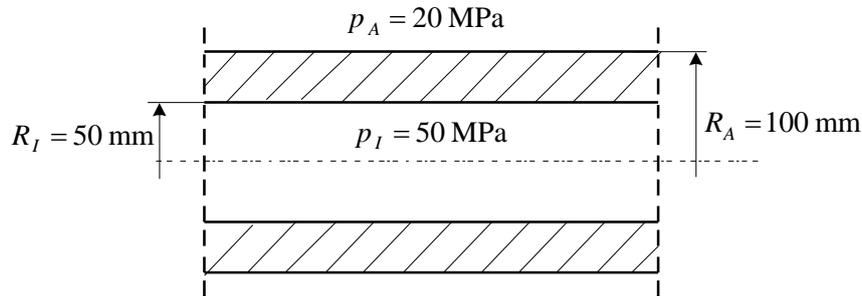


## ÜBUNG 7.: DICKWANDIGE ROHRE

### Aufgabe 1.: Geschlossenes dickwandiges Rohr



**Gegeben:** Die Abmessungen und die Belastung eines geschlossenen dickwandigen Rohres:

$$p_I = 50 \text{ MPa}, \quad p_A = 20 \text{ MPa}, \quad R_I = 50 \text{ mm}, \quad R_A = 100 \text{ mm}.$$

**Aufgabe:** a) Ermittlung des Koeffizienten  $\psi_A$ .

b) Grafische Darstellung der Spannungsverteilung.

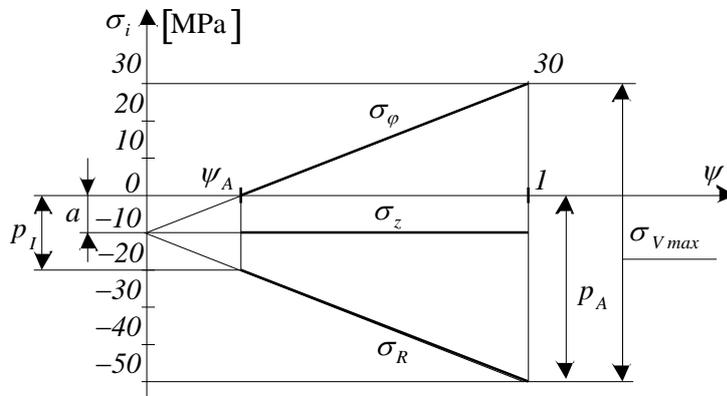
c) Festigkeitsnachweis für das Rohr nach der *Mohrschen*-Theorie, wenn die zulässige Spannung  $\sigma_{zul} = 100 \text{ MPa}$  ist.

d) Bestimmung des Spannungstensors in Zylinder-Koordinaten  $R, \varphi, z$  an der Stelle  $R = R_A$ .

**Lösung:**

a) Ermittlung des Koeffizienten  $\psi_A$ : 
$$\psi = \frac{R_I^2}{R_A^2} \quad \Rightarrow \quad \psi_A = \frac{R_I^2}{R_A^2} = \left(\frac{50}{100}\right)^2 = 0,25.$$

b) Das Spannungsdiagramm:



c) Festigkeitsnachweis für das Rohr nach der *Mohrschen*-Theorie, wenn die zulässige Spannung  $\sigma_{zul} = 100 \text{ MPa}$  ist:

$$\sigma_{V \max}(\text{Mohr}) = 2 \frac{p_I - p_A}{1 - \psi_A} = 2 \frac{50 - 20}{1 - 0,25} = 2 \frac{30}{0,75} = 80 \text{ MPa}.$$

$$\sigma_{V \max} \leq \sigma_{zul}, \quad 80 \text{ MPa} < 100 \text{ MPa}, \quad \text{Eine ausreichende Festigkeit des Rohres ist gewährleistet.}$$

d) Bestimmung des Spannungstensors in Zylinder-Koordinaten  $R, \varphi, z$  an der Stelle  $R = R_A$ :

Aus dem Spannungsdiagramm: 
$$\sigma_R(\psi_A) = -p_A = -20 \text{ MPa},$$

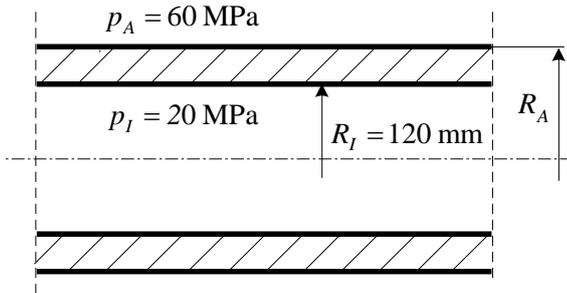
$$\sigma_\varphi(\psi_A) = 2 \frac{p_I - p_A}{1 - \psi_A} \psi_A - p_A = 80 \cdot 0,25 - 20 = 0,$$

$$\sigma_{z \text{ geschl}} = a = \frac{p_I - p_A}{1 - \psi_A} \psi_A - p_A = -10 \text{ MPa}.$$

$$\sigma_{z \text{ geschl}} = \frac{R_I^2 \pi p_I - R_A^2 \pi p_A}{(R_A^2 - R_I^2) \pi} = \frac{R_I^2 p_I - R_A^2 p_A}{R_A^2 - R_I^2} = \frac{\psi_A p_I - p_A}{1 - \psi_A} = \frac{0,25 \cdot 50 - 20}{1 - 0,25} = -10 \text{ MPa.}$$

Die Matrix des Spannungstensors:  $\underline{\underline{F}}(\psi_A) = \begin{bmatrix} \sigma_R & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \Big|_{\psi_A} = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$

**Aufgabe 2.: Geschlossenes und offenes dickwandiges Rohr**



**Gegeben:** Der Innenradius, die Belastung und das Material eines dickwandigen Rohres:

$$p_I = 20 \text{ MPa}, p_A = 60 \text{ MPa}, \\ R_I = 120 \text{ mm}, \sigma_{zul} = 125 \text{ MPa}.$$

**Aufgabe:**

a) Charakteristische Darstellung der Spannungsverteilung.

b) Dimensionierung des Rohres (Bestimmung des Außenradius  $R_A$ ), wenn das Rohr geschlossen ist.

c) Dimensionierung des Rohres (Bestimmung des Außenradius  $R_A$ ), wenn das Rohr offen ist.

