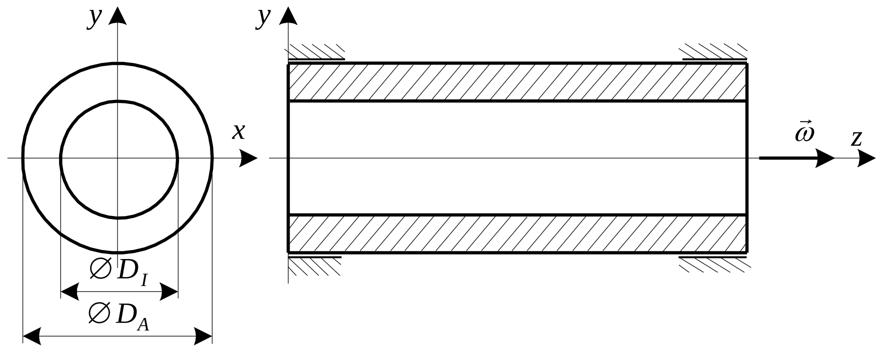
ÜBUNG 8.: ROTIERENDE WELLEN

Aufgabe 1.: Schnell rotierende Rohrwelle



Gegeben:

Die Abmessungen, das Material und die Winkelgeschwindigkeit einer schnell rotierenden Rohrwelle:

$D_I = 400$ mm,

$D_A = 600$ mm,

$\omega = 200$ rad / s = konstant,

$\rho = 8000$ kg / m^3, $\nu = 1/3$.

Aufgabe: a) Bestimmung der konstanten Größen λ_I und $\sigma_{\omega 0}$.

b) Grafische Darstellung der Spannungsverteilungen $\sigma_R(\lambda), \sigma_\varphi(\lambda)$ $\sigma_z(\lambda)$.

c) Ermittlung der Matrix des Spannungstensors in Zylinder-Koordinaten R, φ, z an den Punkten $R_A = D_A/2$.

d) Berechnung der maximalen Vergleichsspannung nach der *Mohrschen*-Theorie.

Lösung:

a) Bestimmung der konstanten Größen λ_I und $\sigma_{\omega 0}$:

$$\lambda = \frac{R^2}{R_A^2}, \qquad \lambda_I = \frac{R_I^2}{R_A^2} = \left(\frac{200}{300}\right)^2 = 0{,}44444\,,$$

$$\sigma_{\omega 0} = \frac{(3-2\nu)}{(1-\nu)}\frac{\rho}{8}(R_A\,\omega)^2 = \frac{(3-2\cdot 0{,}33333)10^3}{1-0{,}33333}(0{,}3\cdot 200)^2 = 12{,}6\cdot 10^6 \text{ Pa} = 12{,}6 \text{ MPa}\,.$$

b) Grafische Darstellung der Spannungsverteilungen $\sigma_R(\lambda), \sigma_\varphi(\lambda)$ $\sigma_z(\lambda)$:

Spannungsverteilung:

$$\sigma_R = a - \frac{b}{\lambda} - \sigma_{\omega 0}\lambda\,,$$

$$\sigma_\varphi = a + \frac{b}{\lambda} - \mu_1\sigma_{\omega 0}\lambda\,,$$

$$\sigma_z = \mu_2\,\sigma_{\omega 0}\left(1+\lambda_I - 2\lambda\right).$$

Randbedingungen:

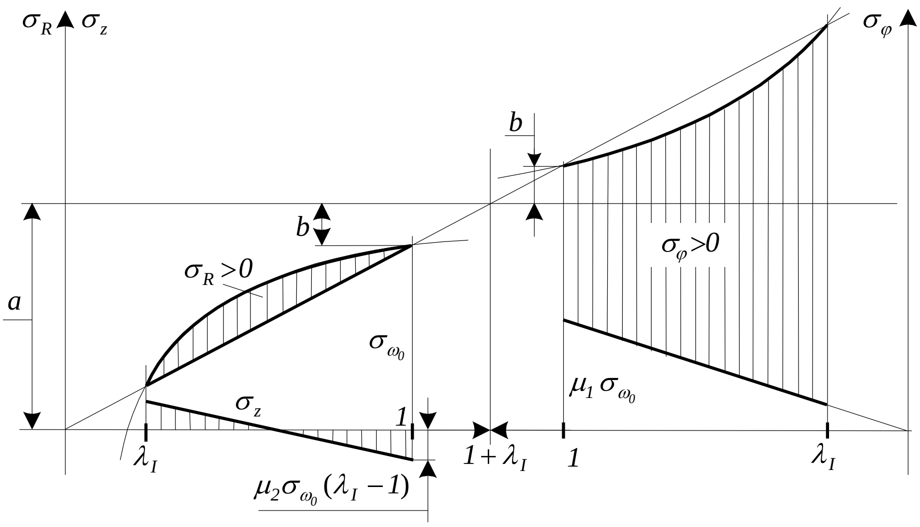
$$\sigma_R(\lambda = \lambda_I) = 0, \qquad \sigma_R(\lambda = 1) = 0\,.$$

