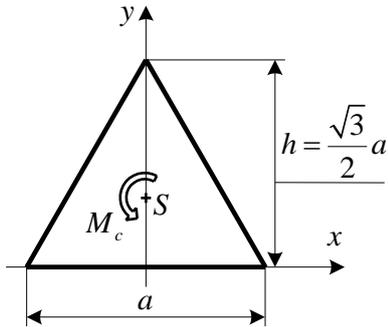


ÜBUNG 5.: REINE TORSION

Aufgabe 1.: Reine Torsion eines prismatischen Stabes mit Dreieckquerschnitt



Gegeben:

Der gleichseitige Dreieckquerschnitt eines prismatischen Stabes mit reiner Torsionsbeanspruchung M_c .

Die Spannungsfunktion $U = U(x, y)$ des Querschnittes wird in der folgenden Form vorgegeben:

$$U = \frac{y}{2h} \left[(y-h)^2 - 3x^2 \right] G\vartheta.$$

Aufgabe:

- Untersuchung, ob die gegebene Spannungsfunktion die Randbedingungen und die *Poissonsche*-Gleichung befriedigt.
- Ermittlung des Spannungszustandes und der Spannungsverteilung.
- Kontrolle der Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen.
- Berechnung des Torsionsträgheitsmomentes des Querschnittes.

Lösung:

- Untersuchung, ob die gegebene Spannungsfunktion die Randbedingungen und die *Poissonsche*-Gleichung befriedigt:

Die Spannungsfunktion muss mindestens oft stetig differenzierbar sein und muss an der Konturkurve des Querschnittes gleich Null sein.

Die Potenzfunktionen sind immer genügend vielmal stetig differenzierbar – die erste Bedingung ist also erfüllt.

Randbedingungen:

- An der Dreieckseite $y=0$ (Grundseite):

$$y=0 \Rightarrow U = \frac{y}{2h} \left[(y-h)^2 - 3x^2 \right] G\vartheta = 0.$$

- An der Seite $y = -\sqrt{3}x + h$ (rechte Seite):

$$y = -\sqrt{3}x + h \Rightarrow U = \frac{-\sqrt{3}x + h}{2h} \left[(-\sqrt{3}x + h - h)^2 - 3x^2 \right] G\vartheta = 0.$$

- An der Seite $y = \sqrt{3}x + h$ (linke Seite):

$$y = \sqrt{3}x + h \Rightarrow U = \frac{\sqrt{3}x + h}{2h} \left[(\sqrt{3}x + h - h)^2 - 3x^2 \right] G\vartheta = 0.$$

Die *Poissonsche*-Gleichung: $\Delta U = -2G\vartheta$.

Bildung der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = G\vartheta \frac{-6xy}{2h} = \frac{-3G\vartheta}{h} xy, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{-3G\vartheta}{h} y,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{G\vartheta}{2h} (y^3 - 2hy^2 + h^2y - 3x^2y) \right] = \frac{G\vartheta}{2h} (3y^2 - 4hy + h^2 - 3x^2),$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{G\vartheta}{2h} (3y^2 - 4hy + h^2 - 3x^2) \right] = \frac{G\vartheta}{h} (3y - 2h).$$

Nach Einsetzen in die *Poissonsche* -Gleichung: $\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial y^2} = \frac{-3G\vartheta}{h}y + \frac{G\vartheta}{h}(3y - 2h) = -2G\vartheta$.

Die *Poissonsche*-Gleichung ist erfüllt.

b) Ermittlung des Spannungszustandes und der Spannungsverteilung:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{G\vartheta}{2h}(3y^2 - 4hy + h^2 - 3x^2), \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{3G\vartheta}{h}xy.$$

Spannungsverteilung entlang der Achse x ($y=0$): $\tau_{xz} = \frac{G\vartheta}{2h}(h^2 - 3x^2)$, $\tau_{yz} = 0$.

Spannungsverteilung entlang der Achse y ($x=0$): $\tau_{xz} = \frac{G\vartheta}{2h}(3y^2 - 4hy + h^2)$, $\tau_{yz} = 0$.

Spannungsverteilung entlang der linken Dreieckseite: ($y = \sqrt{3}x + h$):

$$\tau_{xz} = \frac{G\vartheta}{h}\sqrt{3}x(\sqrt{3}x + h), \quad \tau_{yz} = \frac{3G\vartheta}{h}x(\sqrt{3}x + h).$$

Der Vektor der Schubspannung:

$$\vec{\tau}_z = \tau_{xz}\vec{e}_x + \tau_{yz}\vec{e}_y = \frac{G\vartheta}{h}\sqrt{3}x(\sqrt{3}x + h)\vec{e}_x + \frac{3G\vartheta}{h}x(\sqrt{3}x + h)\vec{e}_y.$$

Man kann nachweisen (durch eine skalare Multiplikation mit dem Normalenvektor, der senkrecht auf der Dreieckseite steht), dass die Schubspannung zur Dreieckseite parallel verläuft (ihre auf der Seite senkrecht stehende Komponente ist gleich Null).

$$\vec{n} \cdot \vec{\tau}_z = (-\sqrt{3}\vec{e}_x + \vec{e}_y) \cdot \left[\frac{G\vartheta}{h}\sqrt{3}x(\sqrt{3}x + h)\vec{e}_x + \frac{3G\vartheta}{h}x(\sqrt{3}x + h)\vec{e}_y \right] = 0 \Rightarrow \tau_{\eta z} = 0.$$

$$\tau_{\xi z} = |\vec{\tau}_z| = \sqrt{(\tau_{xz})^2 + (\tau_{yz})^2} = -\frac{G\vartheta}{h}2\sqrt{3}x(\sqrt{3}x + h).$$

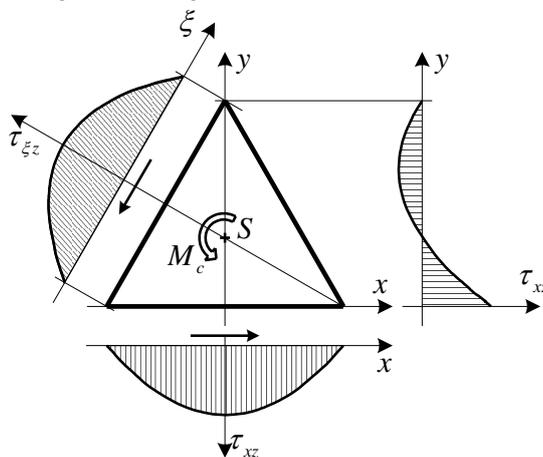
Das negative Vorzeichen weist hier darauf hin, dass die Richtung der Schubspannung $\tau_{\xi z}$ zur ξ -Achse entgegengesetzt ist.

Eingeführt wird eine neue Veränderliche $\xi = 2x + \frac{h}{\sqrt{3}}$:

$$|\vec{\tau}| = -\frac{G\vartheta}{h}2\sqrt{3}\left(\frac{\xi}{2} - \frac{h}{2\sqrt{3}}\right)\left[\sqrt{3}\left(\frac{\xi}{2} - \frac{h}{2\sqrt{3}}\right) + h\right] = \frac{G\vartheta}{2h}(h^2 - 3\xi^2).$$

Man erhält dieselbe Funktion, wie bei der Spannungsverteilung entlang der x -Achse.