**Lösung:**

a) Charakteristische Darstellung der Spannungsverteilung:

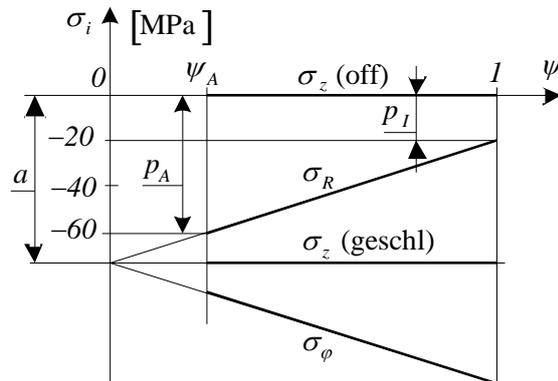
$$\psi = \frac{R_I^2}{R^2},$$

Randbedingungen:

$$R = R_I (\psi = 1) \quad \sigma_R = -p_I = -20 \text{ MPa},$$

$$R = R_A (\psi = \psi_A) \quad \sigma_R = -p_A = -60 \text{ MPa}.$$

Man wählt  $\psi_A$  willkürlich und dieser Wert wird im Diagramm dargestellt.



b) Dimensionierung des geschlossenen Rohres:

$$\sigma_{V \text{ max}} = (\sigma_\varphi - \sigma_R) \Big|_{\psi=1} = 2 \frac{p_A - p_I}{1 - \psi_A} \leq \sigma_{zul} \Rightarrow 2 \frac{p_A - p_I}{\sigma_{zul}} \leq 1 - \psi_A,$$

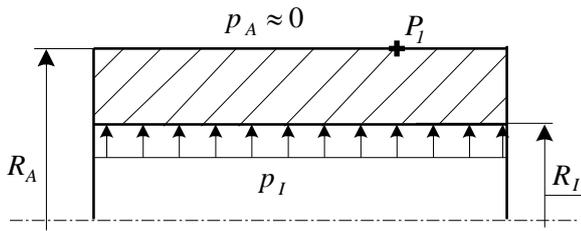
$$\psi_A = \frac{R_I^2}{R_A^2} = 1 - 2 \frac{p_A - p_I}{\sigma_{zul}} = 1 - 2 \frac{40}{125} = 1 - \frac{16}{25} = 0,36, \quad R_A = \frac{R_I}{\sqrt{\psi_A}} = \frac{120 \cdot 5}{3} = 200 \text{ mm}.$$

c) Dimensionierung des offenen Rohres:

$$\sigma_{V \text{ max}} = \sigma_\varphi (\psi = 1) = 2 \frac{p_A - p_I}{1 - \psi_A} + p_I \leq \sigma_{zul},$$

$$\psi_A = \frac{R_I^2}{R_A^2} = 1 - 2 \frac{p_A - p_I}{\sigma_{zul} - p_I} = 1 - 2 \frac{40}{105} = 0,238, \quad R_A = \frac{R_I}{\sqrt{\psi_A}} \cong 246 \text{ mm}.$$

**Aufgabe 3.: Offenes dickwandiges Rohr**



**Gegeben:** Die Abmessungen und die Belastung eines dickwandigen offenen Rohres:  
 $R_I = 200 \text{ mm}$ ,  $R_A = 400 \text{ mm}$ ,  
 $p_A \approx 0$ ,  $p_I = 100 \text{ MPa}$ .

**Aufgabe:** a) Zeichnung des Spannungsdiagrammes.

b) Festigkeitsnachweis für das Rohr nach der *Mohrschen*-Theorie, wenn  $\sigma_{zul} = 210 \text{ MPa}$  ist.

c) Bestimmung der Matrix des Spannungstensors im Punkt  $P_1$ .

**Lösung:**

a) Das Spannungsdiagramm:

$$\psi = \frac{R_I^2}{R^2}, \quad \psi_K = \frac{R_I^2}{R_A^2}, \quad \psi_K = \left(\frac{200}{400}\right)^2 = 0,25.$$

Die Spannungsverteilung:  $\sigma_R = a - b\psi$ ,  $\sigma_\varphi = a + b\psi$ ,  $\sigma_z = 0$ .

Randbedingungen:

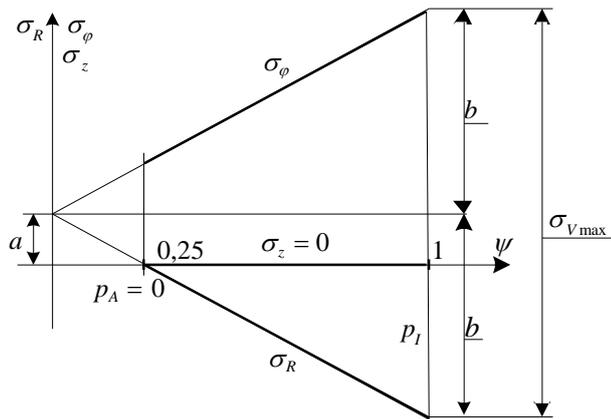
$$\sigma_R(\psi = 1) = -p_I = a - b\psi = a - b,$$

$$\sigma_R(\psi_A = 0,25) = 0 = a - b\psi_A.$$

Die Koeffizienten:

$$a = \psi_A \frac{p_I}{1 - \psi_A} = 0,25 \frac{100}{1 - 0,25} = 33,3,$$

$$b = \frac{p_I}{1 - \psi_A} = \frac{100}{1 - 0,25} = 133,3$$



b) Festigkeitsnachweis für das Rohr nach der *Mohrschen*-Theorie:

$$\sigma_{V \max}(\text{Mohr}) = (\sigma_R - \sigma_\varphi)_{\psi=1}, \quad \sigma_{V \max}(\text{Mohr}) = 2b = 2 \frac{p_I - p_A}{1 - \psi_A} = 2 \frac{100 - 0}{1 - 0,25} = 266,6 \text{ MPa}.$$

$$\sigma_{V \max}(\text{Mohr}) = 266,6 \text{ MPa} > \sigma_{zul} = 210 \text{ MPa}.$$

Eine ausreichende Festigkeit des Rohres ist nicht gewährleistet!