Spannungsdiagramm:

$$\lambda = \frac{R^2}{R_A^2}\,,$$

$$\mu_1 = \frac{1+2\nu}{3-2\nu} = \frac{1+2\cdot 0{,}3333}{3-2\cdot 0{,}3333} = 0{,}714\,,$$

$$\mu_2 = \frac{2\nu}{3-2\nu} = \frac{2\cdot 0{,}3333}{3-2\cdot 0{,}3333} = 0{,}285\,.$$



c) Ermittlung der Matrix des Spannungstensors in Zylinder-Koordinaten R, φ, z an den Punkten $R_A = D_A/2$:

Aus dem Spannungsdiagramm:

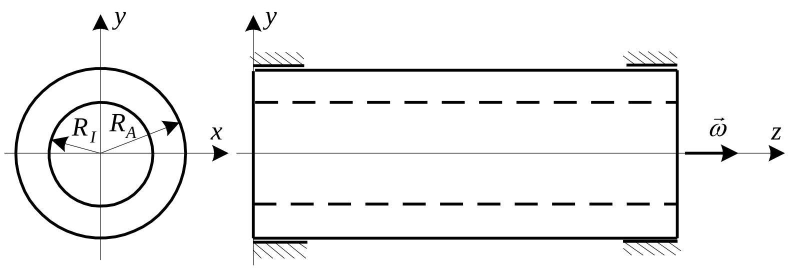
$$\sigma_R(\lambda = 1) = 0 \ ,$$
$$\sigma_\varphi(\lambda = 1) = \sigma_{\omega_0}(1 + 2\lambda_I) - \mu_1\sigma_{\omega_0} = 12{,}6(1 + 2\cdot 0{,}4444 - 0{,}714) = 14{,}8\ MPa\ ,$$
$$\sigma_z(\lambda = 1) = \mu_2\sigma_{\omega_0}(\lambda_I - 1) = 0{,}285\cdot 12{,}6(0{,}44444 - 1) = -2\ MPa\ .$$

Matrix des Spannungstensors: $\left[\underset{R\varphi z}{\underline{\underline{F}}}\right](\lambda = 1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ MPa.

d) Berechnung der maximalen Vergleichsspannung nach der *Mohrschen*-Theorie:

$$\sigma_{V\,max} = \sigma_\varphi\big|_{\lambda_I} = \sigma_{\omega_0}(2 + \lambda_I) - \mu_1\sigma_{\omega_0}\lambda_I = 12{,}6(2 + 0{,}4444 - 0{,}314) = 26{,}79 \text{ MPa}\ .$$

Aufgabe 2.: Schnell rotierende Rohrwelle



Gegeben:

Die Abmessungen, das Material und die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ einer schnell rotierenden Rohrwelle:

$R_A = 200\sqrt{2}$ mm, $\sigma_{\omega_0} = 200$ MPa,

$\rho = 8000$ kg/m^3, $\nu = 0{,}25$;

$E = 2\cdot 10^5$ MPa, $\vec{\omega} =$ konst.

Aufgabe:

a) Charakteristische Darstellung der Spannungsdiagramme $\sigma_R(\lambda), \sigma_\varphi(\lambda)$ und $\sigma_z(\lambda)$.

b) Bestimmung des Innenradius R_I, wenn $\sigma_\varphi(\lambda_I) = 440$ MPa.

c) Ermittlung des Spannungszustandes an der Stelle R_A.

d) Berechnung der Änderung des Außendurchmessers ΔD_A.

e) Bestimmung der zulässigen maximalen Winkelgeschwindigkeit der Rohrwelle, wenn $\sigma_{zul} = 110$ MPa ist.