Grafische Darstellung der Spannungsverteilungen:



c) Kontrolle der Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen:

Gleichgewichtsbedingungen: $\underline{\underline{F}}\nabla + \vec{q} = \vec{0}$, wobei:
$$\left[\underline{\underline{F}} \right]_{xyz} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{q} = \vec{0}.$$

Skalare Gleichungen:
$$\left. \begin{aligned} 0 + 0 + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ 0 + 0 + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + 0 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Die Komponenten des Spannungstensors hängen nicht von der Veränderliche z ab, deshalb werden die ersten zwei Gleichungen offensichtlich erfüllt.

Nach der Definition der Spannungsfunktion: $\tau_{xz} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial U}{\partial x}.$

Nach dem Einsetzen in die dritte Gleichung: $\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0.$

Diese Gleichung ist immer erfüllt, wenn die Spannungsfunktion mindestens zweimal stetig differenzierbar ist.

d) Berechnung des Torsionsträgheitsmomentes des Querschnittes:

$$M_c = 2 \int_{(A)} U \, dA = 4 \int_{x=0}^{\frac{a}{2}} \int_{y=0}^{-\sqrt{3x+h}} \frac{y}{2h} \left[(y-h)^2 - 3x^2 \right] G \vartheta \, dy \, dx$$

Es wird ausgenutzt, dass die Spannungsfunktion zur y -Achse symmetrisch ist: $U(-x) = U(x).$

So muss man das Integral nur für eine Seite des Querschnittes (z.B. die rechte Seite) berechnen und das Ergebnis dann mit zwei multiplizieren. Das Torsionsmoment:

$$M_c = 4 \int_{x=0}^{\frac{a}{2}} \int_{y=0}^{-\sqrt{3x+h}} \frac{y}{2h} \left[(y-h)^2 - 3x^2 \right] G \vartheta \, dy \, dx.$$

Zuerst erfolgt die Integration nach y , weil der Integrationsbereich von x abhängt.

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^{-\sqrt{3x+h}} y \left[(y-h)^2 - 3x^2 \right] dy &= \left[\frac{y^4}{4} - 2h \frac{y^3}{3} + h^2 \frac{y^2}{2} - 3 \frac{y^2}{2} x^2 \right]_{y=0}^{-\sqrt{3x+h}} = \\ &= -\frac{3}{4} x^4 + \sqrt{3} h x^3 - h^2 x^2 + \frac{1}{12} h^4. \end{aligned}$$

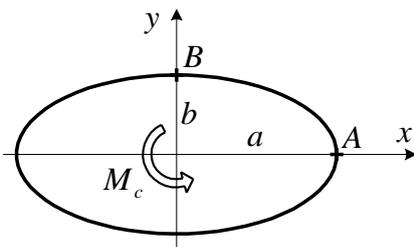
Danach muss man noch nach x integrieren:

$$M_c = \frac{2G\vartheta}{h} \int_0^{\frac{a}{2}} \left(-\frac{3}{4} x^4 + \sqrt{3} h x^3 - h^2 x^2 + \frac{1}{12} h^4 \right) dx = G\vartheta \frac{7}{160\sqrt{3}} a^4$$

Berücksichtigt man den Zusammenhang $M_c = I_c G \vartheta$, erhält man das Torsionsträgheitsmoment zu:

$$I_c = \frac{7}{160\sqrt{3}} a^4.$$

Aufgabe 2.: Reine Torsion eines prismatischen Stabes mit Ellipsenquerschnitt



Gegeben:

Ein Ellipsenquerschnitt mit reiner Torsionsbeanspruchung M_c .

Die *Prandtl'sche*-Spannungsfunktion $U = U(x, y)$ des Querschnittes wird in der folgender Form angenommen:

$$U = C \left[1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right].$$

Aufgabe:

- Ermittlung des Koeffizienten C der Spannungsfunktion.
- Berechnung des Torsionsträgheitsmomentes I_c des Querschnittes.
- Bestimmung des Spannungs- und Verschiebungszustandes.

Lösung:

- Ermittlung des Koeffizienten C der Spannungsfunktion:

Die Spannungsfunktion muss sowohl die Randbedingungen als auch die *Poissonsche*-Gleichung befriedigen.

Randbedingungen: in den rechteckigen Klammern steht die Ellipsengleichung, deshalb sind die Randbedingungen erfüllt.

Die *Poissonsche* -Gleichung: $\Delta U = -2G\vartheta$:

Die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = C \frac{-2x}{a^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = C \frac{-2}{a^2},$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = C \frac{-2y}{b^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = C \frac{-2}{b^2}.$$

Einsetzen in die *Poissonsche*-Gleichung: $\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -2C \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = -2G\vartheta \Rightarrow C = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} G\vartheta.$

- Berechnung des Torsionsträgheitsmomentes I_c des Querschnittes:

Das Torsionsmoment: $M_c = 2 \int_{(A)} U dA = 2 \int_{(A)} C \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dA.$

Zur Berechnung des Integrals führt man eine Transformation aus:

$$\frac{x}{a} = \lambda \cos \varphi; \quad \frac{y}{b} = \lambda \sin \varphi \Rightarrow U = C \left(1 - \lambda^2 \cos^2 \varphi - \lambda^2 \sin^2 \varphi \right) = C \left(1 - \lambda^2 \right)$$

Die *Jacobische*-Determinante der Transformation:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\lambda, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos \varphi & -a \lambda \sin \varphi \\ b \sin \varphi & b \lambda \cos \varphi \end{vmatrix} = ab \lambda \cos^2 \varphi + ab \lambda \sin^2 \varphi = ab \lambda.$$

Berechnung des Integrals:

$$M_c = 2 \int_{(A)} U dA = 2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\lambda=0}^1 C \left(1 - \lambda^2 \right) ab \lambda d\lambda d\varphi = 2abC2\pi \left[\frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^4}{4} \right]_0^1 = ab\pi C,$$

$$M_c = \pi \left(\frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \right) G\vartheta.$$

Das Torsionsträgheitsmoment des Querschnittes: $I_c = \pi \left(\frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \right)$.

c) Bestimmung des Spannungs- und Verschiebungszustandes:

Der Spannungszustand:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{2C}{b^2} y = -\left(\frac{2a^2}{a^2 + b^2} G \vartheta \right) y \\ \tau_{yz} &= -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2C}{a^2} x = \left(\frac{2b^2}{a^2 + b^2} G \vartheta \right) x \end{aligned} \right\} \text{Die Spannungsverteilung ist linear.}$$

Ermittlung des gefährdeten / kritischen Querschnittspunktes:

Es gibt keine Normalspannung. Der kritische Punkt ergibt sich aus dem maximalen Wert der Schubspannung:

$$|\vec{\tau}_z|^2 = \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = \left(\frac{2G\vartheta}{a^2 + b^2} \right)^2 (b^4 x^2 + a^4 y^2).$$

Dieser Ausdruck hat Extremwerte in den Punkten $x=0, y=b$, beziehungsweise $x=a, y=0$ (In diesen Punkten verschwinden die ersten partiellen Ableitungen der Schubspannungsbeträge).

$$\text{Im Punkt A: } \tau_{xz} = 0; \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2C}{a^2} x = \left(\frac{2b^2}{a^2 + b^2} G \vartheta \right) x = b \frac{2abG\vartheta}{a^2 + b^2}.$$

$$\text{Im Punkt B: } \tau_{yz} = 0; \quad \tau_{xz} = \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{2C}{b^2} y = -\left(\frac{2a^2}{a^2 + b^2} G \vartheta \right) y = -a \frac{2abG\vartheta}{a^2 + b^2}.$$

Da $a > b$, ist die Schubspannung im Punkt B größer als im Punkt A.

