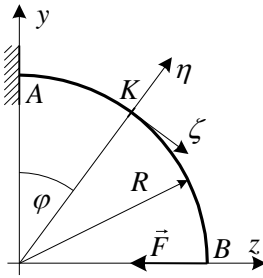


## ÜBUNG 4.: GEKRÜMMTE STÄBE

### Aufgabe 1.: Schnittgrößen und Spannungsverteilung gekrümmter Stäbe



Gegeben: Abmessungen und Belastung eines im Bild dargestellten, am Querschnitt A eingespannten Stabes mit Kreisquerschnitt:  $R, F, d$ .

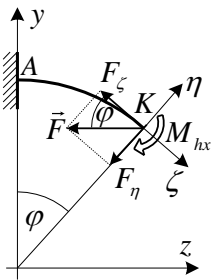
Aufgabe:

- Bestimmung der Schnittgrößen: Längskraft  $N = N(\varphi)$ , Querkraft  $T_\eta = T_\eta(\varphi)$  und Biegemoment  $M_{hx} = M_{hx}(\varphi)$ .
- Graphische Darstellung der Schnittgrößenverläufe mit der Angabe der charakteristischen Werte.
- Darstellung der Spannungsverteilung über den Querschnitt A.

Lösung:

- Bestimmung der Schnittgrößen: Längskraft  $N = N(\varphi)$ , Querkraft  $T_\eta = T_\eta(\varphi)$  und Biegemoment  $M_{hx} = M_{hx}(\varphi)$ :

Die Einzelkraft  $\vec{F}$  wird in den Schwerpunkt eines beliebigen Querschnittes K versetzt. Die gesuchten Schnittgrößen ergeben sich aus der versetzten Kraft und dem dazugehörigen Versetzungsmoment. Die Vorzeichenregel gilt wie bei geraden Stäben.



$$N = N(\varphi) = -F \cos \varphi,$$

$$T_\eta = T_\eta(\varphi) = F \sin \varphi,$$

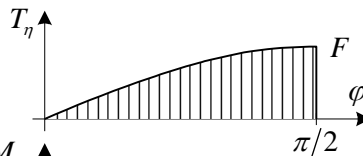
$$M_{hx} \equiv M_{h\zeta} = M_{hx}(\varphi) = RF \cos \varphi.$$

- Graphische Darstellung der Schnittgrößenverläufe mit der Angabe der charakteristischen Werte:

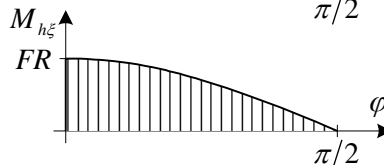
Längskraft:



Querkraft:



Biegemoment:



- Darstellung der Spannungsverteilung über den Querschnitt A:

Die Beanspruchungen des Querschnittes sind Zug-Druck und Biegung.

$$\sigma_\zeta(\eta) = \sigma'_\zeta + \sigma''_\zeta = \frac{N}{A} + \frac{M_h}{\rho_0 A} + \frac{M_h}{I_r} \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta} \eta, \text{ wobei}$$

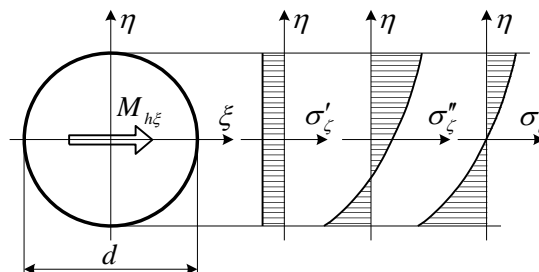
$$\sigma''_\zeta = \frac{N}{A} = -\frac{F}{A} \text{ die Normalspannung aus dem Zug-Druck,}$$

$$\sigma_{\zeta}''(\eta) = \frac{M_{hx}}{\rho_0 A} + \frac{M_{hx}}{I_r} \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta} \eta = \frac{FR}{RA} + \frac{FR}{I_r} \frac{R}{R + \eta} \eta \quad \text{die Normalspannung aus der Biegung.}$$

Das Biegemoment im Querschnitt A:  $M_{hx} \equiv M_{h\xi} = FR > 0$ ,  $\rho_0 = R > 0$ ,  $-\frac{d}{2} \leq \eta \leq \frac{d}{2}$ .

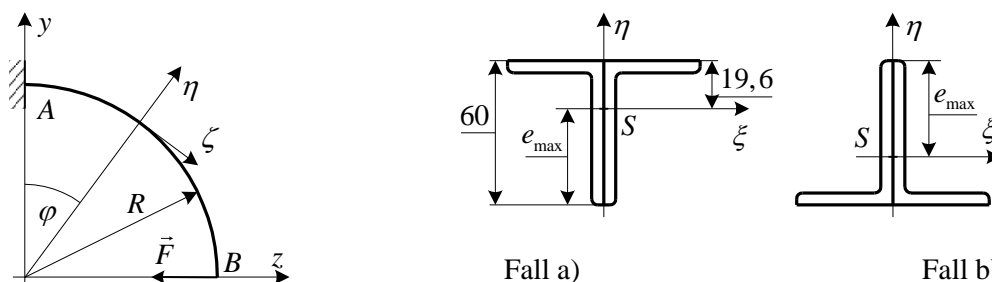
Das reduzierte axiale Flächenträgheitsmoment:  $I_r = \int_{(A)} \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta} \eta^2 dA$ .

Die Spannungsverteilung:



### Aufgabe 2.: Schnittgrößen, Spannungsverteilung und Tragfähigkeit gekrümmter Stäbe

Gegeben: Abmessungen und Belastung eines im Bild dargestellten, am Querschnitt A eingespannten Stabes. Der Querschnitt des Stabes ist aus zwei L-Profilen (L 40.60.5). Es werden die im Bild dargestellten zwei Lagen des Profils untersucht.  $R = 300 \text{ mm}$ ,  $\sigma_F = 400 \text{ MPa}$ ,  $n_s = 2$ ,  $F = 2 \text{ kN}$ .



Aufgabe: a) Bestimmung der maximalen Vergleichsspannung für beide Fälle.

b) Berechnung der maximalen möglichen Belastung  $F_{1\max}$  und  $F_{2\max}$  für beide Fälle, wenn der Sicherheitsbeiwert  $n_s = 2$  ist.

