}$$

a, b, l - die Abmessungen des Körpers,

E - der Youngsche Elastizitätsmodul,

ν - der Poissonsche Koeffizient,

ρ - die Massendichte des Körpers,

g - die Erdbeschleunigung.

Die Verschiebungsfunktionen erhält man aus der Stabtheorie (prismatischer Zug-Druck-Stab)

Aufgabe: Kontrolle, ob die Elastizitätsgleichungen erfüllt werden.

Lösung:

a) Ermittlung des Verzerrungstensors:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\nu \rho g z / E, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \rho g z / E, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \rho g z / E.$$

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, \quad \gamma_{yz} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0, \quad \gamma_{xz} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0.$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nu \rho g z / E & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \rho g z / E & 0 \\ 0 & 0 & \rho g z / E \end{bmatrix}.$$

Die kinematischen Gleichungen sind erfüllt, weil der Verzerrungstensor aus diesen Zusammenhängen ermittelt wurde.

b) Anwendung des allgemeinen Hookeschen Gesetzes, Ermittlung des Spannungstensors:

$$A_I = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = (1-2\nu) \frac{\rho g z}{E}, \quad E = 2G(1+\nu).$$

$$\sigma_x = 2G \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] = 0, \quad \tau_{xy} = G \gamma_{xy} = 0,$$

$$\sigma_y = 2G \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] = 0, \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz} = 0,$$

$$\sigma_z = 2G \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] = \rho g z, \quad \tau_{xz} = G \gamma_{xz} = 0.$$

$$\underline{\underline{F}}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho g z \end{bmatrix}.$$

$$\text{Aus der Stabtheorie: } \sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{\rho g V}{A} = \frac{\rho g (abz)}{ab} = \rho g z. \quad \Rightarrow$$

Das Materialgesetz ist befriedigt.

c) Kontrolle, ob die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sind: $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$.

$$\vec{q} = q_z \vec{e}_z = -\rho g \vec{e}_z$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + q_x = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + q_y = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z = 0 + 0 + \rho g - \rho g = 0. \quad \Rightarrow$$

Alle Gleichgewichtsbedingungen sind befriedigt.

d) Erfüllung der kinematischen Randbedingungen:

An der Oberfläche $z=l$: $\vec{u} = \vec{0}$.

$$u = -\nu \rho g x l / E, \quad v = -\nu \rho g y l / E, \quad w = \frac{\nu \rho g}{2E} (x^2 + y^2),$$

Diese Bedingung wird nur im Punkt $x = y = 0$ erfüllt.

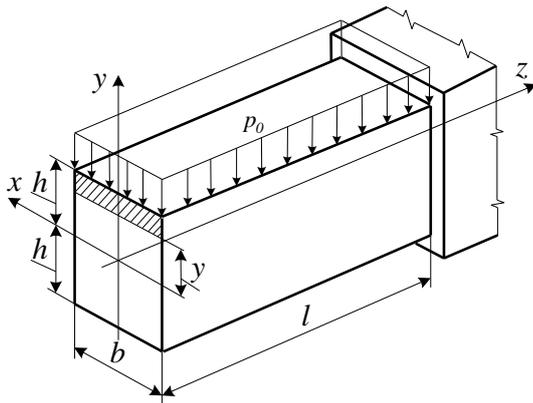
e) Erfüllung der Dynamischen Randbedingungen:

Die Oberfläche $z=0$ ist unbelastet und damit gilt hier $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad \sigma_z = 0$.

Auch die Oberflächen $x = \pm \frac{b}{2}$ sind unbelastet und damit gilt hier $\underline{\underline{F}} \cdot (\pm \vec{e}_x) = \pm \vec{\rho}_x = \vec{0}$.

Auch die Oberflächen $y = \pm \frac{a}{2}$ sind unbelastet und damit gilt hier $\underline{\underline{F}} \cdot (\pm \vec{e}_y) = \pm \vec{\rho}_y = \vec{0}$.