Der kritische Querschnittspunkt: Punkt B.

$$\text{Die Richtungstangente der Schubspannung: } \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Die Richtungstangente der Konturkurve:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2}}{dx} = \frac{1}{2} \frac{-\frac{b^2}{a^2} \cdot 2x}{\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2}} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Die Schubspannung zeigt in Richtung der Tangente an die Konturkurve des Querschnittes:

$$\text{Der Spannungstensor: } \underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix} = \frac{2G\vartheta}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a^2 y \\ 0 & 0 & b^2 x \\ -a^2 y & b^2 x & 0 \end{bmatrix}.$$

Der Verzerrungszustand:

Den Verzerrungstensor erhält man mit Hilfe des *Hookeschen-Gesetzes*:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{\vartheta}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a^2 y \\ 0 & 0 & b^2 x \\ -a^2 y & b^2 x & 0 \end{bmatrix}.$$

Der Verschiebungszustand:

Die Verschiebungsfelder kann man aus den Verzerrungskenngrößen bestimmen.

In der Hauptdiagonalen stehen Null-Werte:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow u = u(y, z), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow v = v(x, z), \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow w = w(x, y).$$

Das Verschiebungsfeld bei reiner Torsion:

$$\vec{u}(x, y, z) = \vartheta z \vec{e}_z \times \vec{R} + w(x, y) \vec{e}_z, \text{ wobei } \vec{R} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y.$$

$$\vec{u}(x, y, z) = \underbrace{-\vartheta z y \vec{e}_x}_u + \underbrace{\vartheta z x \vec{e}_y}_v + w(x, y) \vec{e}_z.$$

Die kinematischen Gleichungen: $\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{-2a^2 \vartheta y}{a^2 + b^2}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{2b^2 \vartheta x}{a^2 + b^2}.$

Da $\frac{\partial u}{\partial z} = -\vartheta y$ und $\frac{\partial v}{\partial z} = \vartheta x$ sind, gilt

$$-\vartheta y + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{2a^2 \vartheta y}{a^2 + b^2} \Rightarrow w = \vartheta y x \left(1 - \frac{2a^2}{a^2 + b^2} \right) + K(y) = \vartheta y x \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} + K(y),$$

wobei $K(y)$ eine beliebige Funktion der Veränderlichen y ist.

Mit einem ähnlichen Gedankengang:

$$\vartheta x + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{2b^2 \vartheta x}{a^2 + b^2} \rightarrow w = -\vartheta y x \left(1 - \frac{2b^2}{a^2 + b^2} \right) + L(x) = \vartheta y x \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} + L(x),$$

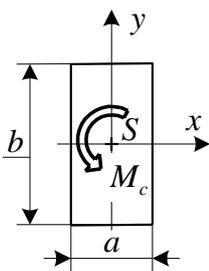
wobei ist $L(x)$ eine beliebige Funktion der Veränderlichen x ist.

Aus dem Vergleich der Ergebnisse: $L(x) = K(y) = \text{konstant}.$

Dieser konstante Wert entspricht einer parallelen Verrückung der Querschnittspunkte (damit beschäftigen wir uns hier nicht weiter).

Das Verschiebungsfeld ist also:
$$\vec{u}(x, y, z) = \underbrace{-\vartheta z y \vec{e}_x}_u + \underbrace{\vartheta z x \vec{e}_y}_v + \underbrace{\vartheta y x \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} \vec{e}_z}_w.$$

Aufgabe 3.: Reine Torsion eines prismatischen Stabes mit Rechteckquerschnitt



Gegeben:

Ein Rechteckquerschnitt mit reiner Torsionsbeanspruchung M_c .

Aufgabe:

- Näherungs- und exakte Konstruktion der *Prandtl'schen*-Spannungsfunktion.
- Veranschaulichung der Spannungsfunktionen.
- Ermittlung der Spannungsverteilungen bei dem Querschnitt und Bestimmung der gefährdeten / kritischen Querschnittspunkte.
- Veranschaulichung der Spannungsverteilungen.

Lösung:

a) Näherungs- und exakte Konstruktion der *Prandtl'schen*-Spannungsfunktion:

Die Spannungsfunktion muß vier Bedingungen befriedigen:

- sie muß mindestens zweimal stetig differenzierbar sein, so sind die gemischten zweiten partiellen Ableitungen gleich, das heißt die Gleichgewichtsbedingung $a \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0$ erfüllt,
- am Querschnittsrand muß sie den Wert Null haben (an den inneren Konturkurven muß sie konstant sein), so ist die Kontur unbelastet,
- das Torsionsmoment läßt sich aus der Spannungsfunktion berechnen,
- sie muß die *Poissonsche*-Gleichung $\Delta U = -2G\vartheta$ befriedigen (das ist die Kompatibilitätsbedingung).

Konstruktion einer Näherungslösung für die Spannungsfunktion:

Anwendung der Gleichungen für die Konturlinien: $U(x, y) = C \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right)$.

Dieser Ausdruck ist genügend oft differenzierbar und befriedigt die Gleichgewichts- und Randbedingungen.

Ermittlung des Koeffizienten C :

$$\tau_{xz} = \frac{\partial U}{\partial y} = C \cdot 2y \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right), \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial U}{\partial x} = -C \cdot 2x \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right),$$

$$M_c = \int_A (-\tau_{xz} y + \tau_{yz} x) dA = C \int_A \left(-\frac{\partial U}{\partial y} y - \frac{\partial U}{\partial x} x \right) dA,$$

$$M_c = -2C \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \left[y^2 \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) + x^2 \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) \right] dx dy = \frac{C}{18} a^3 b^3.$$

Umgeordnet: $C = \frac{18}{a^3 b^3} M_c$.

Die Näherungs-Spannungsfunktion: $U(x, y) = \frac{18}{a^3 b^3} M_c \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right)$.

Diese Spannungsfunktion befriedigt die *Poissonsche*-Gleichung aber nicht:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = C \cdot 2x \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2C \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = C \cdot 2y \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 2C \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right),$$

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 2C \left(y^2 + x^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} \right) \neq \text{áll.}$$

Aus dieser Spannungsfunktion erhält man keine exakten Spannungs-, Verzerrungs- und Verschiebungswerte.

Konstruktion einer exakten Lösung für die Spannungsfunktion:

Wenn man die *Poissonsche*-Gleichung $\Delta U = -2G\vartheta$ homogenisiert, erhält man die *Laplacesche*-Gleichung $\Delta U = 0$.