c) Bestimmung der Matrix des Spannungstensors im Punkt  $P_1$ :

$$\psi_I = \frac{R_I^2}{R_I^2} = \frac{R_I^2}{R_A^2} = 0,25$$

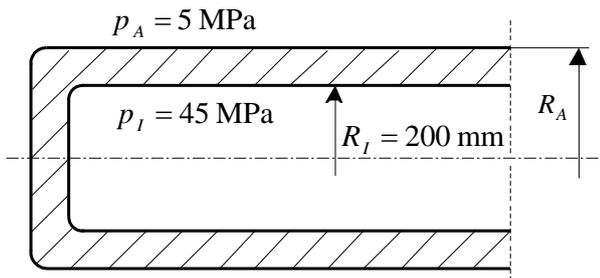
$$\sigma_R(\psi_I) = a - b\psi_I = 33,3 - 133,15 \cdot 0,25 = 0,$$

$$\sigma_\varphi(\psi_I) = a + b\psi_I = 33,3 + 133,15 \cdot 0,25 = 66,6 \text{ MPa},$$

$$\sigma_z(\psi_I) = 0.$$

$$\underline{\underline{[F]_{P_1}}} = \begin{bmatrix} \sigma_R(\psi_I) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi(\psi_I) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 66,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

**Aufgabe 4.: Geschlossenes dickwandiges Rohr**



**Gegeben:** Die Abmessungen und die Belastung eines geschlossenen dickwandigen Rohres:

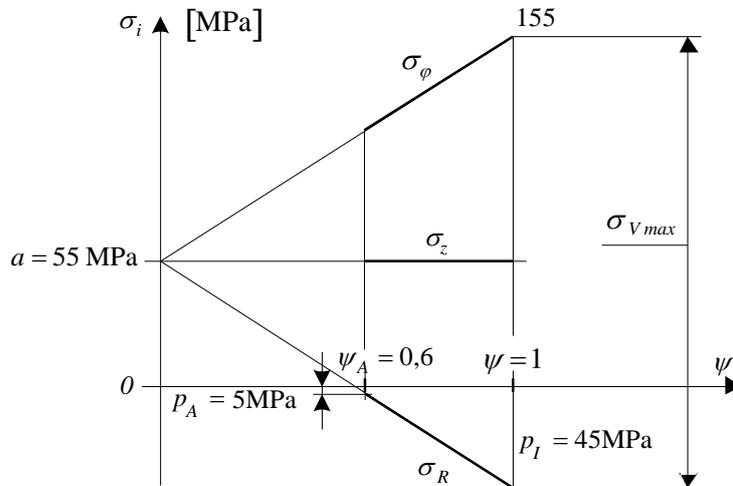
$$p_I = 45 \text{ MPa}, \quad p_A = 5 \text{ MPa}, \\ R_I = 200 \text{ mm}, \quad \psi_A = 0,6.$$

**Aufgabe:**

- Grafische Darstellung der Spannungsverteilung.
- Ermittlung des Außenradius  $R_A$ .
- Berechnung der maximalen Vergleichsspannung nach *Mohr*.
- Bestimmung der Spannungskomponente  $\sigma_z$  im geschlossenen Rohr.

**Lösung:**

a) Das Spannungsdiagramm:



b) Ermittlung des Außenradius  $R_A$ :  $R_A = \frac{R_I \cdot \psi_A}{\sqrt{\psi_A}}, \quad R_A = \frac{200}{\sqrt{0,6}} = 258,198 \text{ mm}.$

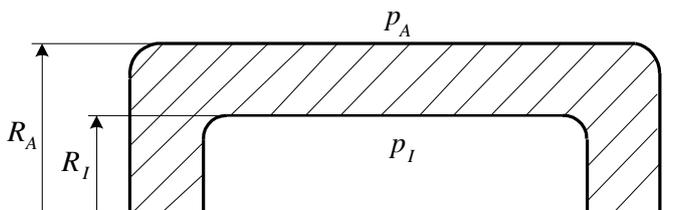
c) Berechnung der maximalen Vergleichsspannung nach *Mohr*:

$$\sigma_{Vmax} (\text{Mohr}) = 2 \frac{p_I - p_A}{1 - \psi_A} = 2 \frac{45 - 5}{1 - 0,6} = 200 \text{ MPa}.$$

d) Bestimmung der Spannungskomponente  $\sigma_z$  im geschlossenen Rohr:

$$\sigma_z = a = \frac{p_I \psi_A - p_A}{1 - \psi_A} = \frac{45 \cdot 0,6 - 5}{1 - 0,6} = \frac{22}{0,4} = 55 \text{ MPa}.$$

**Aufgabe 5.: Geschlossenes dickwandiges Rohr**



**Gegeben:** Die Abmessungen und die Belastung eines geschlossenen Rohres:

$$R_I = 200 \text{ mm}, \quad \psi_A = 0,6, \\ p_A = 5 \text{ MPa}, \quad p_I = 45 \text{ MPa}.$$

- Aufgabe:**
- Bestimmung des Außenradius  $R_A$  des Rohres.
  - Grafische Darstellung der Spannungsverteilung.
  - Ermittlung der Normalspannungskomponente  $\sigma_z$ .

d) Berechnung der maximalen Vergleichsspannung  $\sigma_{V \max}$  nach der *Mohrschen*-Theorie.

Lösung:

a) Bestimmung des Außenradius  $R_A$  des Rohres:

$$\psi_A = \frac{R_I^2}{R_B^2} \Rightarrow R_A = \sqrt{\frac{R_I^2}{\psi_A}}, \quad R_A = \sqrt{\frac{200^2}{0,6}} = 258,2 \text{ mm}$$

b) Grafische Darstellung der Spannungsverteilung:

Spannungskomponenten:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= a - b\psi \\ \sigma_\varphi &= a + b\psi \\ \sigma_z &= a \end{aligned} \right\} \psi_A = \frac{R_I^2}{R_A^2}, \psi = \frac{R_I^2}{R^2}.$$

