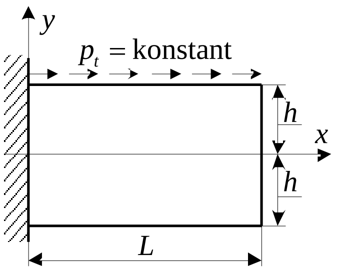
ÜBUNG 6.: 2D AUFGABEN

Aufgabe 1.: Verallgemeinerter ebener Spannungszustand



Gegeben:

Die Abmessungen eines Rechteckbereiches, der sich in einem verallgemeinerten ebenen Spannungszustand befindet, seine Belastung p_t und die *Airysche*-Spannungsfunktion:

$$U(x,y)=\frac{p_t}{4}\left(xy-\frac{xy^2}{h}-\frac{xy^3}{h^2}+\frac{Ly^2}{h}+\frac{Ly^3}{h^2}\right).$$

Aufgabe: Es ist zu entscheiden, ob diese *Airysche*-Spannungsfunktion die exakte Lösung liefert.

Die *Airysche*-Spannungsfunktion muß die folgenden Bedingungen befriedigen:

a) die Gleichgewichtsbedingungen $\underline{\underline{F}}\cdot\nabla+\vec{q}=\vec{0}$,

b) die kinematische Gleichung $\Delta\Delta U(x,y)=0$ und

c) die dynamischen Randbedingungen.

Lösung:

a) Kontrolle, ob die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt werden:

Die skalaren Gleichungen in kartesischen Koordinaten:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+q_x=0,\qquad \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+q_y=0,\qquad q_z=0.$$

Die Komponenten des Spannungstensors:

$$\sigma_x=\frac{\partial^2U}{\partial y^2}=\frac{p_t}{2}\left[\frac{L-x}{h}+\frac{3(L-x)y}{h^2}\right],\quad \sigma_y=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}=0,\quad \tau_{xy}=\tau_{yx}=-\frac{\partial^2U}{\partial y\partial x}=-\frac{p_t}{4}\left[1-\frac{2y}{h}-\frac{3y^2}{h^2}\right].$$

Die Gleichgewichtsbedingungen werden erfüllt:

$$\underbrace{\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}}_{=\frac{p_t}{2}\left(-\frac{1}{h}-\frac{3y}{h^2}\right)}+\underbrace{\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}}_{=-\frac{p_t}{4}\left(-\frac{2}{h}-\frac{6y}{h^2}\right)}+\underbrace{q_x}_{=0}=0,\qquad \underbrace{\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}}_{=0}+\underbrace{\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}}_{=0}+\underbrace{q_y}_{=0}=0.$$

b) Kontrolle, ob die kinematische Gleichung $\Delta\Delta U(x,y)=0$ erfüllt wird:

$$\Delta\Delta U(x,y)=\underbrace{\frac{\partial^4U}{\partial x^4}}_{=0}+2\underbrace{\frac{\partial^4U}{\partial x^2\partial y^2}}_{=0}+\underbrace{\frac{\partial^4U}{\partial y^4}}_{=0}=0.$$ Auch die kinematische Gleichung ist erfüllt.

c) Kontrolle, ob die dynamische Randbedingung erfüllt wird:

Entlang der Linie $x=L$:

$$\vec{p}_x=\underline{\underline{F}}(x=L)\cdot\vec{e}_x=\sigma_x(x=L)\vec{e}_x+\tau_{xy}(x=L)\vec{e}_y=-\frac{p_t}{4}\left[1-\frac{2y}{h}-\frac{3y^2}{h^2}\right]\vec{e}_y=0.$$

Die dynamische Randbedingung ist nur im Fall $y=-h$ und $y=h/3$ erfüllt, das heißt in den Punkten $(L,-h)$ und $(L,h/3)$.