Lösung:

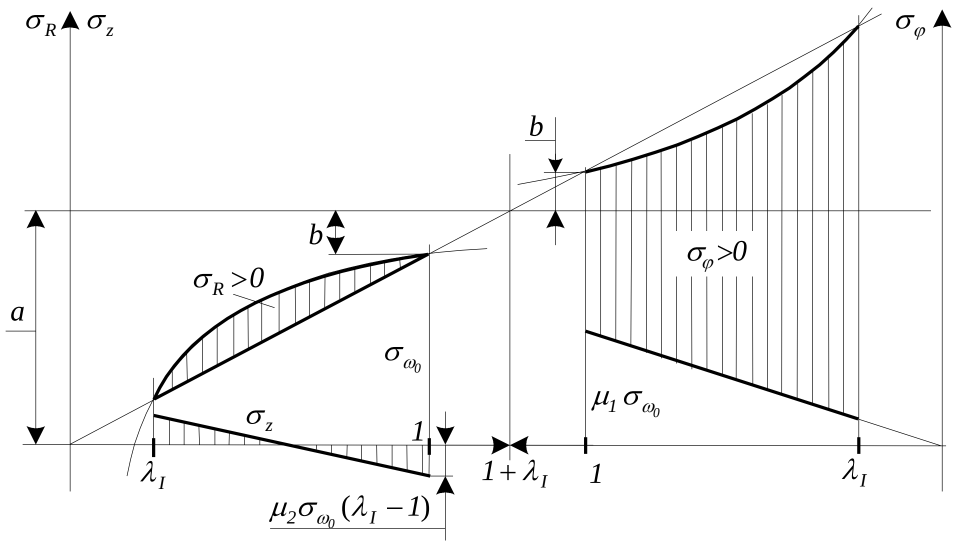
a) Charakteristische Darstellung der Spannungsdiagramme $\sigma_R(\lambda), \sigma_\varphi(\lambda)$ und $\sigma_z(\lambda)$:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_R &= a - \frac{b}{\lambda} - \sigma_{\omega 0}\lambda \\ \sigma_\varphi &= a + \frac{b}{\lambda} - \mu_1\sigma_{\omega 0}\lambda \\ \sigma_z &= \mu_2\,\sigma_{\omega 0}(1 + \lambda_I - 2\lambda) \end{aligned}\right\} \text{Spannungsverteilung über die Wanddicke.}$$

$$\lambda = \frac{R^2}{R_A^2}\ , \qquad \mu_1 = \frac{1+2\nu}{3-2\nu} = \frac{1+2\cdot 0{,}25}{3-2\cdot 0{,}25} = 0{,}6\ , \qquad \mu_2 = \frac{2\nu}{3-2\nu} = \frac{2\cdot 0{,}25}{3-2\cdot 0{,}25} = 0{,}2\ .$$

Randbedingungen: $\sigma_R(\lambda = \lambda_I) = 0, \qquad \sigma_R(\lambda = 1) = 0$.

Spannungsdiagramm der schnell rotierenden Rohrwelle:



b) Bestimmung des Innenradius R_I, wenn $\sigma_\varphi(\lambda_I) = 440$ MPa:

Aus dem Diagramm: $\sigma_\varphi\big|_{\lambda_I} = \sigma_{\omega_0}(2+\lambda_I) - \mu_1 \sigma_{\omega_0} \lambda_I = 2\sigma_{\omega_0} + \lambda_I \sigma_{\omega_0}(1-\mu_1)$,

$$440 = 2 \cdot 200 + \lambda_I 200(1-0{,}6) = 400 + \lambda_I 80,$$

$$40 = \lambda_I 80 \quad \Rightarrow \quad \lambda_I = 0{,}5.$$

$$\lambda_I = \frac{R_I^2}{R_A^2} \quad \Rightarrow \quad R_I = R_A \sqrt{\lambda_I} = 200 \cdot \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} = 200 \text{ mm},$$

c) Ermittlung des Spannungszustandes an der Stelle R_A:

An der Stelle $R = R_A$ ist $\lambda = \frac{R^2}{R_A^2} = \frac{R_A^2}{R_A^2} = 1$.