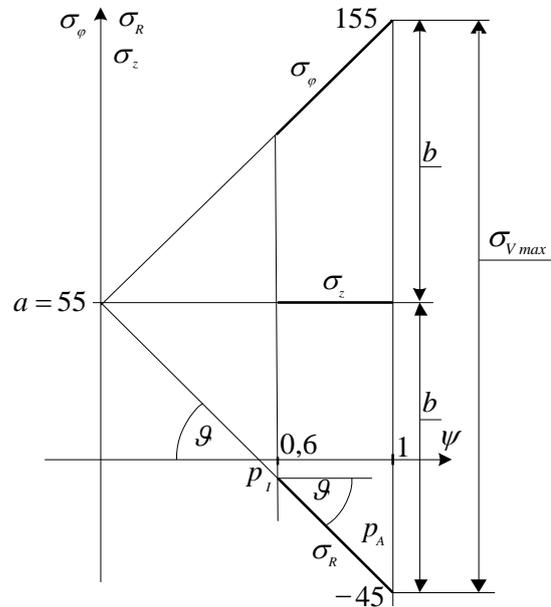
Randbedingungen:

$$\sigma_R(\psi = 1) = -p_I = -45 \text{ MPa},$$

$$\sigma_R(\psi_A) = -p_A = -5 \text{ MPa}.$$

Aus dem Spannungsdiagramm:

$$b = \frac{p_I - p_A}{1 - \psi_A} = \frac{45 - 5}{1 - 0,6} = 100 \text{ MPa}.$$



c) Ermittlung der Normalspannungskomponente  $\sigma_z$ :

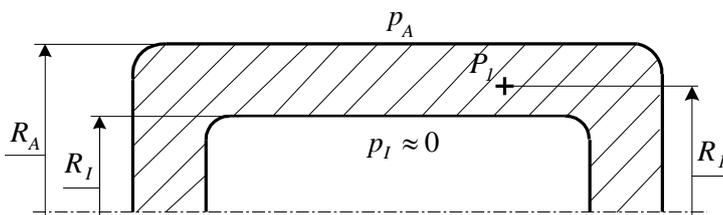
$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{a + p_A}{\psi_A} = \frac{p_I - p_A}{1 - \psi_A} \Rightarrow a = -p_A + \psi_A \frac{p_I - p_A}{1 - \psi_A} = -5 + 0,6 \frac{45 - 5}{1 - 0,6} = 55 \text{ MPa}.$$

$$\sigma_z = a = 55 \text{ MPa}.$$

d) Berechnung der maximalen Vergleichsspannung  $\sigma_{V \max}$  nach der *Mohrschen*-Theorie:

$$\sigma_{V \max} (\text{Mohr}) = 2b = \sigma_\varphi(\psi = 1) - \sigma_R(\psi = 1) = 155 - (-45) = 200 \text{ MPa}.$$

*Aufgabe 6.: Geschlossenes dickwandiges Rohr*



Gegeben: Die Abmessungen und die Belastung eines geschlossenen Rohres:

$$R_I = 200 \text{ mm}, \quad R_I = 220 \text{ mm},$$

$$p_A = 120 \text{ MPa}, \quad p_I \approx 0.$$

Aufgabe: a) Charakteristische Darstellung der Spannungsverteilung.

b) Ermittlung des Außenradius  $R_A$  des Rohres, wenn  $\sigma_{zul} = 250 \text{ MPa}$  ist.

c) Bestimmung der Matrix des Spannungstensors im Punkt  $P_I$ :

Lösung:

a) Charakteristische Darstellung der Spannungsverteilung:

Spannungskomponenten:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= a - b\psi \\ \sigma_\varphi &= a + b\psi \\ \sigma_z &= a \end{aligned} \right\} \psi_A = \frac{R_I^2}{R_A^2}, \quad \psi = \frac{R_I^2}{R^2}.$$

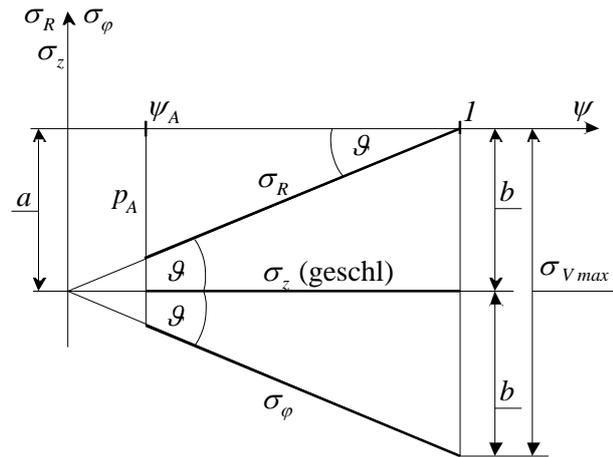
Randbedingungen:

$$\sigma_R(\psi = 1) = 0,$$

$$\sigma_R(\psi_A) = -p_A.$$

Aus dem Diagramm:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{p_A}{1 - \psi_A} = b = a.$$



b) Ermittlung des Außenradius  $R_A$  des Rohres, wenn  $\sigma_{zul} = 250 \text{ MPa}$  ist.

$$\sigma_{V \max} (\text{Mohr}) = (\sigma_R - \sigma_\varphi)_{\psi=1} = 2b = \frac{2p_A}{1 - \psi_A},$$

$$\sigma_{V \max} = \frac{2p_A}{1 - \psi_A} \leq \sigma_{zul}, \quad \Rightarrow \quad \frac{2p_A}{\sigma_{zul}} \leq 1 - \frac{R_I^2}{R_A^2}, \quad R_A \geq \frac{R_I}{\sqrt{1 - \frac{2p_A}{\sigma_{zul}}}} = \frac{200}{\sqrt{1 - \frac{2 \cdot 240}{250}}} = 1000 \text{ mm}.$$

c) Bestimmung der Matrix des Spannungstensors im Punkt  $P_1$ :

$$\psi_1 = \frac{R_I^2}{R_1^2} = \left( \frac{200}{220} \right)^2 = 0,826,$$

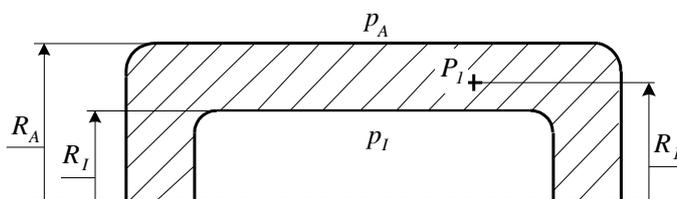
$$\sigma_R(\psi_1) = a(1 - \psi_1) = -\frac{p_A}{1 - \psi_A}(1 - \psi_1) = -\frac{120}{1 - 0,04}(1 - 0,826) = -21,75 \text{ MPa},$$

$$\sigma_\varphi(\psi_1) = a(1 + \psi_1) = -\frac{p_A}{1 - \psi_A}(1 + \psi_1) = -\frac{120}{1 - 0,04}(1 + 0,826) = -228,25 \text{ MPa},$$

$$\sigma_z = a = -\frac{p_A}{1 - \psi_A} = -\frac{120}{1 - 0,04} = -125 \text{ MPa}.$$

$$\underline{\underline{F}}_{P_1} = \begin{bmatrix} \sigma_R(\psi_1) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi(\psi_1) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21,75 & 0 & 0 \\ 0 & -228,25 & 0 \\ 0 & 0 & -125 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