Entlang der Linie $y=h$:

$$\vec{p}_{(+y)} = \underline{\underline{F}}_{(y=+h)} \cdot \vec{e}_y = \tau_{xy\ (y=+h)}\vec{e}_x + \underbrace{\sigma_{y(y=+h)}}_{=0}\vec{e}_y = -\frac{p_t}{4}\left[1-\frac{2y}{h}-\frac{3y^2}{h^2}\right]_{y=h}\vec{e}_x = p_t\vec{e}_x\,.$$

Entlang dieser Linie ist die dynamische Randbedingung in jedem Punkt erfüllt.

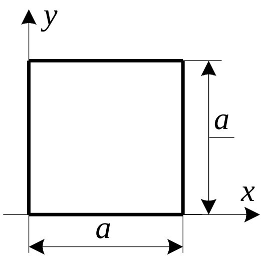
Entlang der Linie $y=-h$:

$$\vec{p}_{(-y)} = \underline{\underline{F}}_{(y=-h)}\left(-\vec{e}_y\right) = -\underbrace{\tau_{xy\ (y=-h)}}_{=0}\vec{e}_x - \underbrace{\sigma_{y\,(y=-h)}}_{=0}\vec{e}_y = \vec{0}\,.$$

Entlang dieser Linie ist die dynamische Randbedingung in jedem Punkt erfüllt.

Die gegebene Spannungsfunktion liefert keine exakte Lösung, weil die dynamische Randbedingung nicht entlang allen Randlinien / nicht in jedem Punkt des Randes erfüllt wird.

Aufgabe 2.: Verallgemeinerter ebener Spannungszustand



Gegeben:

Die Abmessung a einer quadratischen Scheibe und die *Airysche*-Spannungsfunktion: $U(x,y)=\frac{p}{a^2}\left(\frac{x^2y^2}{2}-\frac{y^4}{6}\right)$.

Aufgabe:

a) Ermittlung des Spannungszustandes.

b) Bestimmung und Veranschaulichung der Belastung entlang der Randlinien.

Lösung:

a) Ermittlung des Spannungszustandes:

Der Spannungstensor: $\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Bildung der Spannungskomponenten aus der Spannungsfunktion:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{p}{a^2}\left(x^2-2y^2\right),\quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{p}{a^2}y^2,\qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = -\frac{p}{a^2}2xy\,,$$

b) Bestimmung und Veranschaulichung der Belastung entlang der Randlinien:

Die Belastung kann man aus den dynamischen Randbedingungen berechnen.

Entlang der Seite $x=0$:

$$\vec{p}_{(x=0)} = \underline{\underline{F}}\Big|_{(x=0)}\cdot\left(-\vec{e}_x\right) = -\sigma_x\Big|_{(x=0)}\vec{e}_x - \underbrace{\tau_{xy}\Big|_{(x=0)}}_{=0}\vec{e}_y = \left(\frac{p}{a^2}2y^2\right)\vec{e}_x\,.$$

Entlang der Seite $x=a$:

$$\vec{p}_{(x=a)} = \underline{\underline{F}}\Big|_{(x=a)}\cdot\vec{e}_x = \sigma_x\Big|_{(x=a)}\vec{e}_x + \underbrace{\tau_{xy}\Big|_{(x=a)}}_{=0}\vec{e}_y = \frac{p}{a^2}\left(a^2-2y^2\right)\vec{e}_x - \left(\frac{p}{a}2y\right)\vec{e}_y\,.$$

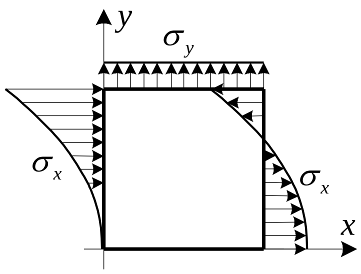
Entlang der Seite $y=0$:

$$\vec{p}_{(y=0)} = \underline{\underline{F}}\Big|_{(y=0)}\cdot\left(-\vec{e}_y\right) = -\underbrace{\sigma_y\Big|_{(y=0)}}_{=0}\vec{e}_y - \underbrace{\tau_{yx}\Big|_{(y=0)}}_{=0}\vec{e}_x = \vec{0}\,.$$