Aufgabe 3.: Elastizitätsgleichungen – der Biege-(und Schub) Balken

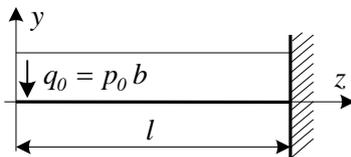


Gegeben: Ein prismatischer elastischer Körper (den man aus mechanischen Sicht als einen Stab betrachten kann), seine Abmessungen und Belastung: h, b, l, p_0

Aufgabe: Kontrolle, ob die Lösung, die man aus der Biegebalken-Theorie erhält, die Gleichgewichtsbedingungen und die Randbedingungen erfüllt.

Lösung:

a) Ermittlung des Spannungszustandes aus der Biegebalken-Theorie:



Belastung: $q_0 = p_0 b$,

$$\text{Schubkraft: } T_y(z) = -\int_0^z q_0 d\zeta = -p_0 b z,$$

$$\text{Biegemoment: } M_{hx} = -\int T_y dz = -\frac{1}{2} p_0 b z^2.$$

Der Spannungstensor:

$$\underline{\underline{F}}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

$$\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y = \frac{3p_0}{4h^3} z^2 y, \quad I_x = \frac{b(2h)^3}{12} = \frac{2bh^3}{3}.$$

$$\tau_{yz} = -\frac{T_y S_x(y)}{I_x b} = \frac{3p_0}{4h^3} (h^2 - y^2) z,$$

$$S_x(y) = b(h-y) \frac{h+y}{2} = \frac{b}{2} (h^2 - y^2).$$

b) Kontrolle, ob die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sind: $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + q_x = 0 + 0 + 0 + 0 \equiv 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + q_y = 0 + 0 + \frac{3p_0}{4h^3} (h^2 - y^2) + 0 = 0.$$

Diese skalare Gleichung ist nur an den Oberflächen $y = \pm h$ erfüllt.

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z = 0 - \frac{3p_0 y z}{2h^3} + \frac{3p_0 y z}{2h^3} + 0 \equiv 0.$$

c) Kontrolle, ob die dynamischen Randbedingungen erfüllt sind:

$$\text{An den Oberflächen } x = \pm \frac{b}{2}: \underline{\underline{F}} \cdot (\pm \vec{e}_x) \Big|_{x=\pm \frac{b}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Das Ergebnis bedeutet, dass diese Oberflächen unbelastet sind.

$$\text{An der Oberfläche } z=0: \underline{\underline{F}} \cdot (-\vec{e}_z) \Big|_{z=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Big|_{z=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau_{yz}(z=0) \\ -\sigma_z(z=0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Das Ergebnis bedeutet, dass diese Oberfläche unbelastet ist.

$$\text{An den Oberflächen } y=\pm h: \underline{\underline{F}} \cdot (\pm \vec{e}_y) \Big|_{y=\pm h} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \pm \tau_{zy} \Big|_{y=\pm h} \vec{e}_z = \vec{0}.$$

An der Oberfläche $y=-h$ ist die dynamische Randbedingung befriedigt, weil diese Oberfläche nicht belastet ist.

An der Oberfläche $y=+h$ ist die dynamische Randbedingung nicht befriedigt, weil diese Oberfläche belastet ist: $\underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_y \Big|_{y=h} = -p_0 \vec{e}_y$.

Die Lösung, die man aus der Biegebalken-Theorie erhält, ist aus der Sicht der Elastizitätstheorie nicht exakt, sondern eine Näherungslösung, weil sie nicht alle Gleichungen der Elastizität befriedigt.

Aufgabe 4.: Elastizitätsgleichungen

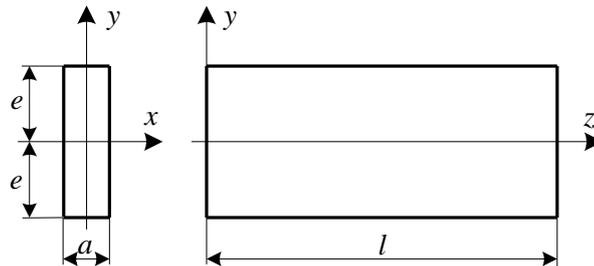
Gegeben: Das Spannungsfeld eines Balkens mit dünnem Rechteckquerschnitt:

$$\sigma_y = -\frac{3p_0}{4e^3} \left(1 - \frac{z}{l}\right) \left(e^2 y - \frac{1}{3} y^3 + \frac{2}{3} e^3\right),$$

$$\sigma_z = \frac{3p_0}{4e^3} \left(z^2 - \frac{1}{3} \frac{z^3}{l}\right) y,$$

$$\tau_{yz} = \frac{3p_0}{4e^3} \left(z - \frac{1}{2} \frac{z^2}{l}\right) (e^2 - y^2),$$

$$\sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{zx} = 0.$$



Aufgabe:

- Untersuchung, ob die Gleichgewichtsbedingungen im Fall $\vec{q} = \vec{0}$ erfüllt sind. (\vec{q} ist die Volumenkräftedichte)
- Ermittlung der Belastung und der Reaktionskräfte des Balkens aus den dynamischen Randbedingungen.
- Untersuchung, ob das Spannungsfeld eine exakte Lösung der elastischen Randwertaufgabe sein kann, wenn $\vec{q} = \vec{0}$.

Lösung:

- Untersuchung, ob die Gleichgewichtsbedingungen im Fall $\vec{q} = \vec{0}$ erfüllt sind:

In diesem Fall erhält man aus der Gleichgewichtsbedingung $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$ einen einfacheren Zusammenhang: $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla = \vec{0}$.

Die skalaren Gleichungen:
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0.$$

Die erste Gleichung ist identisch gleich Null, weil alle Spannungen null sind.

Die zweite Gleichung:

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 - \frac{3p_0}{4e^3} \left(1 - \frac{z}{l}\right) (e^2 - y^2) + \frac{3p_0}{4e^3} \left(1 - \frac{z}{l}\right) (e^2 - y^2) = 0.$$

Die dritte Gleichung:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 - 2y \frac{3p_0}{4e^3} \left(z - \frac{z^2}{2l}\right) + \frac{3p_0}{4e^3} y \left(2z - \frac{z^2}{l}\right) = 0.$$

Die Gleichgewichtsbedingungen werden also in jedem Punkt des Körpers / des Balkens erfüllt

b) Ermittlung der Belastung und der Reaktionskräfte des Balkens aus den dynamischen Randbedingungen:

Die Belastung und die Reaktionskräfte erhält man mit der Bestimmung des Spannungszustandes an den Oberflächen des Körpers.

Die Oberflächen mit dem Normalvektor $\pm \vec{e}_x$ sind unbelastet, weil $\sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$. $\vec{\rho}_x = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_x = \vec{0}$.

Die Spannungen an der Oberfläche mit dem Normalenvektor \vec{e}_y (obere Mantelfläche des Körpers) erhält man durch Einsetzen von $y = e$:

$$\sigma_y = -\frac{3p_0}{4e^3} \left(1 - \frac{z}{l}\right) \left(e^3 - \frac{1}{3}e^3 + \frac{2}{3}e^3\right) = -p_0 \left(1 - \frac{z}{l}\right),$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = \frac{3p_0}{4e^3} \left(z - \frac{1}{2} \frac{z^2}{l}\right) (e^2 - e^2) = 0, \quad \tau_{xy} = 0$$

Die Flächenlast an der Oberfläche ist also: $\vec{p} = -p_0 \left(1 - \frac{z}{l}\right) \vec{e}_y$.

Die Spannungen an der Oberfläche mit dem Normalenvektor $-\vec{e}_y$ (untere Mantelfläche des Körpers) erhält man durch Einsetzen von $y = -e$:

$$\sigma_y = -\frac{3p_0}{4e^3} \left(1 - \frac{z}{l}\right) \left(-e^3 + \frac{1}{3}e^3 + \frac{2}{3}e^3\right) = 0$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = \frac{3p_0}{4e^3} \left(z - \frac{1}{2} \frac{z^2}{l}\right) (e^2 - e^2) = 0, \quad \tau_{xy} = 0. \text{ Diese Oberfläche ist unbelastet.}$$

Die Spannungen an der Oberfläche mit dem Normalvektor \vec{e}_z (rechtsseitige Mantelfläche des Körpers) erhält man durch Einsetzen von $z = l$:

$$\sigma_z = \frac{3p_0}{4e^3} \left(l^2 - \frac{1}{3} \frac{l^3}{l}\right) y = \frac{p_0 l^2}{2e^3} y,$$

$$\tau_{yz} = \frac{3p_0}{4e^3} \left(l - \frac{1}{2} \frac{l^2}{l}\right) (e^2 - y^2) = \frac{3lp_0}{8e^3} (e^2 - y^2), \quad \tau_{xz} = 0.$$

Die Biegespannung σ_z ist linear und die Schubspannung τ_{yz} ist parabolisch verteilt.