**Aufgabe 7.:** Geschlossenes dickwandiges Rohr



**Gegeben:** Die Abmessungen und die Belastung eines geschlossenen Rohres:

$$R_I = 200 \text{ mm}, \quad R_A = R_1 = 300 \text{ mm},$$

$$p_A = 50 \text{ MPa}, \quad p_I = 100 \text{ MPa}.$$

**Aufgabe:** a) Grafische Darstellung der Spannungsverteilung.

b) Sicherheitsnachweis für das Rohr nach Mohr, wenn  $\sigma_{zul} = 100 \text{ MPa}$  ist.

c) Bestimmung des Spannungszustandes im Punkt  $P_1$ :

**Lösung:**

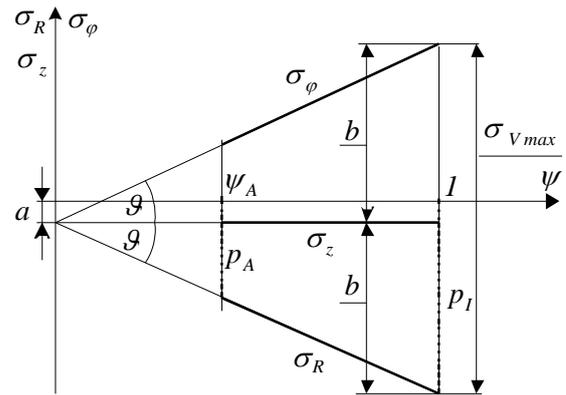
a) Grafische Darstellung des Spannungsverteilung:

$$\psi = \frac{R_I^2}{R^2}, \quad \psi_K = \frac{R_I^2}{R_A^2}, \quad \psi_A = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 0,444$$

$$\text{Spannungskomponenten: } \left. \begin{aligned} \sigma_R &= a - b\psi \\ \sigma_\varphi &= a + b\psi \\ \sigma_z &= a \end{aligned} \right\}$$

Randbedingungen:

$$\sigma_R(\psi = 1) = -p_B, \quad \sigma_R(\psi_A) = -p_A.$$



b) Sicherheitsnachweis für das Rohr nach Mohr, wenn  $\sigma_{zul} = 100 \text{ MPa}$  ist.

$$\sigma_{V \max}(\text{Mohr}) = (\sigma_R - \sigma_\varphi)_{\psi=1}.$$

$$\sigma_{V \max}(\text{Mohr}) = 2b = 2 \frac{p_I - p_A}{1 - \psi_A} = 2 \frac{100 - 50}{1 - 0,444} = 180 \text{ MPa}.$$

$$\sigma_{V \max}(\text{Mohr}) = 180 \text{ MPa} > \sigma_{zul} = 100 \text{ MPa}.$$

Eine ausreichende Festigkeit des Rohres ist nicht gewährleistet!

c) Bestimmung des Spannungszustandes im Punkt  $P_I$ :

$$\psi_I = \frac{R_I^2}{R_I^2} = \frac{R_I^2}{R_A^2} = 1,$$

$$\text{tg } \vartheta = p_I - |a| = \frac{p_I - p_A}{1 - \psi_A} \Rightarrow |a| = p_I - \frac{p_I - p_A}{1 - \psi_A} = \frac{p_A - p_I \psi_A}{1 - \psi_A},$$

$$a = \frac{p_B \psi_K - p_K}{1 - \psi_K} = \frac{100 \cdot 0,4444 - 50}{1 - 0,4444} = -10 \text{ MPa}, \quad b = \frac{p_I - p_A}{1 - \psi_A} = \frac{100 - 50}{1 - 0,444} = 90 \text{ MPa}.$$

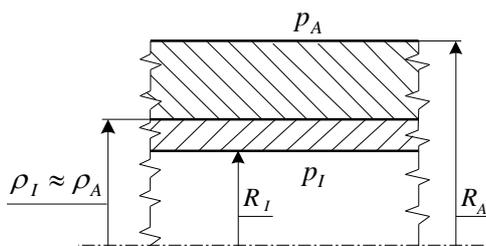
$$\sigma_R(\psi_I) = a - b\psi_I = -10 - 90 = -100 \text{ MPa},$$

$$\sigma_\varphi(\psi_I) = a + b\psi_I = -10 + 90 = 80 \text{ MPa},$$

$$\sigma_z(\psi_I) = a = -10 \text{ MPa}.$$

$$\underline{[F]_{P_I}} = \begin{bmatrix} \sigma_R(\psi_I) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi(\psi_I) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

Aufgabe 8.: Doppelwandiges Rohr



Gegeben:

Die Belastung, der Innenradius  $R_I$  sowie der Koeffizient  $\bar{\psi}_A$  (der die Stelle  $\rho = \rho_I = \rho_A$  angibt) des doppelwandigen Rohres mit Überlappung:

$$p_I = 80 \text{ MPa}, \quad p_A = 0 \text{ MPa}, \quad R_I = 100 \text{ mm}, \quad \bar{\psi}_A = \frac{R_I^2}{\rho^2} = 0,5.$$

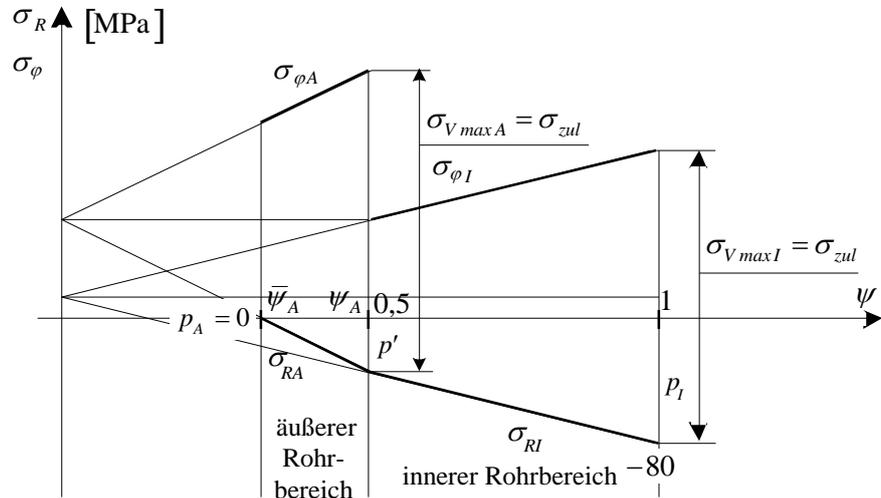
Aufgabe:

- a) Grafische Darstellung der Spannungsverteilung und Dimensionierung des doppelwandigen Rohres, wenn die maximale Vergleichsspannung nach *Mohr* sowohl für den inneren, als auch für den äußeren Rohrbereich mit der zulässigen Spannung  $\sigma_{zul} = 200$  MPa gleichgesetzt wird.
- b) Berechnung des Außenradius des doppelwandigen Rohres.