Lösungen der *Laplaceschen*-Gleichung sind z.B. die folgenden Funktionen: $U_1 = \sinh(x) \sin(y)$, $U_2 = \sinh(x) \cos(y)$, $U_3 = \cosh(x) \sin(y)$ und $U_4 = \cosh(x) \cos(y)$.

Nehmen wir die Funktion $f(x, y) = \cosh(c_1 y) \cos(c_2 x)$.

Wenn $c_1 = \pm c_2$ ist, dann erfüllt diese Funktion die *Laplacesche*-Gleichung:

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cosh(c_1 y) \cos(c_2 x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \cosh(c_1 y) \cos(c_2 x) = (c_1^2 - c_2^2) f(x, y) = 0.$$

Randbedingung für die Spannungsfunktion:

Die Bedingung $f(x, y) = 0$ ist an der Seite $x = \pm \frac{a}{2}$ dann erfüllt, wenn $c_2 = \frac{\pi}{a} k$ ist, wobei k eine ungerade Zahl ist.

Nehmen wir die Funktion $g(x, y) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} C_k \cosh\left(\frac{k\pi}{a} y\right) \cos\left(\frac{k\pi}{a} x\right)$.

Die Funktion erfüllt die *Laplacesche*-Gleichung und die Randbedingungen entlang der senkrechten Seiten des Rechteckquerschnittes. (Diese Funktion ist nicht die allgemeine Lösung der *Laplacesche*-Gleichung, aber man kann beweisen, daß es auch nicht notwendig ist.)

Eine partikuläre Lösung der *Poissonschen*-Gleichung ist schon aus der Näherungslösung bekannt:

$$g'(x, y) = -G\mathcal{G}\left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right).$$

Die exakte Lösung der *Prandtschen*-Spannungsfunktion wird in der folgenden Form gesucht:

$$U(x, y) = G\mathcal{G}\left(\frac{a^2}{4} - x^2\right) + \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} C_k \cosh\left(\frac{k\pi}{a} y\right) \cos\left(\frac{k\pi}{a} x\right).$$

Wenn man die Koeffizienten C_k so wählt, daß die Spannungsfunktion an den waagerechten Querschnittsseiten verschwindet, dann erhält man die exakte Lösung:

Ermittlung der Koeffizienten C_k :

$$\text{Für } y = \pm \frac{b}{2} \text{ gilt } U(x, y) = G\mathcal{G}\left(\frac{a^2}{4} - x^2\right) + \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \underbrace{C_k \cosh\left(\frac{k\pi b}{2a}\right)}_{D_k} \cos\left(\frac{k\pi}{a} x\right) = 0.$$

$$G\mathcal{G}\left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} D_k \cos\left(\frac{k\pi}{a} x\right).$$

Ermittlung der Koeffizienten D_k :

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} G\mathcal{G}\left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right) \cos\left(\frac{k\pi}{a} x\right) dx = D_k \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cos^2\left(\frac{k\pi}{a} x\right) dx.$$

Nach der Durchführung der Integration: $D_k = (-1)^{\frac{k+1}{2}} \frac{8a^2}{\pi^3 k^3} G\mathcal{G}$

Die exakte *Prandtsche*-Spannungsfunktion:

$$U(x, y) = G\mathcal{G}\left(\frac{a^2}{4} - x^2\right) + \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{k+1}{2}} \frac{8a^2}{\pi^3 k^3} \frac{G\mathcal{G}}{\cosh(\pi k b / 2a)} \cosh\left(\frac{k\pi}{a} y\right) \cos\left(\frac{k\pi}{a} x\right).$$

Diese Reihe konvergiert infolge des im Nenner stehenden Faktors k^3 sehr schnell.

Näherung nullten Grades: $U^0(x, y) = G\mathcal{G}\left(\frac{a^2}{4} - x^2\right)$ (sie erfüllt die Randbedingungen nicht).

Näherung ersten Grades: $U^1(x, y) = G\mathcal{G}\left(\frac{a^2}{4} - x^2\right) - \frac{8a^2}{\pi^3} \frac{G\mathcal{G}}{\cosh(\pi b / 2a)} \cosh\left(\frac{\pi}{a} y\right) \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right)$.

b) Veranschaulichung der Spannungsfunktionen:

(Die Veranschaulichung erfolgte mit den Werten $G\mathcal{G} = 1$, $a = 2$, $b = 6$, $C = 1$.)

$$U(x, y) = C \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right).$$

Diese Funktion erfüllt die *Poissonsche*-Gleichung nicht.

Die Randbedingungen sind an allen vier Seiten befriedigt.

$$U^0(x, y) = G\vartheta \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right).$$

Die *Poissonsche*-Gleichung ist erfüllt.

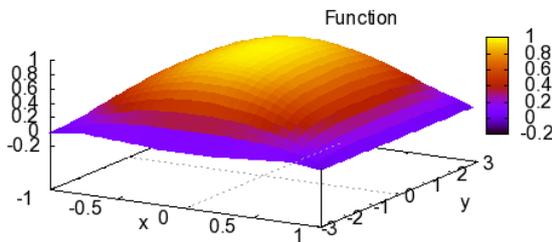
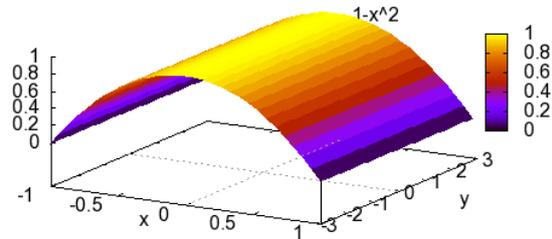
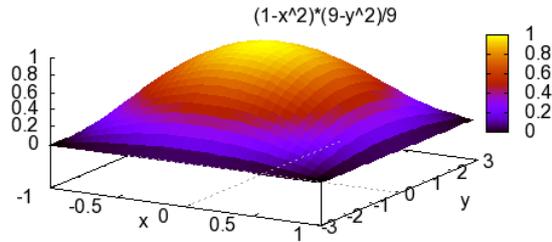
Die Randbedingungen werden nur an den Seiten $x = \pm \frac{a}{2}$ erfüllt.

$$U^1(x, y) = G\vartheta \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right) - \frac{8a^2}{\pi^3} \frac{G\vartheta}{\cosh(\pi b/2a)} \cosh\left(\frac{\pi}{a} y\right) \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right).$$

Die *Poissonsche*-Gleichung ist erfüllt.

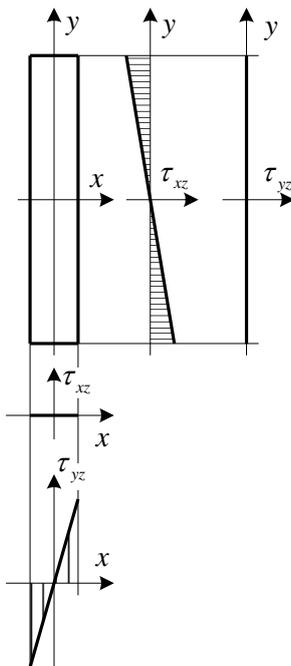
Die Randbedingungen werden an den Seiten $x = \pm \frac{a}{2}$ erfüllt.