$\sigma_R(\lambda = 1) = 0$,

$\sigma_\varphi(\lambda = 1) = \sigma_{\omega_0}(1 + 2\lambda_I) - \mu_1 \sigma_{\omega_0} = 200(1+1-0{,}6) = 280\,\text{MPa}$,

$\sigma_z(\lambda = 1) = \mu_2 \sigma_{\omega_0}(\lambda_I - 1) = -0{,}2 \cdot 200 \cdot 0{,}5 = -20\,\text{MPa}$.

Der Spannungstensor:

$$\underline{\underline{F}}_{R\varphi z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 280 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{bmatrix} \text{MPa}.$$

d) Berechnung der Änderung des Außendurchmessers ΔD_A:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2 \cdot 10^5}{2(1+0{,}25)} = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}.$$

$$\varepsilon_\varphi(R = R_A) = \varepsilon_{\varphi A} = \frac{1}{2G}\left[\sigma_\varphi - \nu \frac{(\sigma_\varphi + \sigma_z)}{(1+\nu)}\right] = \frac{1}{2 \cdot 8 \cdot 10^4}\left(280 - 0{,}25 \frac{260}{1{,}25}\right) = 14{,}25 \cdot 10^{-4},$$

$$\Delta D_A = 2u_R\big|_{R_A} = 2 R_A \varepsilon_{\varphi K} = 2 \cdot 200\sqrt{2} \cdot 14{,}25 \cdot 10^{-4} = 80{,}37 \cdot 10^{-2} \text{ mm}.$$

$$\Delta D_A \cong 0{,}8 \text{ mm}.$$

e) Bestimmung der zulässigen maximalen Winkelgeschwindigkeit der Rohrwelle, wenn $\sigma_{zul} = 110$ MPa ist:

$\sigma_{V\,max} \le \sigma_{zul}$,

$\sigma_{\omega 0}(2 + \lambda_I) - \mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda_I \le \sigma_{zul}$,

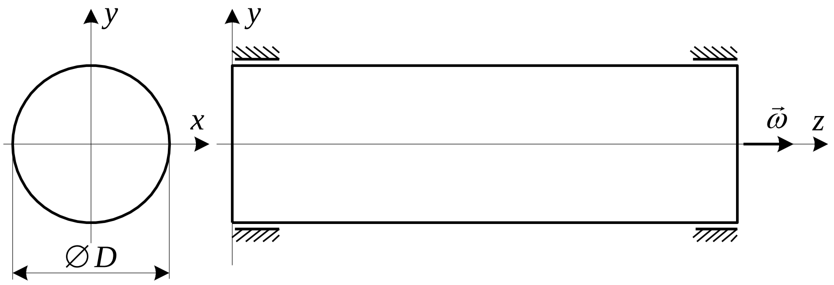
$$\frac{(3-2\nu)}{(1-\nu)} \frac{\rho}{8} (R_A\,\omega)^2 (2 + \lambda_I - \mu_1 \lambda_I) \le \sigma_{zul},$$

$$\left(R_A\,\omega_{max}\right)^2=\frac{\sigma_{zul}}{\left(2+\lambda_I-\mu_1\lambda_I\right)}\frac{8}{\rho}\frac{(1-\nu)}{(3-2\nu)}=\frac{110\cdot 10^6}{2{,}2}0{,}3\cdot 10^{-3}=1{,}5\cdot 10^4\ \mathrm{m^2/s^2},$$

$$R_A\,\omega_{max}=\sqrt{1{,}5\cdot 10^4}=122{,}47\ \mathrm{m/s}\quad\Rightarrow\quad \omega_{max}=\frac{122{,}47}{R_A}=\frac{122{,}47}{0{,}2\sqrt{2}}=434\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}.$$

Die zulässigen maximalen Drehzahl: $n_{max}=\dfrac{60\,\omega_{max}}{2\pi}=\dfrac{60\cdot 434}{6{,}282}=4148\ \dfrac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}}$.

Aufgabe 3.: Schnell rotierende Welle



Gegeben:

Eine schnell rotierende Welle mit dem Durchmesser *D*.