**Lösung:**

- a) Grafische Darstellung der Spannungsverteilung und Dimensionierung des doppelwandigen Rohres:

Spannungsdiagramm:



Dimensionierung mit Hilfe des Spannungsdiagrammes:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{VmaxI} &= \frac{2(p_I - p')}{1 - \bar{\psi}_A} = \sigma_{zul} \\ \sigma_{VmaxA} &= \frac{2\bar{\psi}_A p'}{\bar{\psi}_A - \psi_A} = \sigma_{zul} \end{aligned} \right\} \text{Lineares algebraisches Gleichungssystem mit zwei Unbekannten: } p' \text{ und } \psi_A.$$

Aus der ersten Gleichung:

$$p' = -\frac{\sigma_{zul}}{2}(1 - \bar{\psi}_A) + p_I = -\frac{200}{2}(1 - 0,5) + 80 = 30 \text{ MPa.}$$

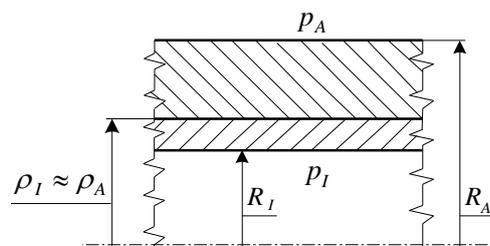
Nach dem Einsetzen in die zweite Gleichung:

$$\psi_A = -2\bar{\psi}_A \frac{p'}{\sigma_{zul}} + \bar{\psi}_A = -\frac{3}{20} + \frac{10}{20} = 0,35.$$

- b) Berechnung des Außenradius des doppelwandigen Rohres:

$$\psi_A = \frac{R_I^2}{R_A^2} \Rightarrow R_A = \frac{R_I}{\sqrt{\psi_A}} = \frac{100}{\sqrt{0,35}} = 169 \text{ mm.}$$

**Aufgabe 9. : Doppelwandiges Rohr**



**Gegeben:**

Die Abmessungen und die Belastungen eines doppelwandigen Rohres mit Überlappung sowie der Koeffizient  $\bar{\psi}_K$ .

$$p_I = 80 \text{ MPa, } p_A = 0, \quad R_I = 70 \text{ mm, } R_A = 140 \text{ mm,}$$

$$\rho = \rho_I = \rho_A, \quad \bar{\psi}_A = 0,49.$$

**Aufgabe:** a) Bestimmung des Wertes  $\psi_A$  und des Außenradius des inneren Rohrbereiches  $\rho = \rho_I$ .

- b) Grafische Darstellung der Spannungsverteilung.

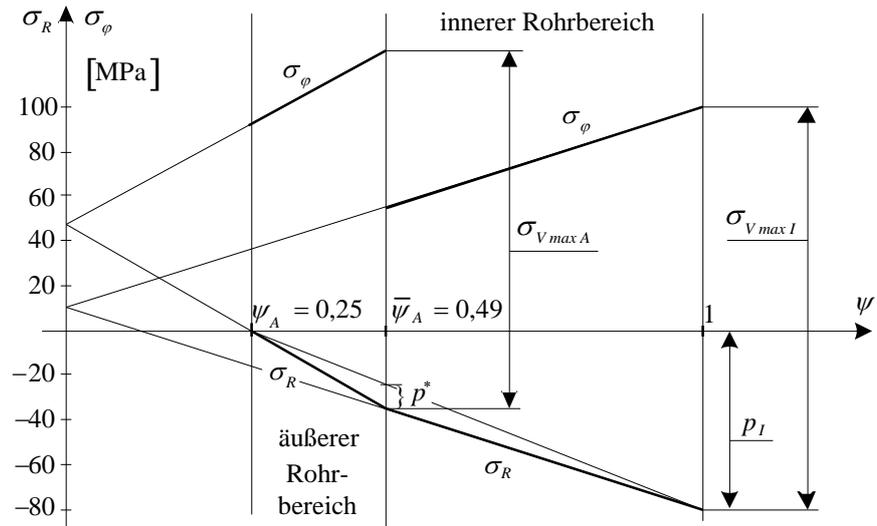
- c) Ermittlung des aus der Überlappung entstehenden Druckes  $p^*$ , wenn  $\sigma_{V \max A} = \sigma_{V \max I}$ .
- d) Bestimmung des aus der Überlappung entstehenden maximalen und minimalen Druckes  $p_{\max}^*$  und  $p_{\min}^*$ , wenn  $\sigma_{zul A} = \sigma_{zul I} = 200 \text{ MPa}$ .

Lösung:

- a) Bestimmung des Wertes  $\psi_A$  und des Außenradius des inneren Rohrbereiches  $\rho = \rho_I$ :

$$\psi_A = \frac{R_I^2}{R_A^2} = \left(\frac{70}{140}\right)^2 = 0,5^2 = 0,25, \quad \bar{\psi}_A = \frac{R_I^2}{\rho_I^2} \approx \frac{R_I^2}{\rho_A^2} \Rightarrow \rho_I = \frac{R_I}{\sqrt{\bar{\psi}_A}} = \frac{70}{\sqrt{0,49}} = \frac{70}{0,7} = 100 \text{ mm}.$$

- b) Das Spannungsdiagramm:



- c) Ermittlung des aus der Überlappung entstehenden Druckes  $p^*$ , wenn  $\sigma_{V \max A} = \sigma_{V \max I}$ :