Die Randbedingungen werden an den Seiten $y = \pm \frac{b}{2}$ nur näherungsweise erfüllt.



c) Ermittlung der Spannungsverteilungen über den Querschnitt und Bestimmung der gefährdeten / kritischen Querschnittspunkte.

Näherungslösung:



Die Spannungsfunktion: $U(x, y) = C \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right),$

Die Spannungen:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{36}{a^3 b^3} M_c y \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right).$$

Diese Spannung ist entlang der x -Achse gleich Null und entlang der y -Achse

linear: $\tau_{xz}(x=0) = -\frac{9}{ab^3} M_c y.$

Entlang der zur y -Achse parallelen Linien gibt es auch eine lineare Spannungsverteilung, aber die maximale Spannung wird an den von der y -Achse

entfernteren Linien immer kleiner. An den Seiten $x = \pm \frac{a}{2}$ verschwindet diese

Spannungskomponente vollständig.

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{36}{a^3 b^3} M_c x \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right).$$

Diese Verteilung ist gleich Null an der Achse x und linear an der Achse y :

$$\tau_{yz}(y=0) = \frac{9}{a^3 b} M_c x$$

An den mit der Achse x parallelen Linien ist auch eine lineare Spannungsverteilung, aber die maximale Spannung wird an den von der Achse x weiteren Linien immer kleiner. An den Seiten $y = \pm \frac{b}{2}$ verschwindet diese

Gefährdete Punkte sind die Punkte $(\pm a/2; 0)$, wobei die maximale Spannung $\tau_{yz \max} = \pm \frac{9}{2a^2b} M_c$ ist.

Exakte Lösung:

$$U(x, y) = G\vartheta \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right) + \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{k+1}{2}} \frac{8a^2}{\pi^3 k^3} \frac{G\vartheta}{\cosh(\pi kb/2a)} \cosh\left(\frac{k\pi}{a} y\right) \cos\left(\frac{k\pi}{a} x\right),$$

$$\tau_{xz} = \frac{\partial U}{\partial y} = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{k+1}{2}} \frac{8a}{\pi^2 k^2} \frac{G\vartheta}{\cosh(\pi kb/2a)} \sinh\left(\frac{k\pi}{a} y\right) \cos\left(\frac{k\pi}{a} x\right),$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial U}{\partial x} = 2G\vartheta x + \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{k+1}{2}} \frac{8a}{\pi^2 k^2} \frac{G\vartheta}{\cosh(\pi kb/2a)} \cosh\left(\frac{k\pi}{a} y\right) \sin\left(\frac{k\pi}{a} x\right).$$

Näherung nullten Grades: es ergibt sich eine Lösung, die drei Randbedingungen nicht erfüllt.

Näherung ersten Grades: $\tau_{xz}^1 = \frac{8a}{\pi^2} \frac{G\vartheta}{\cosh(\pi b/2a)} \sinh\left(\frac{\pi}{a} y\right) \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right)$.

$$\tau_{yz}^1 = -\frac{\partial U}{\partial x} = 2G\vartheta x + \frac{8a}{\pi^2} \frac{G\vartheta}{\cosh(\pi b/2a)} \cosh\left(\frac{\pi}{a} y\right) \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right).$$

Berechnung des Torsionsmomentes: $M_c = \int_A \vec{r} \times \vec{\tau}_z dA = \int_A x\tau_{yz} dA - \int_A y\tau_{xz} dA$,

$$\int_A x\tau_{yz} dA = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} 2G\vartheta x^2 + \frac{8a}{\pi^2} \frac{G\vartheta}{\cosh(\pi b/2a)} x \cosh\left(\frac{\pi}{a} y\right) \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) dy dx =$$

$$= G\vartheta \frac{a^3 b}{6} + G\vartheta \frac{16a^3}{\pi^5 \cosh(\pi b/2a)} 2a \sinh(\pi b/2a),$$

$$\int_A y\tau_{xz} dA = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{8a}{\pi^2} \frac{G\vartheta}{\cosh(\pi b/2a)} y \sinh\left(\frac{\pi}{a} y\right) \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) dy dx =$$

$$= G\vartheta \frac{16a^3}{\pi^5 \cosh(\pi b/2a)} \left(b\pi \cosh \frac{\pi b}{2a} - 2a \sinh \frac{\pi b}{2a} \right).$$

$$M_c = G\vartheta \left(\frac{a^3 b}{6} + \frac{16a^3 b}{\pi^4} \right).$$

$$M_c = G\vartheta I_c \Rightarrow I_c = a^3 b \left(\frac{1}{6} + \frac{16}{\pi^4} \right) \approx 0,331 a^3 b; \quad \vartheta = \frac{M_c}{Ga^3 b \left(\frac{1}{6} + \frac{16}{\pi^4} \right)}.$$

$$\tau_{xz}^1 = M_c \frac{8}{\pi^2 a^2 b \left(\frac{1}{6} + \frac{16}{\pi^4} \right) \cosh(\pi b/2a)} \sinh\left(\frac{\pi}{a} y\right) \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right);$$

$$\tau_{yz}^1 = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{M_c}{a^3 b \left(\frac{1}{6} + \frac{16}{\pi^4} \right)} \left[2x + \frac{8a}{\pi^2 \cosh(\pi b/2a)} \cosh\left(\frac{\pi}{a} y\right) \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \right]$$

Gefährdete / kritische Querschnittspunkte sind die Eckpunkte mit der Schubspannung:

$$\tau_{yz \max}^1 = \pm \frac{M_c}{a^2 b \left(\frac{1}{6} + \frac{16}{\pi^4} \right)} \left[1 + \frac{8}{\pi^2} \right] \approx 5,47 \frac{M_c}{a^2 b}.$$

d) Veranschaulichung der Spannungsverteilungen:

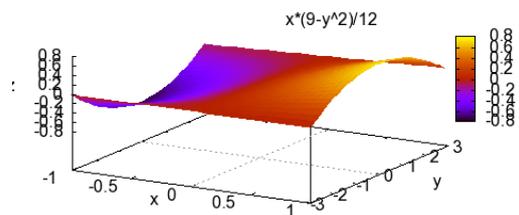
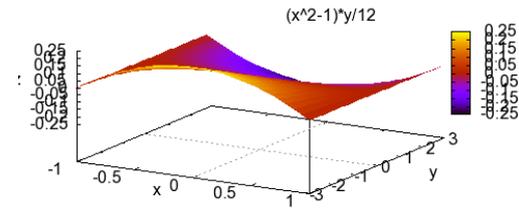
Die Veranschaulichung erfolgte mit den Werten: $M_c = 4$, $a = 2$, $b = 6$.

Näherungslösung:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{36}{a^3 b^3} M_c y \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right)$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{36}{a^3 b^3} M_c x \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right).$$

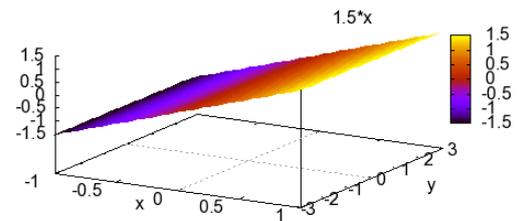
Die *Poissonsche*-Gleichung ist nicht erfüllt.