Die Spannungen an der Oberfläche mit dem Normalenvektor $-\vec{e}_z$ (linksseitige Mantelfläche des Körpers) erhält man durch Einsetzen von $z = 0$:

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad \tau_{xz} = 0. \text{ Diese Oberfläche ist unbelastet.}$$

c) Untersuchung, ob das Spannungsfeld eine exakte Lösung der elastischen Randwertaufgabe sein kann, wenn $\vec{q} = \vec{0}$:

Bei einer exakten Lösung müssen auch die *Beltrami-Michellschen* Kompatibilitätsgleichungen erfüllt werden.

Die skalare Form der Gleichungen im Fall $\vec{q} = \vec{0}$:

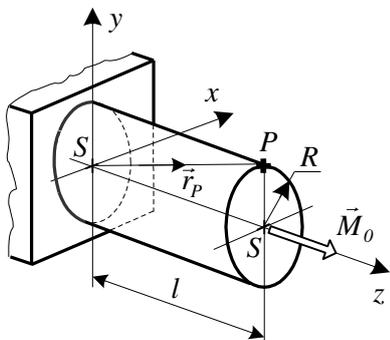
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial x^2} &= 0, & \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial y^2} &= 0, & \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial x \partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial z^2} &= 0, & \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial y \partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Nach dem Einsetzen und dem Bilden der Ableitungen:

$$\begin{aligned} 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ \frac{6yp_0}{4e^3} \left(1 - \frac{z}{l}\right) + \frac{1}{1+\nu} \frac{6yp_0}{4e^3} \left(1 - \frac{z}{l}\right) &= 0, & 0 &= 0, \\ \frac{3p_0}{4e^3} \left(2 - \frac{2z}{l}\right) + \frac{1}{1+\nu} \frac{3p_0}{4e^3} \left(2 - \frac{2z}{l}\right) &= 0, \\ -2 \frac{3p_0}{4e^3} \left(z - \frac{z^2}{2l}\right) - \frac{3p_0}{4e^3 l} (e^2 - y^2) + \frac{1}{1+\nu} \frac{3p_0}{4e^3} \left[\left(\frac{e^2}{l} + \frac{2}{3l} y^2\right) + \left(2z - \frac{z^2}{l}\right) \right] &= 0. \end{aligned}$$

Nicht alle Kompatibilitätsgleichungen sind erfüllt. Die Lösung ist also nicht exakt.

Aufgabe 5.: Elastizitätsgleichungen – Verschiebungs-, Verzerrungs- und Spannungszustand



Gegeben:

Die Abmessungen und der Schubmodul eines Stabes mit Kreisquerschnitt, sowie das Verschiebungsfeld $\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(x, y, z)$ für eine Torsionsbeanspruchung und der Ortsvektor \vec{r}_p des Punktes P des Körpers.

$$\vec{u}(x, y, z) = (-\vartheta z y) \vec{e}_x + (\vartheta x z) \vec{e}_y, \quad \vartheta = 0,1 \text{ rad/m},$$

$$R = 0,01 \text{ m}, \quad G = 80 \text{ GPa}, \quad l = 0,1 \text{ m}, \quad \vec{M}_0 = M_0 \vec{e}_z,$$

$$\vec{r}_p = (0,01 \vec{e}_y + 0,1 \vec{e}_z) \text{ m}.$$

Aufgabe: a) Ermittlung der Matrix des Verzerrungstensors $\underline{A}(x, y, z)$.

- Bestimmung der spezifischen Volumenänderung / der räumlichen Dehnung des Körpers / des Stabes.
- Berechnung der Hauptdehnungen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ und Hauptrichtungen $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ im Punkt P . Veranschaulichung des Verzerrungszustandes im Punkt P .
- Bestimmung des Spannungszustandes im Punkt P .