Lösung:

Regel für die Berechnung gekrümmter Stäbe:

$$\rho_0 / e_{\max} < 3 \square 4 \quad \Rightarrow \quad \text{Verwendung der Grashofschens-Formel und } I_r.$$

$$3 \square 4 < \rho_0 / e_{\max} < 8 \square 10, \quad \Rightarrow \quad \text{Verwendung der Grashofschens-Formel und } I_{\xi}.$$

$$8 \square 10 < \rho_0 / e_{\max} \quad \Rightarrow \quad \text{Verwendung der Zusammenhänge für gerade Stäbe.}$$

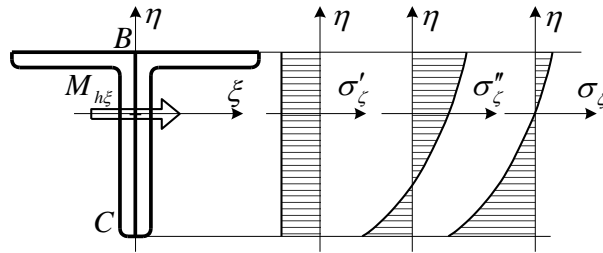
Bei dieser Aufgabe:  $\frac{\rho_0}{e_{\max}} = \frac{R}{e_{\max}} = \frac{300}{40,4} = 7,43 \Rightarrow$  Verwendung der Grashofschens-Formel;

$$I_{\xi} = 2I_x = 34,4 \text{ cm}^4 \quad (\text{aus der ungarischen Norm MSz 329}).$$

Der gefährdete/kritische Querschnitt ist A, Die Beanspruchungen des Querschnittes A:

$$N = -F = -2 \text{ kN}, \quad T_{\eta} = 0, \quad M_{h\xi} = FR = 600 \text{ Nm} \quad (\text{siehe vorherige Aufgabe}).$$

Spannungsverteilung im Fall a):



$$\sigma_z = \sigma'_z + \sigma''_z = \left(\frac{N}{A}\right) + \left(\frac{M_h}{RA} + \frac{M_h}{I_\xi} \frac{R}{R+\eta}\right) = \left(-\frac{F}{A}\right) + \left(\frac{RF}{RA} + \frac{RF}{I_\xi} \frac{R}{R+\eta}\right) = \frac{RF}{I_\xi} \frac{R}{R+\eta}.$$

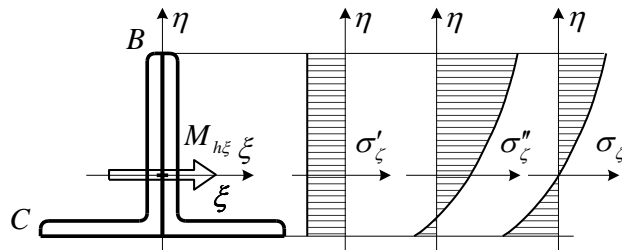
$$\sigma_z(B) = \frac{FR}{I_\xi} \frac{R}{R+\eta_B} \eta_B = \frac{600}{34,4 \cdot 10^{-8}} \frac{300}{319,6} 19,6 \cdot 10^{-3} = 32,09 \text{ MPa}.$$

$$\sigma_z(C) = \frac{FR}{I_\xi} \frac{R}{R+\eta_C} \eta_C = \frac{600}{34,4 \cdot 10^{-8}} \frac{300}{259,6} (-40,4 \cdot 10^{-3}) = -81,49 \text{ MPa}.$$

$$\sigma_{V \max} = |\sigma_z(C)| = 81,49 \text{ MPa}.$$

$$\frac{F_{1 \max}}{F} = \frac{\sigma_F}{n_t \sigma_{V \max}} = \Rightarrow F_{1 \max} = F \frac{\sigma_F}{n_t \sigma_{V \max}} = 2 \frac{400}{2 \cdot 81,49} = 4,91 \text{ kN}.$$

Spannungsverteilung im Fall b):



$$\sigma_z(B) = \frac{FR}{I_\xi} \frac{R}{R+\eta_B} \eta_B = \frac{600}{34,4 \cdot 10^{-8}} \frac{300}{340,4} 40,4 \cdot 10^{-3} = 62,1 \text{ MPa}.$$

$$\sigma_z(C) = \frac{FR}{I_\xi} \frac{R}{R+\eta_C} \eta_C = \frac{600}{34,4 \cdot 10^{-8}} \frac{300}{280,4} (-19,6 \cdot 10^{-3}) = -36,58 \text{ MPa}.$$

$$\sigma_{V \max} = |\sigma_z(B)| = 62,1 \text{ MPa}.$$

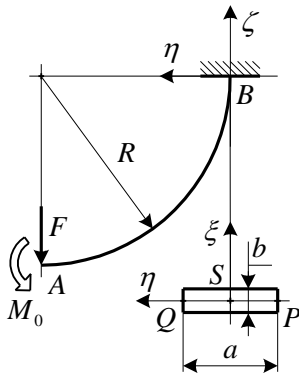
$$\frac{F_{2 \max}}{F} = \frac{\sigma_F}{n_t \sigma_{V \max}} = \Rightarrow F_{2 \max} = F \frac{\sigma_F}{n_t \sigma_{V \max}} = 2 \frac{400}{2 \cdot 62,1} = 6,44 \text{ kN}.$$

*Bemerkung:*

Wenn man die Ergebnisse beide Lagen des Profils vergleicht, kann man feststellen, daß b) hinsichtlich der Festigkeit günstiger ist. In diesem Fall ist die Tragfähigkeit des Stabes, unabhängig von dem gegebenen Eigengewicht und Sicherheitsbeiwert, mehr als um 30% größer:

$$\frac{F_{2 \max}}{F_{1 \max}} = \frac{6,44}{4,91} = 1,31.$$

**Aufgabe.3.: Schnittgrößen, Spannungsverteilung gekrümmter Stäbe, das reduzierte Flächenträgheitsmoment**



**Gegeben:** Ein Viertelkreisträger mit dem Radius  $R$  und Rechteckquerschnitt. Der Träger ist mit einer Einzelkraft  $F$  und einem Moment  $M_0$  am Querschnitt  $A$  belastet. Der Querschnitt  $B$  des Stabes ist eingespannt.

$$R = 32 \text{ mm}, \quad a = 24 \text{ mm}, \quad b = 6 \text{ mm}, \quad F = 3 \text{ kN}.$$

**Aufgabe:** a) Berechnung des reduzierten Flächenträgheitsmomentes  $I_{red}$  bezogen auf die Achse  $\xi$  des Querschnittes  $B$ .

- b) Bestimmung der Normalspannung  $\sigma_\zeta$  in den Punkten  $S$ ,  $P$  und  $Q$  des Querschnittes  $B$ , wenn  $M_0 = 0$  ist.  
 c) Ermittlung des Wertes von  $M_0$  so, dass die Vergleichsspannungen in den Punkten  $P$  und  $Q$  des Querschnittes  $B$  gleich sind.

**Lösung:**

a) Berechnung des reduzierten Flächenträgheitsmomentes  $I_{red}$  bezogen auf die Achse  $\xi$  des Querschnittes  $B$ :

$$I_r = \int_{(A)} \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta} \eta^2 dA = b \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta} \eta^2 d\eta = ab\rho_0^2 \left( \frac{\rho_0}{a} \ln \frac{\rho_0 + \frac{a}{2}}{\rho_0 - \frac{a}{2}} - 1 \right),$$

$$\text{Nach dem Einsetzen der Werte: } I_r = 24 \cdot 6 \cdot 32^2 \left( \frac{32}{24} \ln \frac{32+12}{32-12} - 1 \right) = 7561 \text{ mm}^2.$$

Das Integral kann nicht immer in geschlossener Form angegeben werden. In diesen Fällen muß man den Integranden in einer Reihe entwickeln und danach als Summe von Gliedern einer Potenzfunktion integrieren:

$$f(\eta)\eta^2 = \left[ f(\eta=0) + \eta f'(\eta=0) + \frac{\eta^2}{2!} f''(\eta=0) + \frac{\eta^3}{3!} f'''(\eta=0) + \dots \right] \eta^2.$$

Die  $n$ -te Ableitung der Funktion  $f(\eta) = \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta}$  an der Stelle  $\eta = 0$ :  $f^{(n)}(\eta=0) = n!(-\rho_0)^{-n}$ .