$D=400$ mm, $\rho=8000\ \mathrm{kg/m^3}$,

$\nu=0{,}25$, $\sigma_{\omega 0}=40$ MPa,

$\vec{\omega}=$ konstant.

Aufgabe:

a) Grafische Darstellung der Spannungsverteilungen / Spannungsdiagramme $\sigma_R(\lambda),\sigma_\varphi(\lambda)$ und $\sigma_z(\lambda)$.

b) Berechnung der Spannungen an den Stellen $R=0$ und $R=R_A$.

c) Berechnung der maximalen Vergleichsspannung nach *Mohr*.

d) Ermittlung der zulässigen maximalen Drehzahl der Welle, wenn $\sigma_{zul}=80$ MPa ist.

Lösung:

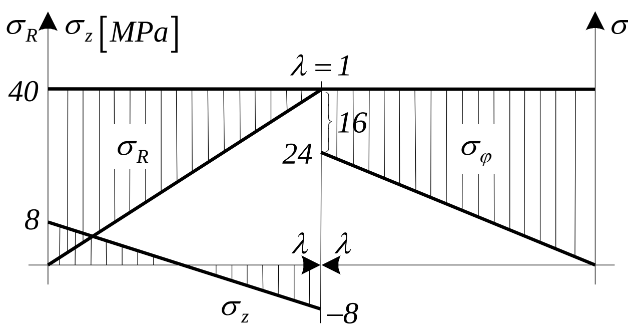
a) Grafische Darstellung der Spannungsverteilungen / Spannungsdiagramme $\sigma_R(\lambda),\sigma_\varphi(\lambda)$ und $\sigma_z(\lambda)$:

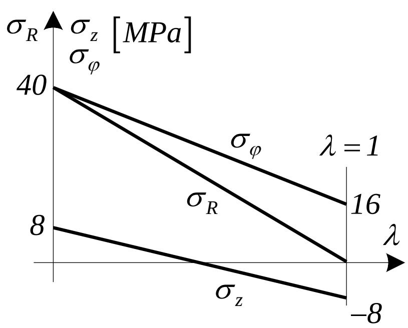
$$\lambda=\frac{R^2}{R_A^2},\quad \mu_1=\frac{1+2\nu}{3-2\nu}=\frac{1+2\cdot 0{,}25}{3-2\cdot 0{,}25}=\frac{1{,}5}{2{,}5}=0{,}6,\quad \mu_2=\frac{2\nu}{3-2\nu}=\frac{2\cdot 0{,}25}{3-2\cdot 0{,}25}=\frac{0{,}5}{2{,}5}=0{,}2.$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_R&=a-\sigma_{\omega 0}\lambda\\ \sigma_\varphi&=a-\mu_1\sigma_{\omega 0}\lambda\\ \sigma_z&=\mu_2\,\sigma_{\omega 0}\left(1-2\lambda\right)\end{aligned}\right\}\ \text{Spannungsverteilung über die Dicke.}$$

Randbedingungen: $R=R_A(\lambda=1)\quad\Rightarrow\quad \sigma_R=0=a-\sigma_{\omega 0}=0\quad\Rightarrow\quad a=\sigma_{\omega 0}=40$ MPa.

Zwei unterschiedliche Möglichkeiten für die grafische Darstellung der Spannungsdiagramme:





b) Berechnung der Spannungen an den Stellen $R=0$ und $R=R_K$:

$R=0\qquad \sigma_R(\lambda=0)=a-\sigma_{\omega 0}\lambda=40-40\cdot 0=40$ MPa.

$R=R_A\qquad \sigma_R(\lambda=1)=a-\sigma_{\omega 0}\lambda=40-40\cdot 1=0$ MPa.

$R = 0 \qquad \sigma_\varphi(\lambda = 0) = a - \mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda = 40 - 0{,}6 \cdot 40 \cdot 0 = 40$ MPa.

$R = R_A \qquad \sigma_\varphi(\lambda = 1) = a - \mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda = 40 - 0{,}6 \cdot 40 \cdot 1 = 16$ MPa.

$R = 0 \qquad \sigma_z(\lambda = 0) = \mu_2 \sigma_{\omega 0}(1 - 2\lambda) = 0{,}2 \cdot 40(1 - 2 \cdot 0) = 8$ MPa.