Näherung nullten Grades an die exakte Lösung:

$$\tau_{xz}^0 = 0, \quad \tau_{yz}^0 = \frac{12 M_c}{a^3 b} x.$$

Die Randbedingung ist nicht erfüllt.

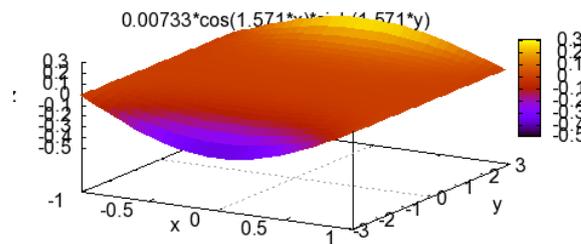


Näherung ersten Grades an die exakte Lösung:

Die *Poissonsche*-Gleichung ist erfüllt, die Randbedingung ist aber nur näherungsweise befriedigt.

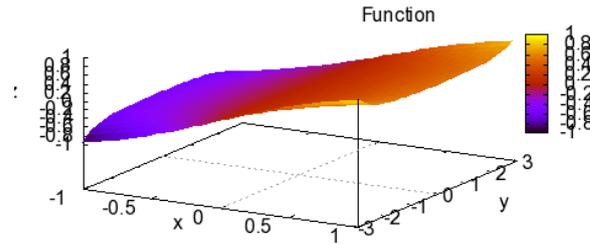
$$\tau_{xz}^1 = M_c \frac{8}{\pi^2 a^2 b \left(\frac{1}{6} + \frac{16}{\pi^4} \right) \cosh(\pi b/2a)} \sinh\left(\frac{\pi}{a} y\right) \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right).$$

$$\tau_{xz}^1(x, y)$$

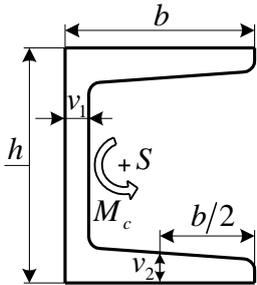


$$\tau_{yz}^1 = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{M_c}{a^3 b \left(\frac{1}{6} + \frac{16}{\pi^4} \right)} \left[2x + \frac{8a}{\pi^2 \cosh(\pi b/2a)} \cosh\left(\frac{\pi}{a} y\right) \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \right]$$

$$\tau_{yz}^1(x, y)$$



Aufgabe.4.: Reine Torsion eines prismatischen Stabes mit offenem dünnwandigem Querschnitt



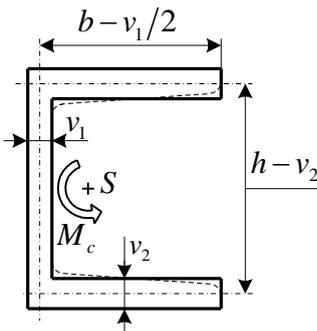
Gegeben:

Abmessungen des Querschnittes von U50 (MSz 326) und das Material des prismatischen Stabes. Die Beanspruchung des Stabes ist reine Torsion.
 $h = 50 \text{ mm}$, $b = 38 \text{ mm}$, $v_1 = 5 \text{ mm}$, $v_2 = 7 \text{ mm}$, $\sigma_{zul} = 150 \text{ MPa}$.

Aufgabe:

- Berechnung des Torsionsträgheitsmomentes I_c des dünnwandigen Querschnittes.
- Bestimmung des maximalen Torsionsmomentes $M_{c \max}$.

Lösung:



Der reale Querschnitt wird mit einem Querschnitt konstanter Wanddicke modelliert.
 Die Aufgabe wird mit Hilfe dieses Modells gelöst.

- Berechnung des Torsionsträgheitsmomentes I_c des dünnwandigen Querschnittes:

$$I_c = \frac{1}{3}(h - v_2)v_1^3 + 2 \cdot \frac{1}{3}\left(b - \frac{v_1}{2}\right)v_2^3, \quad I_c = \frac{1}{3}(50 - 7)5^3 + 2 \cdot \frac{1}{3}\left(38 - \frac{5}{2}\right)7^3 = 9909,3 \text{ mm}^4.$$

- Bestimmung des maximalen Torsionsmomentes $M_{c \max}$:

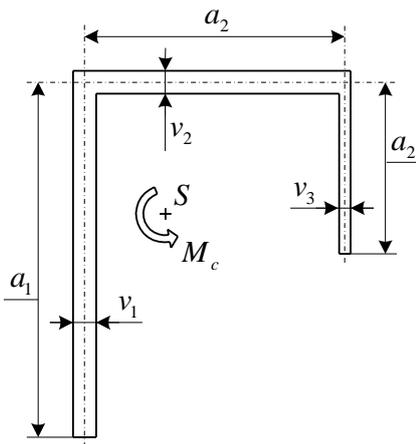
$$\tau_{sz} = \frac{M_c}{I_c} 2\zeta \Rightarrow \tau_{sz \max} = \frac{M_c}{I_c} v_{\max}.$$

Die gefährdeten Punkte des Querschnittes U befindet sich am unteren und oberen waagerechten Teil des Querschnittes, weil $v_2 > v_1$ ist.

$$\sigma_{V \max} (\text{Mohr}) = 2\tau_{sz \max} = \frac{M_{c \max}}{I_c} v_2 \leq \sigma_{zul}.$$

$$M_{c \max} \leq \sigma_{zul} \frac{I_c}{v_2} = 150 \cdot \frac{9909,3}{7} = 212\,342 \text{ Nmm} = 212,342 \text{ Nm}.$$

Aufgabe.5.: Reine Torsion eines prismatischen Stabes mit offenem dünnwandigem Querschnitt



Gegeben:

Abmessungen und Beanspruchung des Querschnittes und das Material des prismatischen Stabes. Die Beanspruchung des Stabes ist reine Torsion.

$a_1 = 200 \text{ mm}$, $a_2 = 150 \text{ mm}$, $a_3 = 100 \text{ mm}$, $v_1 = 10 \text{ mm}$, $v_2 = 10 \text{ mm}$, $v_3 = 5 \text{ mm}$, $G = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$, $M_c = 120 \text{ Nm}$.

Aufgabe:

- Berechnung des Torsionsträgheitsmomentes I_c des dünnwandigen Querschnittes.
- Bestimmung der maximalen Schubspannung τ_{\max} .
- Ermittlung der Drillung / der spezifischen Verdrehung ϑ des Stabes.