Im Fall einer Näherung vierter Ordnung:

$$\begin{aligned} I_r &= b \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta} \eta^2 d\eta \approx b \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left( 1 - \frac{\eta}{\rho_0} + \frac{\eta^2}{\rho_0^2} - \frac{\eta^3}{\rho_0^3} + \frac{\eta^4}{\rho_0^4} \right) \eta^2 d\eta = \\ &= b \left[ \frac{\eta^3}{3} - \frac{\eta^4}{4\rho_0} + \frac{\eta^5}{5\rho_0^2} - \frac{\eta^6}{6\rho_0^3} + \frac{\eta^7}{7\rho_0^4} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = 2b \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{a}{2} \right)^3 + \frac{1}{5\rho_0^2} \left( \frac{a}{2} \right)^5 + \frac{1}{7\rho_0^4} \left( \frac{a}{2} \right)^7 \right] = \\ &= 12 \left[ \frac{1}{3} 12^3 + \frac{1}{5 \cdot 32^2} 12^5 + \frac{1}{7 \cdot 32^4} 12^7 \right] = 7553,78 \text{ mm}^4. \end{aligned}$$

b) Bestimmung der Normalspannung  $\sigma_\zeta$  in den Punkten  $S$ ,  $P$  und  $Q$  des Querschnittes  $B$ , wenn  $M_0 = 0$  ist:

Regel für die Berechnung gekrümmter Stäbe:

$$\rho_0 / e_{\max} < 3 \square 4 \quad \Rightarrow \quad \text{Verwendung der Grashof'schen-Formel und } I_r.$$

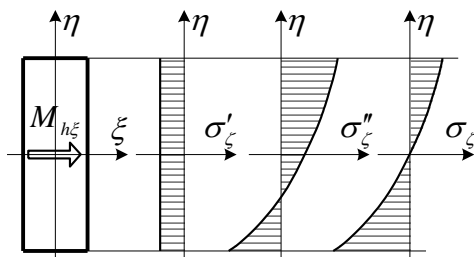
$3 \square 4 < \rho_0 / e_{\max} < 8 \square 10$ ,  $\Rightarrow$  Verwendung der *Grashof'schen-Formel* und  $I_\xi$ .

$8 \square 10 < \rho_0 / e_{\max}$   $\Rightarrow$  Verwendung der Zusammenhänge für gerade Stäbe.

Bei dieser Aufgabe:  $\frac{\rho_0}{e_{\max}} = \frac{R}{e_{\max}} = \frac{300}{40,4} = 7,43 \Rightarrow$  Verwendung der *Grashof'schen-Formel* und  $I_r$ .

Nach der Vorzeichenregel ist die Längskraft positiv (Zugkraft), das Biegemoment positiv und der Krümmungsradius negativ:  $N = F = 3 \cdot 10^3 \text{ N}$ ,  $M_{h\xi} = FR = 96 \text{ Nm}$ ,  $\rho_0 = -32 \text{ mm}$ .

Aus der *Grashof'schen-Formel*:  $\sigma_\zeta(\eta) = \left(\frac{N}{A}\right) + \left(\frac{M_{h\xi}}{AR} + \frac{M_{h\xi}}{I_r} \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta} \eta\right) = \frac{FR}{I_r} \frac{-R}{(-R + \eta)} \eta = \frac{0,4063 \cdot 10^9}{0,032 - \eta} \eta$ .



Spannungen

im Punkt  $S$ :  $\sigma_\zeta(S) = 0$ ,

im Punkt  $P$ :  $\sigma_\zeta(\eta = -0,012) = 243,78 \text{ MPa}$ ,

im Punkt  $Q$ :  $\sigma_\zeta(\eta = 0,012) = -110,81 \text{ MPa}$ ,

- c) Ermittlung des Wertes von  $M_0$  so, dass die Vergleichsspannungen in den Punkten  $P$  und  $Q$  des Querschnittes  $B$  gleich sind:

Nach der Vorzeichenregel ist die Längskraft positiv (Zugkraft), das Biegemoment positiv und der Krümmungsradius negativ:  $N = F = 3 \cdot 10^3 \text{ N}$ ,  $M_{h\xi} = FR + M_0$ ,  $\rho_0 = -32 \text{ mm}$ .

Die *Grashof'sche-Formel*:  $\sigma_\zeta(\eta) = \left(\frac{N}{A}\right) + \left(\frac{M_{h\xi}}{AR} + \frac{M_{h\xi}}{I_r} \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta} \eta\right) = -\frac{M_0}{AR} + \frac{FR + M_0}{I_r} \frac{-R}{(-R + \eta)} \eta$ .

Die Normalspannungen sollen in den Punkten  $P$  und  $Q$  des Querschnittes gleich sein. Man muss also die Lösung der folgenden Gleichung ermitteln

$$\sigma_\zeta(\eta = 0,012) = \sigma_\zeta(\eta = -0,012)$$

$$-\frac{M_0}{AR} + \frac{FR + M_0}{I_r} \frac{-R}{(-R + \eta_Q)} \eta_Q = -\frac{M_0}{AR} + \frac{FR + M_0}{I_r} \frac{-R}{(-R + \eta_P)} \eta_P$$

$$(FR + M_0) \left( \frac{\eta_Q}{R + \eta_Q} \right) = (FR + M_0) \left( \frac{\eta_P}{R + \eta_P} \right),$$

Die obige Gleichung ist nur dann erfüllt, wenn  $(FR + M_0) = 0$ .

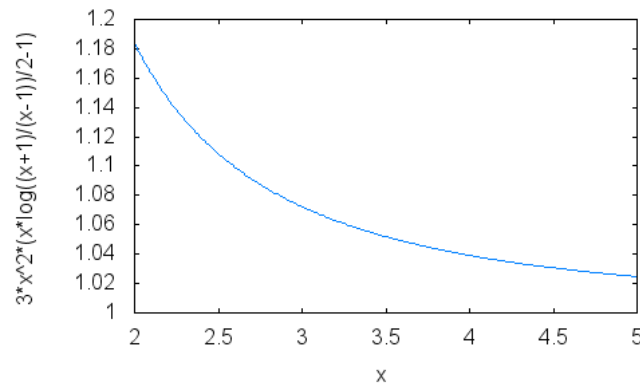
$$FR + M_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_0 = -FR = -96 \text{ Nm}.$$

In diesem Fall besteht die Beanspruchung des Querschnittes ausschließlich aus Zug-Druck, und es ergibt sich eine homogene Spannungsverteilung.