Lösung:

a) Ermittlung der Matrix des Verzerrungstensors $\underline{A}(x, y, z)$:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^T) = \frac{1}{2}(\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u}),$$

Nach der Ableitungsbildung:
$$[\underline{\underline{A}}(x, y, z)] = \frac{1}{2} \varrho \begin{bmatrix} 0 & 0 & -y \\ 0 & 0 & x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}.$$

Im Punkt P :
$$[\underline{\underline{A}}_P] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \cdot 10^{-4} \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Bestimmung der spezifischen Volumenänderung / der räumlichen Dehnung des Körpers / des Stabes:

$$\frac{\Delta V}{V} = \det[\underline{\underline{A}}] \approx A_I = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0.$$

c) Berechnung der Hauptdehnungen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ und Hauptrichtungen $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ im Punkt P . Veranschaulichung des Verzerrungszustandes im Punkt P .

Die Eigenwertaufgabe, die charakteristische Gleichung:

$$\begin{bmatrix} -\varepsilon_e & 0 & -5 \cdot 10^{-4} \\ 0 & -\varepsilon_e & 0 \\ -5 \cdot 10^{-4} & 0 & -\varepsilon_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \varepsilon_e^3 - 25 \cdot 10^{-8} \varepsilon_e = 0.$$

Wurzeln / Lösungen der charakteristischen Gleichung, die Hauptdehnungen:

$$\varepsilon_1 = 5 \cdot 10^{-4}, \quad \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_3 = -5 \cdot 10^{-4}.$$

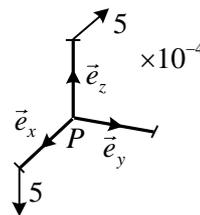
Bestimmung der Hauptrichtung \vec{e}_1 :

$$10^4 \cdot \begin{bmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & 0 \\ -5 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \\ e_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -5e_{1x} - 5e_{1z} = 0 \\ -5e_{1y} = 0 \\ -5e_{1x} - 5e_{1z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -e_{1z} = e_{1x} \\ e_{1y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_x - \vec{e}_z).$$

Die zweite Hauptrichtung: $\vec{e}_2 = \vec{e}_y$.

Die dritte Hauptrichtung:
$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_x - \vec{e}_z) \times \vec{e}_y = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_x + \vec{e}_z).$$

Veranschaulichung am elementaren Dreibein:



d) Bestimmung des Spannungszustandes im Punkt P :

Das allgemeine Hookesche Gesetz:
$$\underline{\underline{F}} = 2G \left(\underline{\underline{A}} + \frac{\nu A_I}{1 - 2\nu} \underline{\underline{E}} \right).$$

Aus der entsprechenden skalaren Gleichung:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = 2G \frac{1}{2} \gamma_{xz} = 2 \cdot 80 \cdot 10^9 \cdot (-5 \cdot 10^{-4}) = -80 \cdot 10^6 = -80 \text{ MPa}$$

Der Spannungstensor:
$$[\underline{\underline{F}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -80 \\ 0 & 0 & 0 \\ -80 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

Aufgabe 6.: Elastizitätsgleichungen – Ermittlung des Verzerrungstensors in Zylinderkoordinaten

Gegeben: Die symbolische/dyadische Form der kinematischen Gleichungen

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} (\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u}).$$

Aufgabe: Ermittlung der skalaren kinematischen Gleichungen in Zylinderkoordinaten $R\varphi z$.

Lösung:

Der Nabla-Differentialoperator ∇ in Zylinderkoordinaten: $\nabla = \frac{\partial}{\partial R} \vec{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$.

Das Verschiebungsfeld in Zylinderkoordinaten: $\vec{u} = u \vec{e}_R + v \vec{e}_\varphi + w \vec{e}_z$.

Der Verschiebungsgradienten Tensor:

$$\underline{\underline{D}} = \vec{u} \circ \nabla = (u \vec{e}_R + v \vec{e}_\varphi + w \vec{e}_z) \circ \left(\frac{\partial}{\partial R} \vec{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right).$$

Im Zylinderkoordinaten-System sind zwei Basis-Vektoren ortsabhängig:

$$\vec{e}_R = \vec{e}_R(\varphi), \quad \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi(\varphi), \quad \vec{e}_z = \text{konstant}.$$