Lösung:

- a) Berechnung des Torsionsträgheitsmomentes I_c des dünnwandigen Querschnittes:

$$I_c = \frac{1}{3} a_1 v_1^3 + \frac{1}{3} a_2 v_2^3 + \frac{1}{3} a_3 v_3^3 = \frac{200 \cdot 10^3}{3} + \frac{150 \cdot 10^3}{3} + \frac{100 \cdot 5^3}{3} = 1,208 \cdot 10^5 \text{ mm}^4.$$

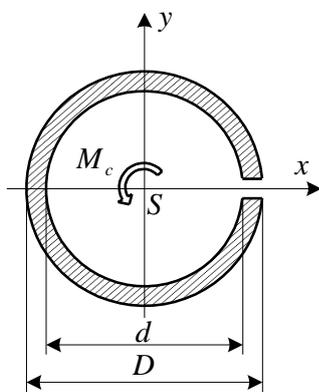
- b) Bestimmung der maximalen Schubspannung τ_{\max} :

$$\tau_{sz \max} = \frac{M_c}{I_c} v_{\max} = \frac{120}{1,208 \cdot 10^5 \cdot 10^{-12}} 10^{-2} = 9,93 \text{ MPa}.$$

- c) Ermittlung der Drillung / spezifische Verdrehung ϑ des Stabes:

$$\vartheta = \frac{M_c}{G I_c} = \frac{120}{8 \cdot 10^{10} \cdot 1,208 \cdot 10^5 \cdot 10^{-12}} = 1,24 \cdot 10^{-2} \text{ rad/m}.$$

Aufgabe 6.: Reine Torsion eines prismatischen Stabes mit offenem Rohrquerschnitt



Gegeben:

Die Abmessungen und die Belastung eines dünnwandigen offenen Rohres: $M_c = 8 \text{ Nm}$, $D = 40 \text{ mm}$, $d = 36 \text{ mm}$, $l = 1 \text{ m}$.

Aufgabe:

- Wie groß muss die Fließgrenze des Rohrmaterials sein, wenn bei der Dimensionierung ein Sicherheitsbeiwert von $n = 1,5$ angewendet wird.
- Ermittlung der Verdrehung ψ zwischen den Stabenden, wenn $G = 80 \cdot 10^9 \text{ Pa}$ ist.

Lösung:

- a) Wie groß muss die Fließgrenze des Rohrmaterials sein, wenn bei der Dimensionierung ein Sicherheitsbeiwert von $n = 1,5$ angewendet wird:

$$d_k = \frac{D+d}{2} = \frac{40+36}{2} = 38 \text{ mm}, \quad v = \frac{D-d}{2} = \frac{40-36}{2} = 2 \text{ mm}.$$

Bei der Berechnung des Torsionsträgheitsmomentes wird der Durchmesser des Mittelkreises d_k benutzt, weil das Aufschneiden des Rohres die Bogenlänge / den Mittelkreisumfang nur in geringem Maße vermindert.

$$I_c = \frac{1}{3} v^3 d_k \pi = \frac{1}{3} 2^3 \cdot 38 \cdot 3,1416 = 318,3 \text{ mm}^4.$$

Die gefährdeten Querschnittspunkte liegen an den inneren und äußeren Oberflächen des Rohres.

$$\tau_{sz \max} = \frac{M_c}{I_c} v = \frac{8}{318,3 \cdot 10^{-12}} 2 \cdot 10^{-3} = 50,3 \text{ MPa} .$$

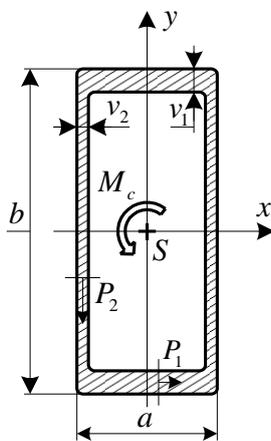
$$\sigma_{V \max} = \begin{cases} 2\tau_{\max} = 100,6 \text{ MPa (Mohr)} \\ \sqrt{3}\tau_{\max} = 87,1 \text{ MPa (HMH)} \end{cases} ,$$

$$R_m = \sigma_F = \begin{cases} n\sigma_{V \max} \text{ (Mohr)} = 1,5 \cdot 100,6 = 150,9 \text{ MPa} \\ n\sigma_{V \max} \text{ (HMH)} = 1,5 \cdot 87,1 = 130,7 \text{ MPa} \end{cases} .$$

b) Ermittlung der Verdrehung ψ zwischen den Stabenden, wenn $G = 80 \cdot 10^9$ Pa ist:

$$\vartheta = \frac{M_c}{I_c G} = \frac{8}{318,3 \cdot 10^{-12} \cdot 80 \cdot 10^9} = 0,314 \frac{\text{rad}}{\text{m}} , \quad \psi = \frac{M_c}{I_c G} l = \vartheta l = 0,314 \cdot 1 = 0,314 \text{ rad} = 18^\circ .$$

Aufgabe 7.: Reine Torsion eines prismatischen Stabes mit geschlossenem dünnwandigem Rechteckquerschnitt



Gegeben:

Die Abmessungen und die Belastung eines geschlossenen dünnwandigen Rechteckquerschnittes:

$$M_c = 200 \text{ Nm} , \quad a = 100 \text{ mm} , \quad b = 200 \text{ mm} , \quad v_1 = 10 \text{ mm} , \quad v_2 = 5 \text{ mm} .$$

Aufgabe:

- Ermittlung der Schubspannungen in den Abschnitten P_1 und P_2 .
- Bestimmung der Verdrehung ψ zwischen den Stabenden, wenn $l = 2$ m und $G = 8 \cdot 10^{10}$ Pa sind.

Lösung:

a) Ermittlung der Schubspannungen in den Abschnitten P_1 und P_2 :

$$A_k = (a - v_2)(b - v_1) = 95 \cdot 190 = 18050 \text{ mm}^2 ,$$

$$\tau_{sz}(P_1) = \frac{M_c}{2A_k v_1} = \frac{2 \cdot 10^5}{2 \cdot 18050 \cdot 10} = 0,55 \text{ MPa} ,$$

$$\tau_{sz}(P_2) = \frac{M_c}{2A_k v_2} = \frac{2 \cdot 10^5}{2 \cdot 18050 \cdot 5} = 1,1 \text{ MPa} .$$

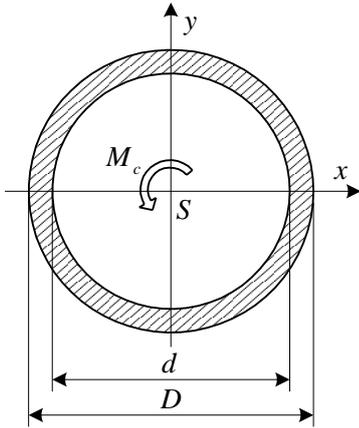
b) Bestimmung der Verdrehung ψ zwischen den Stabenden, wenn $l = 2$ m und $G = 8 \cdot 10^{10}$ Pa sind:

$$\oint \frac{1}{v} ds = 2 \frac{(a - v_2)}{v_1} + 2 \frac{(b - v_1)}{v_2} = \frac{2 \cdot 95}{10} + \frac{2 \cdot 190}{5} = 95 ,$$

$$I_c = \frac{4A_k^2}{\oint \frac{1}{v} ds} = \frac{4 \cdot 18,05^2 \cdot 10^{-6}}{95} = 13,72 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 .$$

$$\psi = \frac{M_c l}{I_c G} = \frac{200 \cdot 2}{13,72 \cdot 10^{-6} \cdot 8 \cdot 10^{10}} = 3,6 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 0,021^\circ .$$

Aufgabe 8.: Reine Torsion eines prismatischen Stabes mit dünnwandigem Rohrquerschnitt



Gegeben:

Das Material, die Länge l , der äußere Durchmesser D und der innere Durchmesser d eines Rohres. Die Beanspruchung des Rohres ist reine Torsion. $D=40\text{ mm}$, $d=30\text{ mm}$, $l=1000\text{ mm}$, $M_c=100\text{ Nm}$, $G=80\text{ GPa}$.