Die maximalen Vergleichsspannungswerte aus dem Spannungsdiagramm:

$$\sigma_{V \max A} = \frac{2\bar{\psi}_A}{\bar{\psi}_A - \psi_A} \left( p_I \frac{\bar{\psi}_A - \psi_A}{1 - \psi_A} + p^* \right) = \frac{2 \cdot 0,49}{0,24} \left( 80 \frac{0,24}{0,75} + p^* \right) = 104,5 + 4,083 p^*.$$

$$\sigma_{V \max I} = \frac{2}{1 - \bar{\psi}_A} \left( p_I - p^* - p_I \frac{\bar{\psi}_A - \psi_A}{1 - \psi_A} \right) = \frac{2}{0,51} \left( 80 - p^* - 80 \frac{0,24}{0,75} \right) = 288,1 - 3,92 p^*.$$

Aus der Bedingung  $\sigma_{V \max A} = \sigma_{V \max I}$  erhält man die folgende Gleichung:

$$104,5 + 4,083 p^* = 288,1 - 3,92 p^*.$$

Lösung der Gleichung:  $p^* = 22,94 \text{ MPa}$ .

In diesem Fall:  $\sigma_{V \max A} = \sigma_{V \max I} = 198,2 \text{ MPa}$ .

- d) Bestimmung des aus der Überlappung entstehenden maximalen und minimalen Druckes  $p_{\max}^*$  und  $p_{\min}^*$ , wenn  $\sigma_{zul A} = \sigma_{zul I} = 200 \text{ MPa}$ :

Man kann aus dem Spannungsdiagramm bei konstantem innerem und äußerem Druck Folgendes entnehmen:

- die maximale Vergleichsspannung im äußeren Rohrbereich  $\sigma_{V \max A}$  wird sich bei Erhöhung des Druckes  $p^*$  anwachsen,
- die maximale Vergleichsspannung im inneren Rohrbereich  $\sigma_{V \max I}$  wird sich bei Erhöhung des Druckes  $p^*$  verringern.

Die obere Grenze für den Druck  $p^*$  gibt also die zulässige Spannung im äußeren Rohrbereich an:

$$\sigma_{V_{\max A}} = \frac{2\bar{\psi}_A}{\bar{\psi}_A - \psi_A} \left( p_I \frac{\bar{\psi}_A - \psi_A}{1 - \psi_A} + p_{\max}^* \right) = \sigma_{zul A},$$

$$\frac{2 \cdot 0,49}{0,24} \left( 80 \frac{0,24}{0,75} + p_{\max}^* \right) = 104,5 + 4,083 p_{\max}^* = 200 \quad \Rightarrow \quad p_{\max}^* = 23,39 \text{ MPa}.$$

Der umgekehrte Gedankengang:

- die maximale Vergleichsspannung im äußeren Rohrbereich  $\sigma_{V_{\max A}}$  wird bei Verminderung des Druckes  $p^*$  verringern,
- die maximale Vergleichsspannung im inneren Rohrbereich  $\sigma_{V_{\max I}}$  wird bei Verminderung des Druckes  $p^*$  anwachsen.

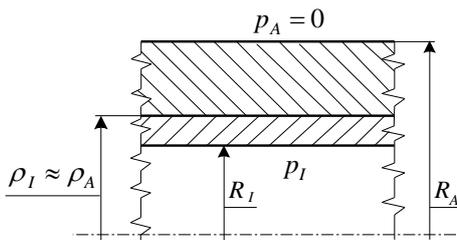
Die untere Grenze für den Druck  $p^*$  gibt also die zulässige Spannung des inneren Rohrbereiches an:

$$\sigma_{V_{\max I}} = \frac{2}{1 - \bar{\psi}_A} \left( p_I - p_{\min}^* - p_I \frac{\bar{\psi}_A - \psi_A}{1 - \psi_A} \right) = \sigma_{zul I},$$

$$\frac{2}{0,51} \left( 80 - p_{\min}^* - 80 \frac{0,24}{0,75} \right) = 288,1 - 3,92 p_{\min}^* = 200 \quad \Rightarrow \quad p_{\min}^* = 22,47 \text{ MPa}.$$

Der mögliche Bereich des aus der Überlappung entstehenden Druckes  $p^*$ :  $22,47 \text{ MPa} \leq p^* \leq 23,39 \text{ MPa}$ .

#### Aufgabe 10.: Doppelwandiges Rohr



Gegeben: Die Belastung, der Innenradius  $R_I$  sowie der Koeffizient  $\psi_A$  des doppelwandigen Rohres mit Überlappung:

$$\psi_A = \frac{R_I^2}{\rho^2} = 0,5. \quad \sigma_{zul} = 200 \text{ MPa}, \quad R_I = 100 \text{ mm},$$

$$\rho = \rho_I \cong \rho_A, \quad p_I = 80 \text{ MPa}, \quad p_A = 0.$$

#### Aufgabe:

- Grafische Darstellung der Spannungsverteilung, wenn die maximale Vergleichsspannung  $\sigma_{V_{\max}}$  in beiden Rohren mit den zulässigen Spannung  $\sigma_{zul}$  des Materials gleichgesetzt wird.
- Bestimmung des Außenradius.

#### Lösung:

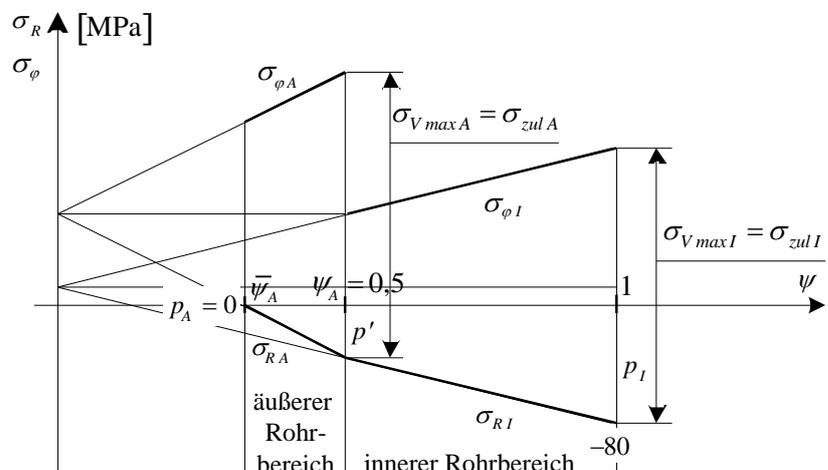
- Grafische Darstellung des Spannungsdiagramms:

Das Spannungsdiagramm wird charakteristisch so dargestellt, daß die maximale Vergleichsspannung  $\sigma_{V_{\max}}$  in beiden Rohrbereichen mit der zulässigen Spannung  $\sigma_{zul}$  des Materials übereinstimmt.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{V_{\max I}} &= \frac{p_I - p'}{1 - \psi_A} 2 = \sigma_{zul} \\ \sigma_{V_{\max A}} &= \frac{p'}{\psi_A - \bar{\psi}_A} \psi_A 2 = \sigma_{zul} \end{aligned} \right\}$$

Die Unbekannten in den Gleichungen sind  $p'$  und  $\bar{\psi}_A$ .