Die partiellen Ableitungen der Basis-Vektoren nach den Zylinderkoordinaten:

$$\frac{\partial \vec{e}_R}{\partial R} = \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial R} = \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial R} = \frac{\partial \vec{e}_R}{\partial \varphi} = \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \varphi} = \frac{\partial \vec{e}_R}{\partial z} = \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial z} = \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z} = \vec{0}, \quad \text{aber} \quad \frac{\partial \vec{e}_R}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi, \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{e}_R.$$

Ausführung der gegebenen Operationen unter Berücksichtigung der Ortsabhängigkeit der Basis-Vektoren:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{D}} &= (u \vec{e}_R + v \vec{e}_\varphi + w \vec{e}_z) \circ \left(\frac{\partial}{\partial R} \vec{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial R} \vec{e}_R \circ \vec{e}_R + \frac{\partial v}{\partial R} \vec{e}_\varphi \circ \vec{e}_R + \frac{\partial w}{\partial R} \vec{e}_z \circ \vec{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \vec{e}_R \circ \vec{e}_\varphi + \frac{1}{R} u \frac{\partial \vec{e}_R}{\partial \varphi} \circ \vec{e}_\varphi + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \circ \vec{e}_\varphi + \\ &\quad \vec{e}_\varphi \\ &\quad + \frac{1}{R} v \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} \circ \vec{e}_\varphi + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \vec{e}_z \circ \vec{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{e}_R \circ \vec{e}_z + \frac{\partial v}{\partial z} \vec{e}_\varphi \circ \vec{e}_z + \frac{\partial w}{\partial z} \vec{e}_z \circ \vec{e}_z. \\ &\quad -\vec{e}_R \end{aligned}$$

Nach Sortierung hinsichtlich der gleichen Dyaden:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{D}} &= \frac{\partial u}{\partial R} \vec{e}_R \circ \vec{e}_R + \frac{\partial v}{\partial R} \vec{e}_\varphi \circ \vec{e}_R + \frac{\partial w}{\partial R} \vec{e}_z \circ \vec{e}_R + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{R} \right) \vec{e}_R \circ \vec{e}_\varphi + \left(\frac{u}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_\varphi \circ \vec{e}_\varphi + \\ &\quad + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \vec{e}_z \circ \vec{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{e}_R \circ \vec{e}_z + \frac{\partial v}{\partial z} \vec{e}_\varphi \circ \vec{e}_z + \frac{\partial w}{\partial z} \vec{e}_z \circ \vec{e}_z \end{aligned}$$

Aus dieser dyadischen Form erhält man die Matrix des Verschiebungsgradienten-Tensors:

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial R} & \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{R} \right) & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial R} & \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{R} \right) & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial R} & \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad - \text{ nicht-symmetrischer Tensor.}$$

Der Verzerrungstensor: $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^T)$, (der symmetrischer Teil des Verschiebungsgradienten-Tensors)

$$[\underline{\underline{A}}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial R} & \frac{1}{2R} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v + R \frac{\partial v}{\partial R} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial R} \right) \\ \frac{1}{2R} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v + R \frac{\partial v}{\partial R} \right) & \frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} & \frac{1}{2R} \left(R \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial R} \right) & \frac{1}{2R} \left(R \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 7.: Elastizitätsgleichungen – Ermittlung der Gleichgewichtsbedingungen in Zylinderkoordinaten

Gegeben: Die symbolische/dyadische Form der Gleichgewichtsbedingungen $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$.

Aufgabe: Ermittlung der skalaren Gleichungen der Gleichgewichtsbedingungen in Zylinderkoordinaten $R\varphi z$.

Lösung:

Der Nabla-Differentialoperator ∇ in Zylinderkoordinaten: $\nabla = \frac{\partial}{\partial R} \vec{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$.

Der Spannungstensor $\underline{\underline{F}}$ in Zylinderkoordinaten: $\underline{\underline{F}} = \vec{\rho}_R \circ \vec{e}_R + \vec{\rho}_\varphi \circ \vec{e}_\varphi + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z$.