*Bemerkung:*

Wenn man eine neue Veränderliche  $x = \frac{\rho_0}{a/2}$  einführt, kann man den Quotienten  $\frac{I_r}{I_\xi}$  unter Verwendung des

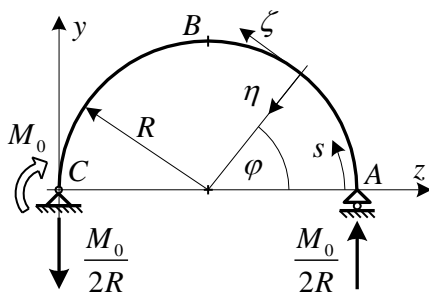
Zusammenhanges  $I_r = ab\rho_0^2 \left( \frac{\rho_0}{a} \ln \frac{\rho_0 + a/2}{\rho_0 - a/2} - 1 \right)$  graphisch darstellen:



Mit der obigen Funktion kann man die Regel für die Berechnung gekrümmter Stäbe einfach erklären / veranschaulichen.

Zum Beispiel, wenn  $\frac{\rho_0}{e_{\max}} = 4$ , dann ist  $\frac{I_r}{I_\xi} = 1,04$ . Dieser Quotient bedeutet, dass der Unterschied zwischen dem reduzierten Flächenträgheitsmoment  $I_r$  und dem Flächenträgheitsmoment  $I_\xi$  nur 4% beträgt, also gilt  $I_r \approx I_\xi$ . Bei schwach gekrümmten Stäben ( $3 \leq 4 < \rho_0 / e_{\max}$ ) ist es nicht notwendig, das reduzierte Flächenträgheitsmoment zu berechnen.

Aufgabe 4.: Schnittgrößen und Spannungsverteilung gekrümmter Stäbe, Sicherheitsnachweis



Gegeben: Ein Halbkreisträger mit dem Radius  $R$  und Kreisquerschnitt. Der Träger ist am Querschnitt A mit einem Moment  $M_0$  belastet.

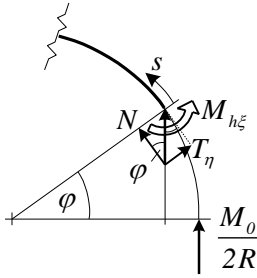
$M_0 = 400 \text{ Nm}$ ,  $R = 60 \text{ mm}$ ,  $\sigma_{zul} = 250 \text{ MPa}$ .

Aufgabe:

- Ermittlung der Schnittgrößen, graphische Darstellung der Schnittgrößenverläufe und Bestimmung der gefährdeten/kritischen Querschnitte.
- Dimensionierung des Trägers nur für die Biegebeanspruchung auf der Grundlage der Theorie für lineare Stäbe.
- Sicherheitsnachweis des Trägers für die Biege- und Zug-Druck-Beanspruchung mit der *Grashofschen*-Formel. Wenn für den Träger keine ausreichende Festigkeit gewährleistet ist, dann wird der Durchmesser vergrößert, bis der Zusammenhang  $\sigma_{V \max} = \sigma_{zul}$  erfüllt wird.

Lösung:

- Ermittlung der Schnittgrößen, graphische Darstellung der Schnittgrößenverläufe und Bestimmung der gefährdeten/kritischen Querschnitte:



Vorzeichenregel:  $\rho_0 < 0$ ;  $M_{h\xi} > 0$

$$N = -\frac{M_0}{2R} \cos \varphi,$$

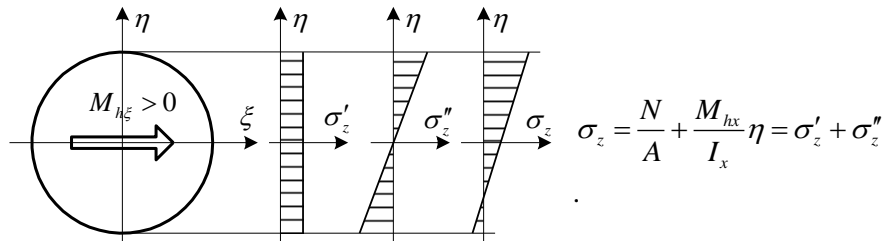
$$T = -\frac{M_0}{2R} \sin \varphi,$$

$$M_{h\xi} = \frac{M_0}{2R} (R - R \cos \varphi),$$

$$M_{h\xi} = \frac{M_0}{2} (1 - \cos \varphi).$$

Der kritische Querschnitt: C.

- b) Dimensionierung des Trägers nur für die Biegebeanspruchung auf der Grundlage der Theorie für lineare Stäbe:



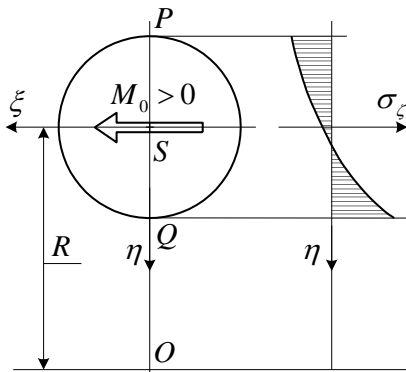
Dimensionierung bezüglich der maximalen Spannung:  $\sigma_z \leq \sigma_{zul}$ .

$$\frac{M_{hx}}{K_x} \leq \sigma_{zul} \Rightarrow \frac{M_{hx}}{\frac{d^3 \pi}{32}} \leq \sigma_{zul} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{32 M_{hx}}{\pi \sigma_{zul}}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 4 \cdot 10^5}{3,14 \cdot 250}} \approx 25,4 \text{ mm}.$$

- c) Sicherheitsnachweis des Trägers für die Biege- und Zug-Druck-Beanspruchung mit der *Grashof'schen*-Formel. Wenn für den Träger keine ausreichende Festigkeit gewährleistet ist, dann wird der Durchmesser vergrößert, bis der Zusammenhang  $\sigma_{Vmax} = \sigma_{zul}$  erfüllt wird.

Sicherheitsnachweis: gekrümmter Stab, Zug-Druck- und Biegebeanspruchung.

$$\sigma_\zeta = \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{A \rho_0} + \frac{M_{hx}}{I_r} \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta}, \text{ wobei nach der Vorzeichenregel: } M_{hx} > 0 \text{ und } \rho_0 < 0.$$



$$A = \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{25,4^2 \cdot 3,1416}{4} = 507 \text{ mm}^2,$$

$$N = \frac{M_0}{2R} = \frac{4 \cdot 10^5}{2 \cdot 60} = 3,333 \text{ kN},$$

$$\sigma_{Zug} = \frac{N}{A} = \frac{3333}{507} = 6,56 \text{ MPa},$$

$$\sigma_0 = \frac{M_0}{A(-R)} = \frac{-400 \cdot 10^3}{507 \cdot 60} = -13,151 \text{ MPa},$$

$$\bar{\sigma}_0 = \sigma_0 + \sigma_{Zug} = -6,56 \text{ MPa}.$$

$$\frac{R}{e_{\max}} = \frac{2R}{d} = \frac{120}{25,4} = 4,73 \Rightarrow 3 \square 4 < \rho_0 / e_{\max} < 8 \square 10 \Rightarrow \text{Grashofsche-Formel und } I_r = I_x .$$

$$I_{\xi} = I_x = \frac{d^4 \pi}{64} = \frac{25,4^4 \cdot 3,1416}{64} = 20\,432 \text{ mm}^4 .$$

$$\sigma_{\zeta}(S) = \bar{\sigma}_0 = -6,56 \text{ MPa} ,$$

$$\sigma_{\zeta}(P) = -6,56 + \frac{4 \cdot 10^5}{20,4 \cdot 10^3} \frac{-60}{-60 + 12,7} (-12,7) = -212,11 \text{ MPa} ,$$