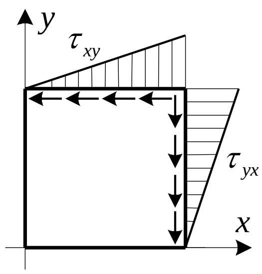
Entlang der Seite $y=a$:

$$\vec{p}_{(y=a)} = \underline{\underline{F}}\Big|_{(y=a)}\cdot\left(\vec{e}_y\right) = \sigma_y\Big|_{(y=a)}\vec{e}_y + \tau_{yx}\Big|_{(y=a)}\vec{e}_x = -\left(\frac{p}{a}2x\right)\vec{e}_x + \left(p\right)\vec{e}_y\,.$$

Veranschaulichung der Linienbelastung:

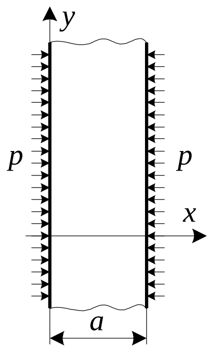


Belastung in der Normalenrichtung



Belastung in der tangentialen Richtung

Aufgabe 3.: Verallgemeinerter ebener Spannungszustand



Gegeben:

Ein in der y-Richtung unendlich langer Scheibenstreifen und seine Belastung p. Die Belastung liegt in der Mittelebene. Das Problem kann deshalb als eine Aufgabe zum verallgemeinerten ebenen Spannungszustand betrachtet werden.

Aufgabe:

a) Konstruktion der *Airyschen*-Spannungsfunktion.

b) Bestimmung des Spannungszustandes der Scheibe.

c) Bestimmung des Verzerrungszustandes.

Lösung:

a) Konstruktion der *Airyschen*-Spannungsfunktion:

Die Spannungsfunktion muß drei Bedingungen befriedigen:

- Sie muß die biharmonische Differentialgleichung $\Delta\Delta U = 0$ befriedigen (diese Gleichung folgt aus den Kompatibilitätsbedingungen).
- Die aus der Spannungsfunktion abgeleiteten Spannungskomponenten müssen die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen.
- Die aus der Spannungsfunktion abgeleiteten Spannungskomponenten müssen auch die dynamischen Randbedingungen erfüllen.

Die erste Anforderung ist sicher erfüllt, wenn die Funktion ein Polynom von höchstens dritten Grades ist.

Die zweite Anforderung ist automatisch erfüllt, wenn die Spannungskomponenten in folgender Weise definiert sind:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

Erfüllung der dritten Anforderung:

Die dynamischen Randbedingungen: $\sigma_x(x=0) = \sigma_x(x=a) = -p$ und $\tau_{xy}(x=0) = \tau_{xy}(x=a) = 0$.

Da die Spannungskomponente σ_x die zweite Ableitung der Spannungsfunktion nach y ist, ist die einfachste Spannungsfunktion, die die Randbedingung erfüllt $U(x,y) = -py^2$.

Nach Einsetzen erhält man $\tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \equiv 0$, das heißt die Randbedingung ist erfüllt: $\tau_{xy}(x=0) = 0$, $\tau_{xy}(x=a) = 0$.

Die *Airysche*-Spannungsfunktion ist also: $U(x,y) = -py^2$.

b) Bestimmung des Spannungszustandes der Scheibe:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -p\,,\qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0\,,\qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left[\underline{\underline{F}}\right] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

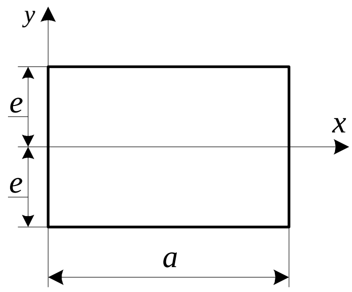
Wir haben einen einachsigen Spannungszustand erhalten.

c) Bestimmung des Verzerrungszustandes:

Bei einem einachsigen Spannungszustand kann man das einfache *Hookesche*-Gesetz anwenden:

$$\left[\underline{\underline{A}}\right] = \begin{bmatrix} -p/E & 0 & 0 \\ 0 & \nu p/E & 0 \\ 0 & 0 & \nu p/E \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 4.: Ebener Verzerrungszustand



Gegeben:

Die Abmessungen a und e eines Rechteckbereiches, der einem ebenen Verzerrungszustand unterworfen ist. Die Spannungsfunktion $U(x,y) = Ax^5 + Bx^3y^2$ ist bekannt.

Aufgabe:

a) Bestimmung des Zusammenhanges zwischen den Konstanten A und B, wenn die Spannungsfunktion U eine biharmonische Funktion ist.

b) Bestimmung der Spannungskomponenten $\sigma_x(x,y); \sigma_y(x,y); \sigma_z(x,y)$ und $\tau_{yx}(x,y)$.

c) Veranschaulichung der Spannungsverteilungen σ_y und τ_{xy}, bzw. σ_x und τ_{yx} entlang der Seiten $z = 0,\ y = -e,$ bzw. $z=0,\ x=a$, wenn $A > 0$ ist.

d) Berechnung der Flächenbelastung in den Punkten $Q_1\left(\frac{a}{2}, -e, 0\right)$ und $Q_2\left(a, \frac{e}{2}, 0\right)$.

Lösung:

a) Bestimmung des Zusammenhanges zwischen den Konstanten A und B, wenn die Spannungsfunktion U eine biharmonische Funktion ist:

Eine biharmonische Funktion liegt vor, wenn die biharmonische Differentialgleichung erfüllt ist.

$\Delta\Delta U = 0$.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)U = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)U = 0\,.$$

Bildung der Ableitungen:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 5Ax^4 + 3By^2x^2\,, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 2Bx^3y\,,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 20Ax^3 + 6By^2x\,, \qquad \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0\,,$$

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = 60Ax^2 + 6By^2\,, \qquad \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial y} = 12Byx\,,$$

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} = 120Ax\,, \qquad \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} = 12Bx\,.$$

Nach Einsetzen: $\quad 120Ax + 2\cdot 12Bx + 0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B = -5A$.

b) Bestimmung der Spannungskomponenten $\sigma_x(x,y); \sigma_y(x,y); \sigma_z(x,y)$ und $\tau_{yx}(x,y)$:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 2Bx^3, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 20Ax^3 + 6By^2x,$$

$$\sigma_z = \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = \nu\left[\left(20A + 2B\right)x^3 + 6By^2x\right], \qquad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -6Bx^2y.$$

c) Veranschaulichung der Spannungsverteilungen σ_y und τ_{xy}, bzw. σ_x und τ_{yx} entlang der Seiten $z=0,\ y=-e$, bzw. $z=0,\ x=a$, wenn $A>0$ ist:

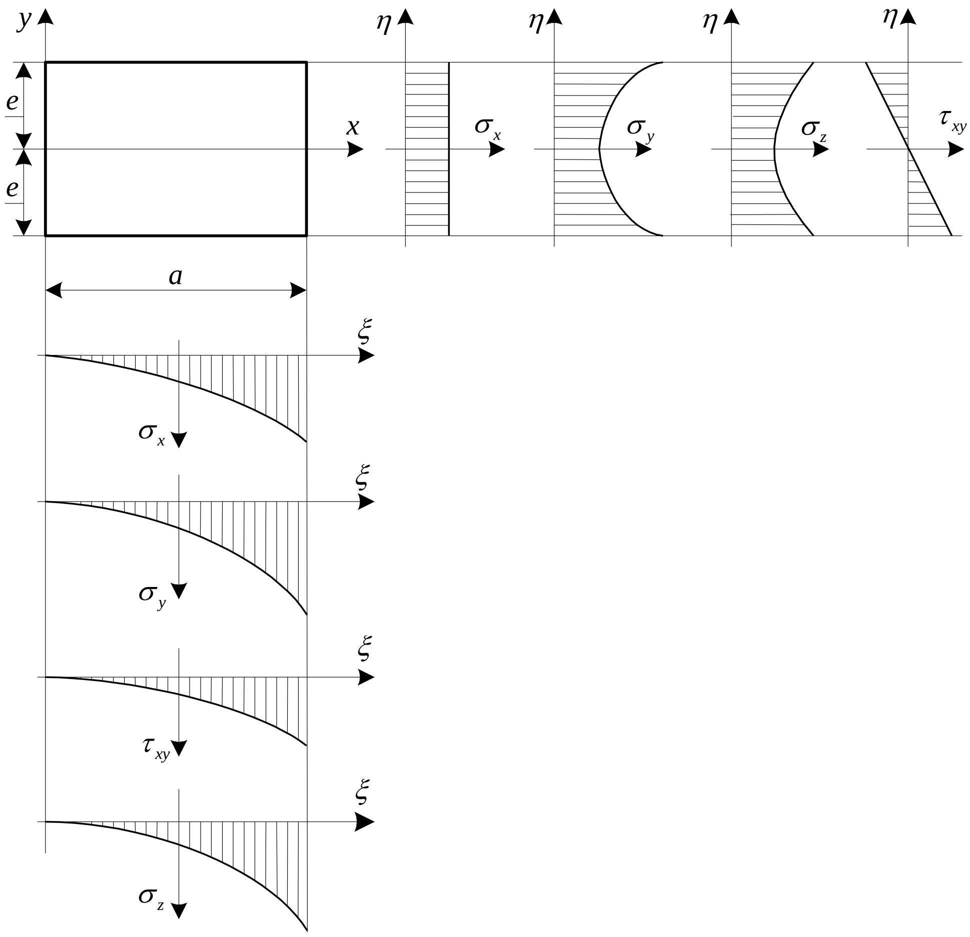
- Seite $y=-e$:

$$\sigma_y = 20Ax^3 + 6Be^2x,\ \ \tau_{xy} = 6Bex^2,\ \ \sigma_z = \nu\left[\left(20A+2B\right)x^3 + 6Be^2x\right].$$

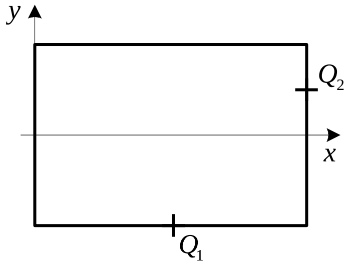
- Seite $x=a$:

$$\sigma_x = 2Ba^3,\ \ \sigma_y = 20Aa^3 + 6Bay^2,\ \ \tau_{xy} = -6Ba^2y,\ \ \sigma_z = \nu\left[\left(20A+2B\right)a^3 + 6Bay^2\right].$$

Veranschaulichung der Spannungsverteilung:



d) Berechnung der Flächenbelastung in den Punkten $Q_1\left(\frac{a}{2}, -e, 0\right)$ und $Q_2\left(a, \frac{e}{2}, 0\right)$:



Der Spannungstensor: $\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}.$

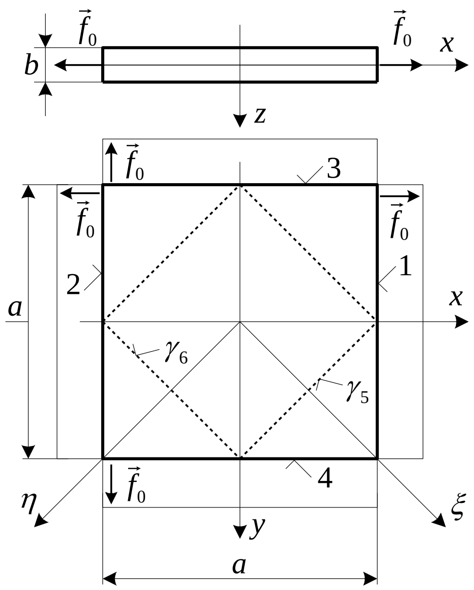
- Der Normaleneinheitsvektor ist $\vec{n} = -\vec{e}_y$ im Punkt $Q_1\left(\frac{a}{2}, -e, 0\right)$:

$$\vec{p}_1 = \underline{\underline{F}}\Big|_{Q_1} \cdot \vec{n} = -\tau_{xy}\vec{e}_x - \sigma_y\vec{e}_y\,, \qquad \tau_{xy} = 6Be\frac{a^2}{4} = \frac{3}{2}Bea^2\,,\ \sigma_y = 20A\frac{a^3}{8}\frac{3}{2} + 6Be^2\frac{a}{2} = \frac{5}{2}Aa^3 + 3Be^2a\,.$$

- Der Normaleneinheitsvektor ist $\vec{n} = \vec{e}_x$ .im Punkt $Q_2\left(a, \frac{e}{2}, 0\right)$:

$$\vec{p}_2 = \underline{\underline{F}}\Big|_{Q_2} \cdot \vec{n} = \sigma_x\vec{e}_x + \tau_{xy}\vec{e}_y\,, \qquad \sigma_x = 2Ba^3\,, \qquad \tau_{xy} = -6\mathrm{B}a^2\frac{e}{2} = -3Ba^2e\,.$$

Aufgabe5.: Verallgemeinerter ebener Spannungszustand



Gegeben:
Die Abmessungen a und b , die Belastung und die *Airysche*-Spannungsfunktion einer quadratischen Scheibe:

$U = \frac{f_0}{2}\left(x^2 + y^2\right)$.

Die Scheibe wird entlang des Umfangs ihrer Mittelfläche durch eine konstante Linienbelastung f_0 belastet.

Aufgabe:
a) Definition der Flächenspannungen.
b) Ermittlung der Matrix des Flächenspannungstensors $\underline{\underline{N}}$ in einem beliebigen Punkt der Mittelfläche.
c) Kontrolle, ob die dynamischen Randbedingungen erfüllt werden.
d) Bestimmung der Flächenspannungskomponenten N_ξ, $N_{\eta\xi}$, bzw. N_η, $N_{\xi\eta}$ entlang der Linien γ_5 und γ_6.

Lösung:

a) Definition der Flächenspannungen.

$$N_x = \int_{(b)} \sigma_x dz = b\bar{\sigma}_x\,,\quad N_y = \int_{(b)} \sigma_y dz = b\bar{\sigma}_y\,,\qquad N_{xy} = N_{yx} = \int_{(b)} \tau_{xy} dz = b\bar{\tau}_{xy}\,.$$

Der Tensor der Flächenspannungen: $\left[\underline{\underline{N}}\right] = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} & 0 \\ N_{yx} & N_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

b) Ermittlung der Matrix des Flächenspannungstensors $\underline{\underline{N}}$ in einem beliebigen Punkt der Mittelfläche:

$$N_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f_0\,,\quad N_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = f_0\,,\quad N_{xy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0\,, \qquad \left[\underline{\underline{N}}\right] = \begin{bmatrix} f_0 & 0 & 0 \\ 0 & f_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) Kontrolle, ob die dynamischen Randbedingungen erfüllt werden:

$$\left.\begin{array}{ll} x = \pm\frac{a}{2} & \underline{\underline{N}} \cdot \left(\pm\vec{e}_x\right) = \pm f_0\vec{e}_x \\ y = \pm\frac{a}{2} & \underline{\underline{N}} \cdot \left(\pm\vec{e}_y\right) = \pm f_0\vec{e}_y \end{array}\right\}$$ Die dynamischen Randbedingungen sind erfüllt.

d) Bestimmung der Flächenspannungskomponenten N_ξ, $N_{\eta\xi}$, bzw. N_η, $N_{\xi\eta}$ entlang der Linien γ_5 und γ_6.