Berechnung der Unbekannten aus dem Gleichungssystem:



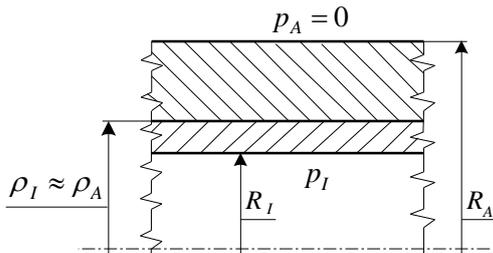
$$p' = -\frac{\sigma_{zul}}{2}(1 - \psi_K) + p_B = -100(1 - 0,5) + 80 = 30 \text{ MPa}.$$

$$\bar{\psi}_K = -2\psi_K \frac{p'}{\sigma_{zul}} + \psi_K = -\frac{3}{20} + \frac{10}{20} = \frac{7}{20} = 0,35.$$

b) Bestimmung des Außenradius:

$$\bar{\psi}_K = \frac{R_B^2}{R_K^2} \Rightarrow R_K = \frac{R_B}{\sqrt{\bar{\psi}_K}} = \frac{100}{\sqrt{0,35}} \cong 169 \text{ mm}.$$

### Aufgabe 11.: Doppelwandiges Rohr

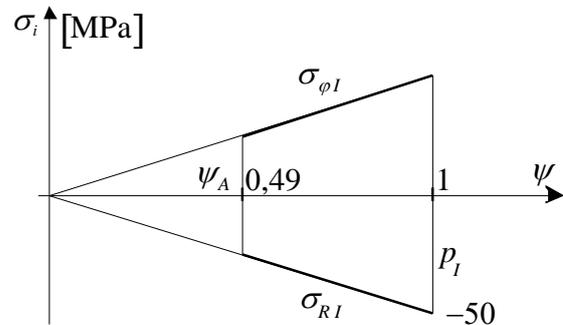


Gegeben: Abmessungen, Belastung und das Spannungsdiagramm des inneren Rohrbereiches eines doppelwandigen Rohres:

$$R_I = 70 \text{ mm}, R_A = 140 \text{ mm},$$

$$\psi_A = 0,49, p_I = 50 \text{ MPa}, p_A = 0.$$

Spannungsdiagramm des inneren Rohrbereiches



#### Aufgabe:

- Ermittlung des Koeffizienten  $\bar{\psi}_A$  und des Außenradius  $\rho_I$  des inneren Rohrbereiches.
- Grafische Darstellung der Spannungsverteilung des äußeren Rohrbereiches.
- Berechnung der maximalen Vergleichsspannung  $\sigma_{Vmax}$  nach Mohr im äußeren Rohrbereich.
- Bestimmung des aus der Überlappung entstehenden Druckes  $p^*$ .

#### Lösung:

- a) Ermittlung des Koeffizienten  $\bar{\psi}_A$  und des Außenradius  $\rho_I$  des inneren Rohrbereiches:

$$\bar{\psi}_A = \frac{R_I^2}{R_A^2} = \left(\frac{70}{140}\right)^2 = 0,5^2 = 0,25.$$

$$\psi_A = \frac{R_I^2}{\rho_I^2} \approx \frac{R_I^2}{R_A^2} \Rightarrow$$

$$\rho_I = \frac{R_I}{\sqrt{\psi_A}} = \frac{70}{\sqrt{0,49}} = \frac{70}{0,7} = 100 \text{ mm}.$$

- c) Berechnung der maximalen Vergleichsspannungen  $\sigma_{Vmax}$  nach Mohr:

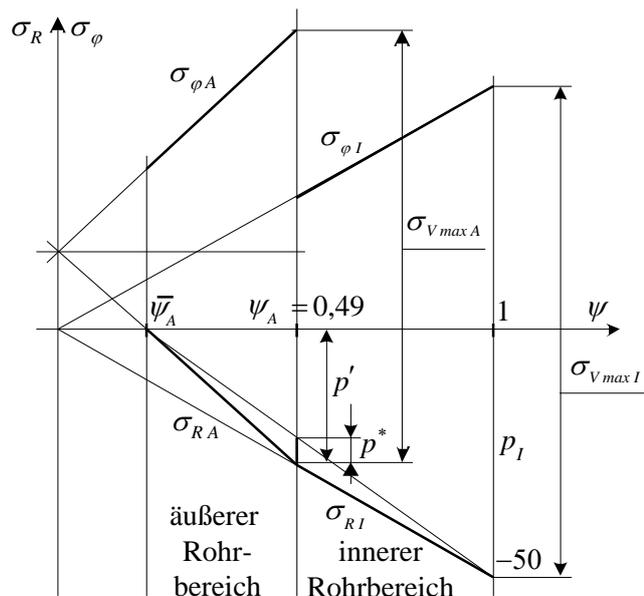
$$p' = p_I \psi_A = 50 \cdot 0,49 = 24,5 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{Vmax I} = 2p_I = 100 \text{ MPa},$$

$$\frac{\sigma_{Vmax A}}{2\psi_A} = \frac{p' - p_I}{\psi_A - \bar{\psi}_A}.$$

$$\sigma_{Vmax A} = 2\psi_A \frac{p' - p_I}{\psi_A - \bar{\psi}_A} = 0,98 \frac{24,5}{0,49 - 0,25} \approx 100,04 \text{ MPa}.$$

- b) Darstellung der Spannungsverteilung des äußeren Rohrbereiches:



d) Bestimmung des aus der Überlappung entstehenden Druckes  $p^*$  :

$$p^* = p' - \frac{P_B}{1 - \psi_A} (\psi_A - \bar{\psi}_A) = 24,5 - \frac{4 \cdot 50}{3} 0,24 = 8,5 \text{ MPa} .$$