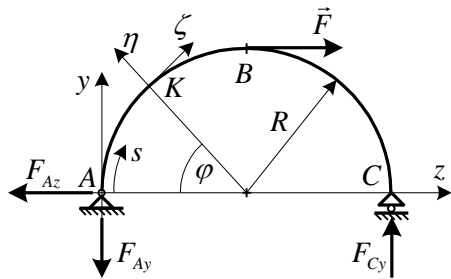
$$\sigma_{\zeta}(Q) = -6,56 + \frac{4 \cdot 10^5}{20,4 \cdot 10^3} \frac{-60}{-60 + 12,7} 12,7 = 309,29 \text{ MPa} .$$

$$\sigma_{\zeta}(Q) = 309,3 \text{ MPa} > \sigma_{zul} = 250 \text{ MPa} .$$

Eine ausreichende Festigkeit des Trägers ist nicht gewährleistet.

Der Durchmesser des Querschnittes muß vergrößert werden! Der Sicherheitsnachweis wird mit einem Durchmesser  $d = 28 \text{ mm}$  erbracht.

#### Aufgabe 5.: Schnittgrößen und Spannungsverteilung gekrümmter Stäbe, Dimensionierung



#### Gegeben:

Ein Halbkreisträger mit dem Radius  $R$  und Kreisquerschnitt. Der Träger ist am Querschnitt  $B$  mit einer Einzelkraft  $\vec{F}$  belastet.

$$F = 7 \text{ kN} , R = 60 \text{ mm} , \sigma_{zul} = 250 \text{ MPa} .$$

#### Aufgabe:

- Ermittlung der Schnittgrößen, graphische Darstellung der Schnittgrößenverläufe und Bestimmung der gefährdeten/kritischen Querschnitte.
- Dimensionierung des Trägers nur für die Biegebeanspruchung auf der Grundlage der Theorie für lineare Stäbe.
- Sicherheitsnachweis des Trägers für die Biege- und Zug-Druck-Beanspruchung mit der *Grashofschen-Formel*. Wenn für den Träger keine ausreichende Festigkeit gewährleistet ist, dann ist der Durchmesser vergrößert, bis der Zusammenhang  $\sigma_{V\max} = \sigma_{zul}$  erfüllt wird.

#### Lösung:

- Ermittlung der Schnittgrößen, graphische Darstellung der Schnittgrößenverläufe und Bestimmung der gefährdeten/kritischen Querschnitte:

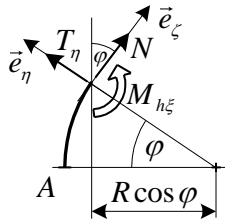
$$\text{Bestimmung der Lagerreaktionen: } F_z = 0 \Rightarrow F_{Az} = -F ,$$

$$M_a = 0 \Rightarrow F_{Cy} = \frac{F}{2} ,$$

$$M_c = 0 \Rightarrow F_{Ay} = -\frac{F}{2} .$$



Schnittgrößen:



Schnittgrößen für die Strecke AB:

$$N = \frac{F}{2} \cos \varphi + F \sin \varphi,$$

$$T_\eta = -\frac{F}{2} \sin \varphi + F \cos \varphi,$$

$$M_{h\xi} = \frac{FR}{2} (1 - \cos \varphi) - FR \sin \varphi.$$

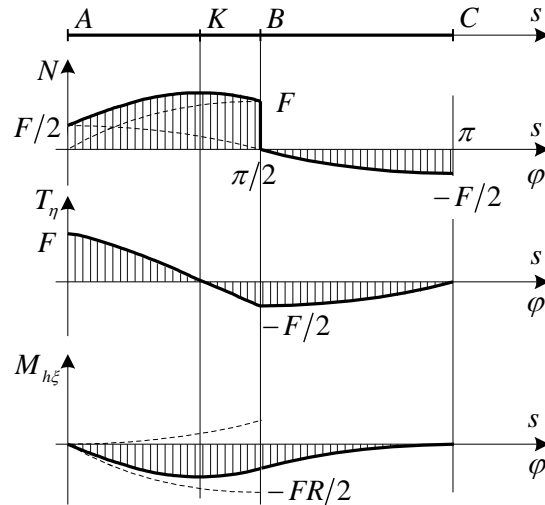
Schnittgrößen für die Strecke BC:

$$N = \frac{F}{2} \cos \varphi,$$

$$T_\eta = -\frac{F}{2} \sin \varphi,$$

$$M_{h\xi} = -\frac{FR}{2} (1 + \cos \varphi).$$

Schnittgrößenverläufe:



Gefährdeter / kritischer Querschnitt:

Am Querschnitt K erreichen die Beträge der Längskraft und des Biegemomentes Maximalwerte. An diesem Querschnitt hat die Querkraft den Wert Null, weil die Querkraft die erste Ableitung des Biegemomentes ist.

$$T = -\frac{F}{2} \sin \varphi + F \cos \varphi = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = 2 \Rightarrow \varphi_K = 63,43^\circ$$

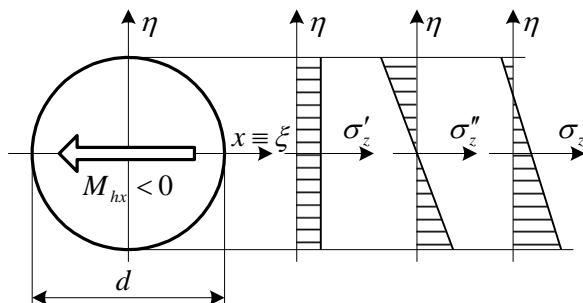
b) Dimensionierung des Trägers nur für die Biegebeanspruchung auf der Grundlage der Theorie für lineare Stäbe:

Die Schnittgrößen am kritischen Querschnitt K ( $\varphi_K = 63,43^\circ$ ):

$$N(K) = \frac{F}{2} \cos 63,43^\circ + F \sin 63,43^\circ = 3500 \cdot 0,4473 + 7000 \cdot 0,8944 = 7826 \text{ N},$$

$$T_\eta(K) = -\frac{F}{2} \sin 63,43^\circ + F \cos 63,43^\circ = 0,$$

$$M_{h\xi}(K) = \frac{FR}{2} (1 - \cos 63,43^\circ) - FR \sin 63,43^\circ = 210(1 - 0,4473) - 420 \cdot 0,8944 = -259,6 \text{ Nm}.$$