Die Normaleneinheitsvektoren der Linien: $\vec{e}_\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_y$, $\qquad \vec{e}_\eta = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_y$.

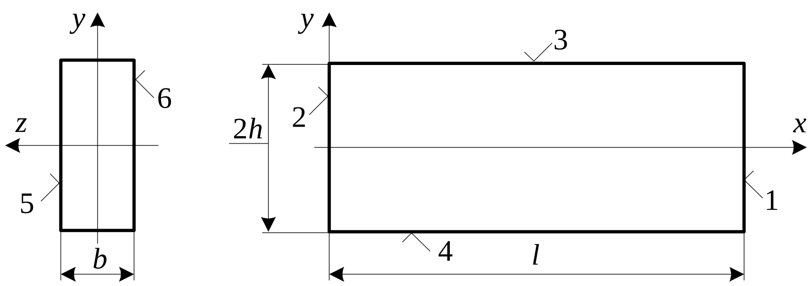
$$\vec{N}_\xi = \underline{\underline{N}} \cdot \vec{e}_\xi = \begin{bmatrix} f_0 & 0 & 0 \\ 0 & f_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} f_0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} f_0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$N_\xi = \vec{e}_\xi \cdot \vec{N}_\xi = \vec{e}_\xi \cdot \underline{\underline{N}} \cdot \vec{e}_\xi = f_0, \qquad N_{\eta\xi} = \vec{e}_\eta \cdot \vec{N}_\xi = \vec{e}_\eta \cdot \underline{\underline{N}} \cdot \vec{e}_\xi = -\frac{f_0}{2} + \frac{f_0}{2} = 0.$$

$$\vec{N}_\eta = \underline{\underline{N}} \cdot \vec{e}_\eta = \begin{bmatrix} f_0 & 0 & 0 \\ 0 & f_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} f_0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} f_0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$N_{\eta\xi} = \vec{e}_\xi \cdot \vec{N}_\xi = -\frac{f_0}{2} + \frac{f_0}{2} = 0.$$

Aufgabe 6.: Ebener Verzerrungszustand



<u>Gegeben</u>:

Die Abmessungen und die *Airysche*-Spannungsfunktion für den ebenen Spannungszustand eines Rechteckgebietes mit der Dicke b:

$$U = \frac{1}{2}Ax^2 + Bxy + \frac{1}{2}Cy^2.$$

<u>Aufgabe</u>:

a) Ermittlung des Spannungstensors $\underline{\underline{F}}$ in einem beliebigen Punkt $P(x,y)$ des Bereiches.

b) Bestimmung der Randbelastungen auf den Randflächen des Bereiches, wenn die Volumenkräfte vernachlässigbar sind: $\vec{q} = \vec{0}$.

<u>Lösung</u>:

a) Ermittlung des Spannungstensors $\underline{\underline{F}}$ in einem beliebigen Punkt $P(x,y)$ des Bereiches:

$$\left[\underline{\underline{F}}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \qquad \sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = C, \; \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = A, \; \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -B.$$

b) Randbelastungen auf den Randflächen des Bereiches, wenn die Volumenkräfte vernachlässigbar sind ($\vec{q} = \vec{0}$):

$$x = 0, l \qquad \vec{n} = \pm\vec{e}_x \qquad \vec{\rho}_x = \pm\sigma_x\vec{e}_x \pm \tau_{xy}\vec{e}_y = \pm C\vec{e}_x \mp B\vec{e}_y,$$

$$x = 0, 2h \qquad \vec{n} = \pm\vec{e}_y \qquad \vec{\rho}_y = \pm\tau_{xy}\vec{e}_x \pm \sigma_y\vec{e}_y = \mp B\vec{e}_x \pm A\vec{e}_y,$$

$$z = \pm\frac{b}{2} \qquad \vec{n} = \pm\vec{e}_z \qquad \vec{\rho}_z = \pm\sigma_z\vec{e}_z = \pm\nu(A+C)\vec{e}_z.$$