$R = R_A \qquad \sigma_z(\lambda = 1) = \mu_2 \sigma_{\omega 0}(1 - 2\lambda) = 0{,}2 \cdot 40(1 - 2 \cdot 1) = -8$ MPa .

c) Berechnung der maximalen Vergleichsspannung nach *Mohr*.

$$\sigma_V(Mohr)\big|_{\lambda=0} = (\sigma_R - \sigma_z) = 40 - 8 = \sigma_{\omega 0}(1 - \mu_2) = 40(1 - 0{,}2) = 40 \cdot 0{,}8 = 32 \text{ MPa} ,$$

$$\sigma_V(Mohr)\big|_{\lambda=1} = (\sigma_\varphi - \sigma_z) = 16 - (-8) = \sigma_{\omega 0}(1 - \mu_1 + \mu_2) = 40(1 - 0{,}6 + 0{,}2) = 24 \text{ MPa} ,$$

Die maximale Vergleichsspannung: $\sigma_{V\,max}(Mohr)\big|_{\lambda=0} = (\sigma_R - \sigma_z) = 32$ MPa .

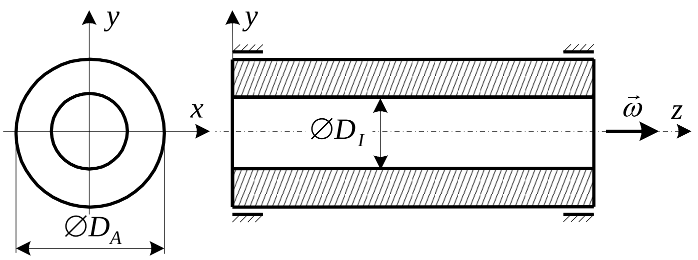
d) Ermittlung der zulässigen maximalen Drehzahl der Welle, wenn $\sigma_{zul} = 80$ MPa ist.

$$\sigma_{zul} \le \sigma_{V\,max}(Mohr) = \sigma_V(Mohr)\big|_{\lambda=0} = \sigma_{\omega 0}(1 - \mu_2) = \frac{(3 - 2\nu)}{(1 - \nu)} \frac{\rho}{8} (R_A \omega)^2 (1 - \mu_2) ,$$

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{\sigma_{zul}(1 - \nu) 8}{(3 - 2\nu)\rho R_A^2 (1 - \mu_2)}} = \sqrt{\frac{80 \cdot 10^6 (1 - 0{,}25) \cdot 8}{(3 - 2 \cdot 0{,}25) \cdot 8000 \cdot 0{,}2^2 (1 - 0{,}2)}} = 866 \frac{\text{rad}}{\text{s}} ,$$

$$n_{max} = \frac{60\,\omega_{max}}{2\pi} = \frac{60 \cdot 866}{6{,}282} = 8270 \frac{\text{U}}{\text{min}} .$$

Aufgabe 4.: Schnell rotierende Rohrwelle



Gegeben:
Eine Rohrwelle mit dem Außendurchmesser D_A und dem Innendurchmesser D_I, die sich mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω dreht.

$D_I = 400$ mm , $D_A = 600$ mm ,

$\omega = 200$ rad/s , $\rho = 8000$ kg/m^3 , $\nu = 1/3$.

Aufgabe: a) Bestimmung der konstanten Größen λ_I und $\sigma_{\omega 0}$.

b) Grafische Darstellung der Spannungsdiagramme $\sigma_R(\lambda)$, $\sigma_\varphi(\lambda)$ und $\sigma_z(\lambda)$.

c) Berechnung der maximalen Vergleichsspannung nach *Mohr*.

b) Berechnung des Spannungszustandes an den Stellen $R_A = D_A / 2$.