$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} \eta = \sigma'_z + \sigma''_z \quad N = 7826 \text{ N}$$

$$M_{hx} = -259,6 \text{ Nm}.$$

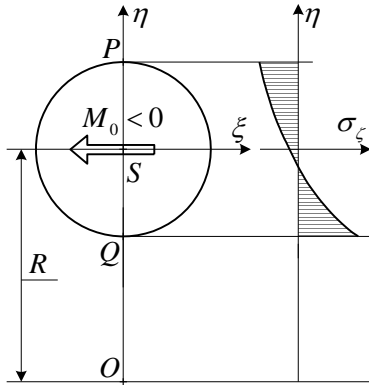
Dimensionierung nur für die Biegebeanspruchung:  $\sigma_z \leq \sigma_{zul}$ .

$$\frac{|M_{hx}|}{K_x} \leq \sigma_{zul} \Rightarrow \frac{|M_{hx}|}{\frac{d^3 \pi}{32}} \leq \sigma_{zul} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{32 |M_{hx}|}{\pi \sigma_{zul}}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 259,6}{3,14 \cdot 250 \cdot 10^6}} \approx 22 \text{ mm}.$$

c) Sicherheitsnachweis des Trägers für die Biege- und Zug-Druck-Beanspruchung mit der *Grashof'schen*-Formel. Wenn für den Träger keine ausreichende Festigkeit gewährleistet ist, dann ist der Durchmesser vergrößert, bis der Zusammenhang  $\sigma_{V \max} = \sigma_{zul}$  erfüllt wird:

Sicherheitsnachweis: Zug-Druck und Biegung, gekrümmter Stab

$$\sigma_{\zeta} = \frac{N}{A} + \frac{M_{h\xi}}{AR} + \frac{M_{h\xi}}{I_r} \frac{R}{R+\eta} \eta, \text{ wobei } N = 7826 \text{ N}, M_h = -259,6 \text{ Nm}, R > 0.$$



$$A = \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{22^2 \cdot 3,1416}{4} = 380 \text{ mm}^2,$$

$$\sigma_{\zeta \text{ húz}} = \frac{N}{A} = \frac{7826}{380} = 20,6 \text{ MPa},$$

$$\sigma_0 = \frac{M_{h\xi}}{AR} = -\frac{259,6}{380 \cdot 10^{-6} \cdot 0,06} = -11,4 \text{ MPa},$$

$$\bar{\sigma}_0 = \sigma_0 + \sigma_{\zeta \text{ húz}} = 9,2 \text{ MPa}.$$

$$\frac{R}{e_{\max}} = \frac{2R}{d} = \frac{120}{22} = 5,45 \Rightarrow 3 \square 4 < \rho_0 / e_{\max} < 8 \square 10 \Rightarrow \text{Grashof'sche-Formel und } I_r \approx I_x.$$

$$I_{\xi} = I_x = \frac{d^4 \pi}{64} = \frac{22^4 \cdot 3,1416}{64} = 11\,499 \text{ mm}^4.$$

Spannungen an den gekennzeichneten Punkten:

$$\sigma_{\zeta}(S) = \bar{\sigma}_0 = 9,2 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{\zeta}(P) = 9,2 \cdot 10^6 + \frac{-259,6}{11499 \cdot 10^{-12}} \frac{60}{60+11} 11 \cdot 10^{-3} = -200,66 \text{ MPa},$$

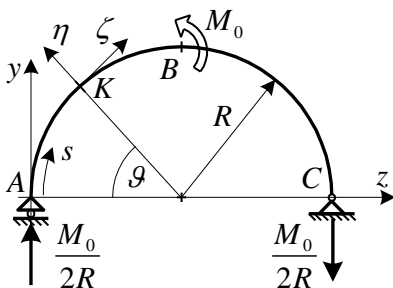
$$\sigma_{\zeta}(Q) = 9,2 \cdot 10^6 + \frac{-259,6}{11499 \cdot 10^{-12}} \frac{60}{60-11} (-11) \cdot 10^{-3} = 313,28 \text{ MPa}.$$

$$\sigma_z(Q) = 313,3 \text{ MPa} > \sigma_{zul} = 250 \text{ MPa}.$$

Eine ausreichende Festigkeit des Trägers ist nicht gewährleistet.

Der Durchmesser des Querschnittes muß vergrößert werden! Der Sicherheitsnachweis wird mit dem Durchmesser  $d = 24 \text{ mm}$  erbracht.

#### Aufgabe 6.: Schnittgrößen und Spannungsverteilung gekrümmter Stäbe, Dimensionierung



Gegeben:

Ein Halbkreisträger mit dem Radius  $R$  und Kreisquerschnitt. Der Träger ist am Querschnitt  $B$  mit einem Moment  $M_0$  belastet.

$$M_0 = 400 \text{ Nm}, R = 60 \text{ mm}, \sigma_{zul} = 290 \text{ MPa}.$$

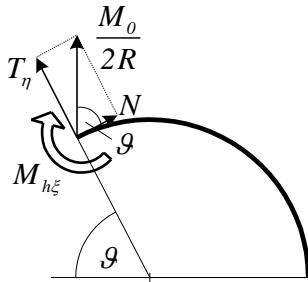
Aufgabe:

a) Ermittlung der Schnittgrößen, graphische Darstellung der Schnittgrößenverläufe und Bestimmung der gefährdeten/kritischen Querschnitte.

- b) Dimensionierung des Trägers nur für die Biegebeanspruchung auf der Grundlage der Theorie für gerade Stäbe.
- c) Sicherheitsnachweis des Trägers für die Biege- und Zug-Druck-Bbeanspruchung mit der *Grashof'schen*-Formel. Wenn für den Träger keine ausreichende Festigkeit gewährleistet ist, dann ist der Durchmesser vergrößert, bis der Zusammenhang  $\sigma_{V \max} = \sigma_{zul}$  erfüllt wird.

Lösung:

- a) Ermittlung der Schnittgrößen, graphische Darstellung der Schnittgrößenverläufe und Bestimmung der gefährdeten/kritischen Querschnitte:

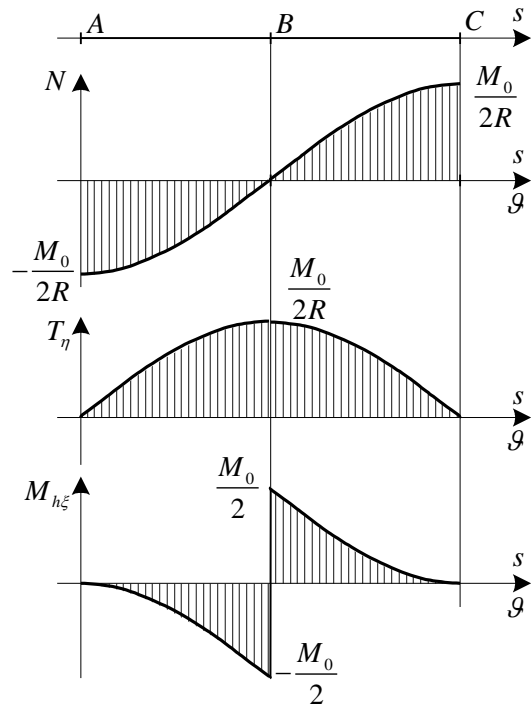


$$N = -\frac{M_0}{2R} \cos \vartheta, \quad T_\eta = \frac{M_0}{2R} \sin \vartheta,$$