Aufgabe:

- Ermittlung des Torsionsträgheitsmomentes I_c , der Verdrehung zwischen den Rohrenden ψ und der Schubspannung τ_{sz} mittels der *Bredtschen-Formel* (Näherungslösung).
- Vergleich der Ergebnisse mit der exakten Lösung.

Lösung:

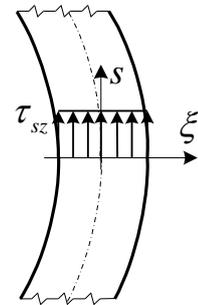
- Ermittlung des Torsionsträgheitsmomentes I_c , der Verdrehung zwischen den Rohrenden ψ und der Schubspannung τ_{sz} mittels der *Bredtschen-Formel* (Näherungslösung):

$$d_k = \frac{D+d}{2} = 35\text{ mm}, \quad v = \frac{D-d}{2} = 5\text{ mm}, \quad A_k = \frac{d_k^2 \pi}{4} = 9,62 \cdot 10^{-4}\text{ m}^2.$$

$$\tau_{sz} = \frac{M_c}{2A_k v} = 10,4\text{ MPa}. \quad \oint \frac{1}{v} ds = \frac{d_k \pi}{v} = \frac{0,035 \cdot 3,141}{0,005} = 21,99,$$

$$I_c = \frac{4A_k^2}{\oint \frac{1}{v} ds} = \frac{4 \cdot 9,62^2 \cdot 10^{-8}}{21,99} = 16,83 \cdot 10^{-8}\text{ m}^4,$$

$$\psi = \frac{M_c l}{I_c G} = \frac{100 \cdot 1}{16,83 \cdot 10^{-8} \cdot 80 \cdot 10^9} = 7,42 \cdot 10^{-3}\text{ rad}.$$



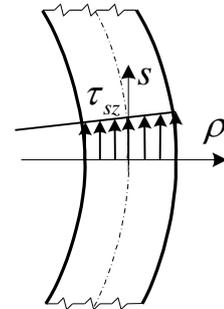
- Vergleich der Ergebnisse mit der exakten Lösung:

Das polare Flächenträgheitsmoment des Kreisringquerschnittes:

$$I_p = \frac{D^4 - d^4}{32} \pi = 1,72 \cdot 10^{-7}\text{ m}^4, \quad \tau_{\varphi z}(\rho) = \frac{M_c}{I_p} \rho,$$

$$\tau_{\varphi z \text{ max}} = \frac{M_c D}{I_p 2} = \frac{100 \cdot 0,02}{1,72 \cdot 10^{-7}} = 11,63\text{ MPa},$$

$$\psi = \frac{M_c l}{I_p G} = \frac{100 \cdot 1}{1,72 \cdot 10^{-7} \cdot 80 \cdot 10^9} = 7,28 \cdot 10^{-3}\text{ rad}.$$



Berechnung des relativen Fehlers des Flächenträgheitsmomentes:

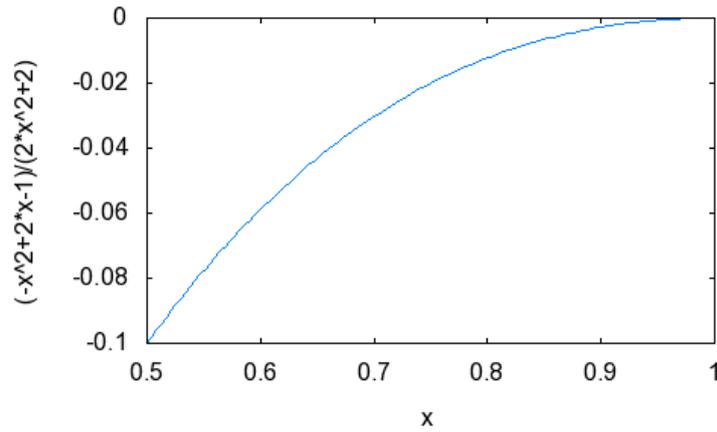
$$I_c = \frac{4A_k^2}{\oint \frac{1}{v} ds} = \frac{4 \left[\left(\frac{D+d}{2} \right)^2 \frac{\pi}{4} \right]^2}{\frac{D+d}{2} \pi / \frac{D-d}{2}} = \frac{(D+d)^3 (D-d) \pi}{64},$$

$$\frac{I_c - I_p}{I_p} = \frac{\frac{(D-d)(D+d)^3}{64} \pi - \frac{D^4 - d^4}{32} \pi}{\frac{D^4 - d^4}{32} \pi} = \frac{(D+d)^2}{2(D^2 + d^2)} - 1.$$

Eingeführt wird eine neue Veränderliche $k = \frac{d}{D}$, die die Wanddicke des Rohres charakterisiert:

$$\frac{I_c - I_p}{I_p} = \frac{1 + 2k + k^2}{2 + 2k^2} - 1 = \frac{2k - 1 - k^2}{2 + 2k^2}.$$

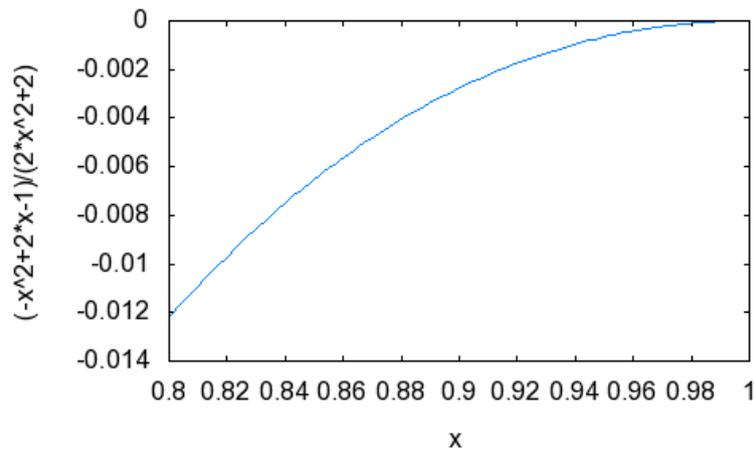
Veranschaulichung des relativen Fehlers:



Wenn das Rohr nicht dünnwandig ist, dann ist die Näherungsformel von *Bredt* nicht genügend genau.

Bei einem dickwandigen Rohr, wenn z.B. $k = 0,5$ ist, beträgt der relative Fehler 10%.

Die Fehlerkurve bei der Vergrößerung von k :



Der relative Fehler beträgt 1 %, wenn das Verhältnis $k=0,82$ ist. Die *Bredtsche*-Formel liefert also eine sehr gute Näherung für reale dünnwandige Rohre.