Lösung:

a) Bestimmung der konstanten Größen λ_I und $\sigma_{\omega 0}$:

$$\lambda_I = \left(\frac{R_I}{R_A}\right)^2 = \left(\frac{200}{300}\right)^2 = \frac{4}{9} = 0{,}44444 ,$$

$$\sigma_{\omega 0} = \frac{(3\text{-}2\nu)}{(1\text{-}\nu)} \frac{\rho}{8} (R_A \omega)^2 = \frac{(3\text{-}2 \cdot 0{,}44444)}{(1\text{-}0{,}4444)} \frac{8000}{8} (300 \cdot 200)^2 = 12{,}6 \text{ N/mm}^2 .$$

b) Grafische Darstellung der Spannungsdiagramme $\sigma_R(\lambda)$, $\sigma_\varphi(\lambda)$ und $\sigma_z(\lambda)$:

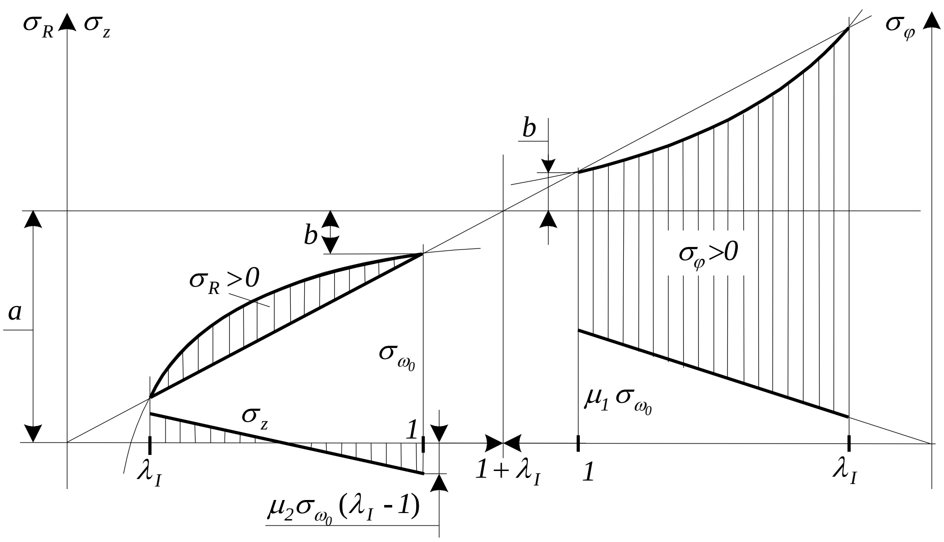
$$\left.\begin{aligned} \sigma_R &= a - \frac{b}{\lambda} - \sigma_{\omega 0}\lambda \\ \sigma_\varphi &= a + \frac{b}{\lambda} - \mu_1 \sigma_{\omega 0}\lambda \\ \sigma_z &= \mu_2 \sigma_{\omega 0}(1 + \lambda_I - 2\lambda) \end{aligned}\right\} \lambda = \frac{R^2}{R_A^2} .$$

$$\mu_1 = \frac{1 + 2\nu}{3 - 2\nu} = \frac{1 + 2 \cdot 0{,}4444}{3\text{-}2 \cdot 0{,}4444} = \frac{5}{7} ,$$

$$\mu_2 = \frac{2\nu}{3 - 2\nu} = \frac{2 \cdot 0{,}4444}{3\text{-}2 \cdot 0{,}4444} = \frac{2}{7} .$$

Spannungsdiagramm:

Randbedingungen:
$\sigma_R(\lambda=\lambda_I)=0,$
$\sigma_R(\lambda=1)=0\,.$



Ermittlung der Konstanten aus den Randbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} R=R_I \quad (\lambda=\lambda_I) \qquad \sigma_R=0=a-\frac{b}{\lambda}-\sigma_{\omega 0}\lambda \\ R=R_A \quad (\lambda=1) \qquad \sigma_R=0=a-\frac{b}{\lambda}-\sigma_{\omega 0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 0=a-\frac{b}{\lambda_I}-\sigma_{\omega 0}\lambda_I \\ 0=a-b-\sigma_{\omega 0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad a=b+\sigma_{\omega 0}.$$

Nach dem Einsetzen in die erste Gleichung:

$$0=b-\frac{b}{\lambda_I}+\sigma_{\omega 0}\left(1-\lambda_I\right),$$

$$0=-\frac{b}{\lambda_I}\left(1-\lambda_I\right)+\sigma_{\omega 0}\left(1-\lambda_I\right) \quad \Rightarrow \quad b=\lambda_I\sigma_{\omega 0}\,.$$

Nach dem Einsetzen in die zweite Gleichung: $a=\left(1+\lambda_I\right)\sigma_{\omega 0}$.