Im Zylinderkoordinaten-System sind zwei Basis-Vektoren ortsabhängig:

$$\vec{e}_R = \vec{e}_R(\varphi), \quad \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi(\varphi), \quad \vec{e}_z = \text{konstant}.$$

Die partiellen Ableitungen der Basis-Vektoren nach den Ortskoordinaten:

$$\frac{\partial \vec{e}_R}{\partial R} = \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial R} = \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial R} = \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \varphi} = \frac{\partial \vec{e}_R}{\partial z} = \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial z} = \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z} = \vec{0}, \text{ aber } \frac{\partial \vec{e}_R}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi, \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{e}_R.$$

Durchführung der skalaren Multiplikation $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla$:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}} \cdot \nabla &= (\vec{\rho}_R \circ \vec{e}_R + \vec{\rho}_\varphi \circ \vec{e}_\varphi + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial R} \vec{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) = \\ &= \frac{\partial \vec{\rho}_R}{\partial R} \circ \vec{e}_R \cdot \vec{e}_R + \frac{\partial \vec{\rho}_\varphi}{\partial R} \circ \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_R + \frac{\partial \vec{\rho}_z}{\partial R} \circ \vec{e}_z \cdot \vec{e}_R + \\ &\quad + \frac{1}{R} \frac{\partial \vec{\rho}_R}{\partial \varphi} \circ \vec{e}_R \cdot \vec{e}_\varphi + \frac{1}{R} \vec{\rho}_R \circ \frac{\partial \vec{e}_R}{\partial \varphi} \cdot \vec{e}_\varphi + \frac{1}{R} \frac{\partial \vec{\rho}_\varphi}{\partial \varphi} \circ \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + \frac{1}{R} \vec{\rho}_\varphi \circ \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} \cdot \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \vec{\rho}_z}{\partial \varphi} \circ \vec{e}_z \cdot \vec{e}_\varphi + \\ &\quad + \frac{\partial \vec{\rho}_R}{\partial z} \circ \vec{e}_R \cdot \vec{e}_z + \frac{\partial \vec{\rho}_\varphi}{\partial z} \circ \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_z + \frac{\partial \vec{\rho}_z}{\partial z} \circ \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z. \end{aligned}$$

$\begin{matrix} =1 & =0 & =0 \\ =0 & \underbrace{= \vec{e}_\varphi}_{=1} & \underbrace{= -\vec{e}_R}_{=0} \\ =0 & =0 & =1 \end{matrix}$

Ausnutzung der Assoziativität der dyadischen und skalaren Multiplikation und der Orthogonalität der Basis-Vektoren:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}} \cdot \nabla &= \frac{\partial \vec{\rho}_R}{\partial R} + \frac{1}{R} \vec{\rho}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial \vec{\rho}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{\rho}_z}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial \sigma_R}{\partial R} \vec{e}_R + \frac{\partial \tau_{\varphi R}}{\partial R} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \tau_{zR}}{\partial R} \vec{e}_z + \frac{1}{R} \sigma_R \vec{e}_R + \frac{1}{R} \tau_{\varphi R} \vec{e}_\varphi + \frac{1}{R} \tau_{zR} \vec{e}_z + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{R\varphi}}{\partial \varphi} \vec{e}_R + \frac{1}{R} \tau_{R\varphi} \frac{\partial \vec{e}_R}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{1}{R} \sigma_\varphi \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial \varphi} \vec{e}_z + \\
& \qquad \qquad \qquad = \vec{e}_\varphi \qquad \qquad \qquad = -\vec{e}_R \\
& + \frac{\partial \tau_{Rz}}{\partial z} \vec{e}_R + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \vec{e}_z. \qquad \qquad \qquad / \cdot \vec{e}_R \quad / \cdot \vec{e}_\varphi \quad / \cdot \vec{e}_z
\end{aligned}$$

Nach der skalaren Multiplikation mit den Basis-Vektoren $\vec{e}_R, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ erhält man die skalaren Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_R}{\partial R} + \frac{1}{R} \left[\sigma_R + \frac{\partial \tau_{R\varphi}}{\partial \varphi} - \sigma_\varphi \right] + \frac{\partial \tau_{Rz}}{\partial z} + q_R &= 0, \\
\frac{\partial \tau_{\varphi R}}{\partial R} + \frac{1}{R} \left[\tau_{\varphi R} + \tau_{R\varphi} + \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + q_\varphi &= 0, \\
\frac{\partial \tau_{zR}}{\partial R} + \frac{1}{R} \left[\tau_{zR} + \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z &= 0.
\end{aligned}$$