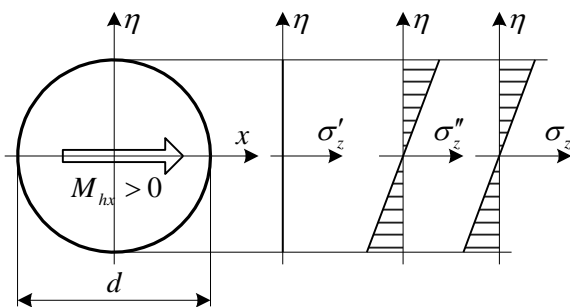
$$\text{Biegemoment für die Strecke AB: } M_{h\xi} = -\frac{M_0}{2R} (R - R \cos \vartheta) = \frac{M_0}{2} (\cos \vartheta - 1).$$

$$\text{Biegemoment für die Strecke BC: } M_{h\xi} = \frac{M_0}{2} (1 + \cos \vartheta).$$

Graphische Darstellung der Schnittgrößenverläufe:



- b) Dimensionierung des Trägers nur für die Biegebeanspruchung auf der Grundlage der Theorie für gerade Stäbe:



Dimensionierung am Querschnitt  $B^+$  (an der rechten Seite des Querschnittes B):

Dimensionierung nur für Biegebeanspruchung:

$$\sigma_z \leq \sigma_{zul} \cdot \quad \sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} \eta = \sigma_z''$$

$$\frac{M_{hx}}{K_x} \leq \sigma_{zul} \Rightarrow \frac{M_{hx}}{\frac{d^3 \pi}{32}} \leq \sigma_{zul} \Rightarrow$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 M_{hx}}{\pi \sigma_{zul}}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 2 \cdot 10^5}{3,14 \cdot 290}} \approx 19,15 \text{ mm}.$$

- c) Sicherheitsnachweis des Trägers für die Biege- und Zug-Druck-Beanspruchung mit der *Grashofschen-Formel*. Wenn für den Träger keine ausreichende Festigkeit gewährleistet ist, dann ist der Durchmesser vergrößert, bis der Zusammenhang  $\sigma_{V_{\max}} = \sigma_{zul}$  erfüllt wird.

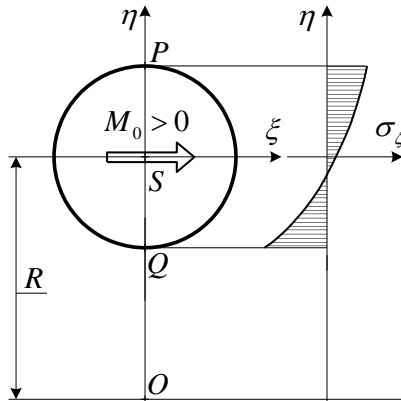
*Sicherheitsnachweis*: gekrümmter Stab, Zug-, Druck- und Biegebeanspruchung am Querschnitt  $B^+$ :

Der Sicherheitsnachweis erfolgt mit einem Durchmesser, der größer ist als der bei der Dimensionierung errechnete:  $d = 20 \text{ mm}$ .

*Grashofsche Formel*:

$$\sigma_{\zeta} = \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{A\rho_0} + \frac{M_{hx}}{I_r} \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta},$$

Nach der Vorzeichenregel:  $\rho_0 = R > 0$ .



$$A = \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{20^2 \cdot 3,1416}{4} = 314 \text{ mm}^2$$

$$N = 0, \quad \sigma_{\zeta \text{ Zug}} = \frac{N}{A} = 0.$$

$$\sigma_0 = \frac{M_{hx}}{A\rho_0} = \frac{M_0}{2AR} = \frac{200}{314 \cdot 10^{-6} \cdot 0,06} = 10,6 \text{ MPa},$$

$$\bar{\sigma}_0 = \sigma_0 + \sigma_{\zeta \text{ Zug}} = 10,6 \text{ MPa}.$$

$$\frac{R}{e_{\max}} = \frac{2R}{d} = \frac{120}{20} = 6 \Rightarrow 3 \square 4 < \rho_0 / e_{\max} < 8 \square 10 \Rightarrow \text{Grashofsche-Formel, } I_r = I_x.$$

$$I_{\zeta} = I_x = \frac{d^4 \pi}{64} = \frac{20^4 \cdot 3,1416}{64} = 7854 \text{ mm}^4.$$

Spannungen in den gegebenen Punkten  $S, P, Q$ :

$$\sigma_{\zeta}(S) = \bar{\sigma}_0 = 10,6 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{\zeta}(P) = 10,6 + \frac{200}{7854 \cdot 10^{-12}} \frac{60}{60+10} (0,01) = 228,9 \text{ MPa},$$

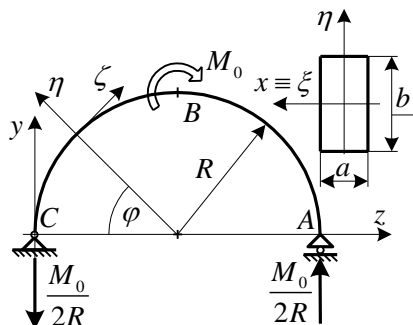
$$\sigma_{\zeta}(Q) = 10,6 + \frac{200}{7854 \cdot 10^{-12}} \frac{60}{60-10} (-0,01) = -295 \text{ MPa}.$$

$$\sigma_V = |\sigma_{\zeta}(Q)| = 295 \text{ MPa} > \sigma_{zul} = 290 \text{ MPa}.$$

Eine ausreichende Festigkeit des Trägers ist nicht gewährleistet.

Der Durchmesser des Querschnittes muß vergrößert werden! Der Sicherheitsnachweis wird mit dem Durchmesser  $d = 21 \text{ mm}$  erbracht.

### Aufgabe 7.: Schnittgrößen und Spannungsverteilung gekrümmter Stäbe, Dimensionierung



Gegeben:

Ein Halbkreisträger mit dem Radius  $R$  und Rechteckquerschnitt. Der Träger ist am Querschnitt  $B$  mit einem Moment  $M_0$  belastet.

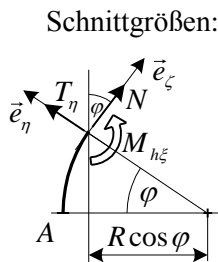
$$R = 50 \text{ mm}, \quad b = 2a, \quad M_0 = 300 \text{ Nm}, \quad \sigma_{zul} = 210 \text{ MPa}.$$

Aufgabe:

- a) Ermittlung der Schnittgrößen, graphische Darstellung der Schnittgrößenverläufe und Bestimmung der gefährdeten/kritischen Querschnitte.
- b) Dimensionierung des Trägers nur für die Biegebeanspruchung auf der Grundlage der Theorie für lineare Stäbe.
- c) Sicherheitsnachweis des Trägers für die Biege- und Zug-Druck-Beanspruchung mit der *Grashof'schen*-Formel. Wenn für den Träger keine ausreichende Festigkeit gewährleistet ist, dann ist der Durchmesser vergrößert, bis der Zusammenhang  $\sigma_{V \max} = \sigma_{zul}$  erfüllt wird.

Lösung:

- a) Ermittlung der Schnittgrößen, graphische Darstellung der Schnittgrößenverläufe und Bestimmung der gefährdeten/kritischen Querschnitte:



Die Längskraft und die Querkraft:

$$N = \frac{M_0}{2R} \cos \varphi, \quad T_\eta = -\frac{M_0}{2R} \sin \varphi.$$

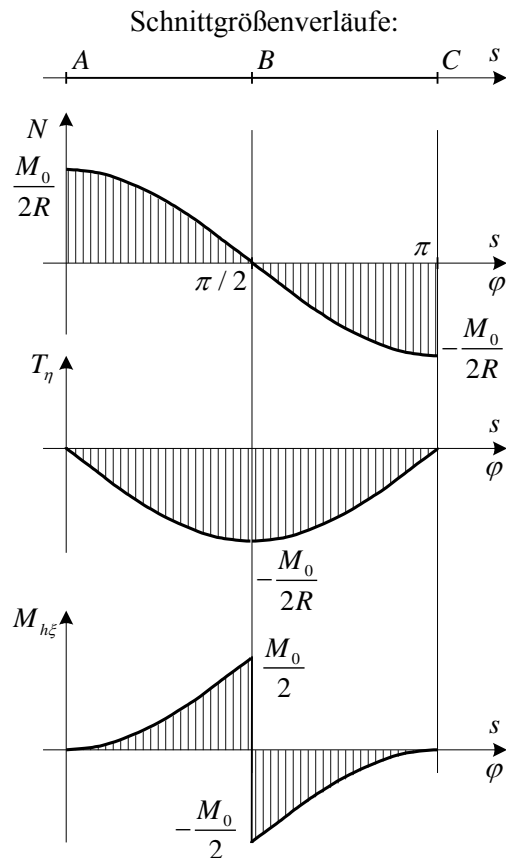
Das Biegemoment in der Strecke AB:

$$M_{h\xi} = \frac{M_0}{2R} (R - R \cos \varphi) = \frac{M_0}{2} (1 - \cos \varphi).$$

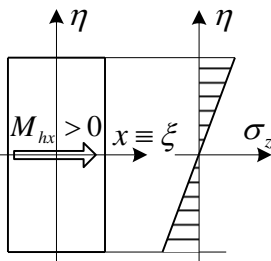
Das Biegemoment in der Strecke BC:

$$M_{h\xi} = -\frac{M_0}{2} (1 + \cos \varphi).$$

Gefährdeter/kritischer Querschnitt:  $B^-$  und  $B^+$ .



- b) Dimensionierung des Trägers nur für die Biegebeanspruchung auf der Grundlage der Theorie für lineare Stäbe:



Dimensionierung am Querschnitt  $B^-$ :

$$\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} \eta.$$

Dimensionierung nur für Biegebeanspruchung:  $\sigma_z \leq \sigma_{zul}$ .

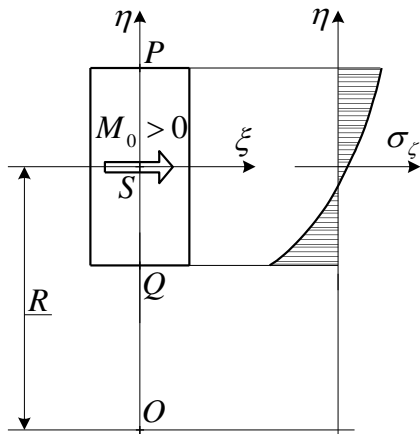
$$\frac{M_{hx}}{K_x} \leq \sigma_{zul} \Rightarrow \frac{M_{hx}}{2a^3} \leq \sigma_{zul} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{3M_{hx}}{2\sigma_{zul}}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 150}{2 \cdot 210 \cdot 10^6}} \approx 10,2 \text{ mm}.$$

- c) Sicherheitsnachweis des Trägers für die Biege- und Zug-Druck-Beanspruchung mit der *Grashofschen*-Formel. Wenn für den Träger keine ausreichende Festigkeit gewährleistet ist, dann ist der Durchmesser vergrößert, bis der Zusammenhang  $\sigma_{V \max} = \sigma_{zul}$  erfüllt wird:

*Sicherheitsnachweis:* gekrümmter Stab, Zug-, Druck- und Biegebeanspruchung am Querschnitt  $B^-$ :

Der Sicherheitsnachweis wird mit größeren Abmessungen vorgenommen, als man bei der Dimensionierung erhielt:  $a = 11 \text{ mm}$ ,  $b = 22 \text{ mm}$ .

$$\sigma_{\zeta} = \frac{N}{A} + \frac{M_{h\xi}}{A\rho_0} + \frac{M_{h\xi}}{I_r} \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta} \eta. \quad \text{Aus der Vorzeichenregel: } \rho_0 = R > 0.$$



$$A = ab = 11 \cdot 22 = 242 \text{ mm}^2$$

$$N = 0, \quad \sigma_{\zeta \text{ Zug}} = \frac{N}{A} = 0$$

$$\sigma_0 = \frac{M_{h\xi}}{A\rho_0} = \frac{M_0}{2AR},$$

$$\sigma_0 = \frac{150}{242 \cdot 10^{-6} \cdot 0,05} = 12,4 \text{ MPa}.$$

$$\bar{\sigma}_0 = \sigma_0 + \sigma_{\zeta \text{ Zug}} = 12,4 \text{ MPa}.$$

$$\frac{R}{e_{\max}} = \frac{R}{a} = \frac{50}{11} = 4,55 \quad \Rightarrow \quad 3 \square 4 < \rho_0 / e_{\max} < 8 \square 10 : \text{Grashofsche-Formel, } I_r = I_x.$$

$$I_{\xi} = I_x = \frac{a \cdot (2a)^3}{12} = \frac{11 \cdot 22^3}{12} = 9761 \text{ mm}^4.$$

$$\sigma_{\zeta}(S) = \bar{\sigma}_0 = 12,4 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{\zeta}(P) = 12,4 + \frac{150}{9761 \cdot 10^{-12}} \frac{50}{50 + 13} (0,013) = 171 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{\zeta}(Q) = 12,4 + \frac{150}{9761 \cdot 10^{-12}} \frac{50}{50 - 13} (-0,013) = -257,6 \text{ MPa}.$$

$$\sigma_V = |\sigma_{\zeta}(Q)| = 257,6 \text{ MPa} > \sigma_{zul} = 210 \text{ MPa}.$$

Eine ausreichende Festigkeit des Trägers ist nicht gewährleistet.

Der Durchmesser des Querschnittes muß vergrößert werden! Der Sicherheitsnachweis wird mit den Abmessungen  $a = 12 \text{ mm}$ ,  $b = 24 \text{ mm}$  erbracht.