$a=\sigma_{\omega 0}\left(1+\lambda_I\right)=12{,}6\left(1+0{,}4444\right)=18{,}2$ MPa. $\qquad b=a-\sigma_{\omega 0}=18{,}2-12{,}6=5{,}6$ MPa.

Die charakteristischen Werte der Spannungen:

$$\sigma_z\left(\lambda_I\right)=\mu_2\sigma_{\omega 0}\left(1+\lambda_I-2\lambda_I\right)=\mu_2\sigma_{\omega 0}\left(1-\lambda_I\right)=\frac{2}{7}12{,}6\left(1-0{,}4444\right)=2 \text{ MPa},$$

$$\sigma_z\left(\lambda=1\right)=\mu_2\sigma_{\omega 0}\left(1+\lambda_I-2\right)=\mu_2\sigma_{\omega 0}\left(\lambda_I-1\right)=\frac{2}{7}12{,}6\left(0{,}4444-1\right)=-2 \text{ MPa}.$$

$$\sigma_\varphi\left(\lambda_I\right)=a+\frac{b}{\lambda_I}-\mu_1\sigma_{\omega 0}\lambda_I,$$

$$h_\varphi(\lambda_I)=a+\frac{b}{\lambda_I}=18{,}2+\frac{5{,}6}{0{,}4444}=18{,}2+12{,}6=30{,}8 \text{ MPa},$$

$$\mu_1\sigma_{\omega 0}\lambda_I=\frac{5}{7}12{,}6\cdot 0{,}4444=4 \text{ MPa},$$

$$\sigma_\varphi\left(\lambda_I\right)=a+\frac{b}{\lambda_I}-\mu_1\sigma_{\omega 0}\lambda_I=30{,}8-4=26{,}8 \text{ MPa}.$$

$$\sigma_\varphi\left(\lambda=1\right)=a+b-\mu_1\sigma_{\omega 0},$$

$$h_\varphi(\lambda=1)=a+b=18{,}2+5{,}6=23{,}8 \text{ MPa},$$

$$\mu_1\sigma_{\omega 0}=\frac{5}{7}12{,}6=9 \text{ MPa},$$

$$\sigma_\varphi\left(\lambda=1\right)=a+b-\mu_1\sigma_{\omega 0}=23{,}8-9=14{,}8 \text{ MPa}.$$

c) Berechnung der maximalen Vergleichsspannung nach *Mohr:*

$\lambda = 1$, $\sigma_V(Mohr) = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_\varphi - \sigma_z = 14{,}8 - (-2) = 16{,}8$ MPa,

$\lambda_I = 0{,}44444$, $\sigma_V(Mohr) = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_\varphi - \sigma_R = 26{,}8 - 0 = 26{,}8$ MPa,

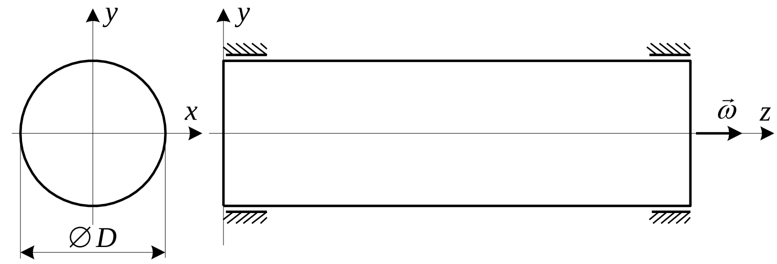
$\sigma_{V\,\max}(Mohr) = 26{,}8$ MPa.

b) Berechnung des Spannungszustandes an den Stellen $R_A = D_A / 2$:

Der Spannungstensor in Zylinder-Koordinaten:

$$\left[\underset{R\varphi z}{\underline{\underline{F}}}(P)\right] = \begin{bmatrix} \sigma_R(\lambda=1) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi(\lambda=1) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z(\lambda=1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \text{MPa.}$$

Aufgabe 5.: Schnell rotierende Welle



Gegeben:

Eine rotierende Welle mit dem Durchmesser D, die sich mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω dreht.

$D = 400\,\text{mm}$, $\rho = 8000\,\text{kg/m}^3$,

$\sigma_{\omega 0} = 40$ MPa , $\nu = 0{,}25$.

Aufgabe: a) Die grafische Darstellung der Spannungsverteilungen $\sigma_R(\lambda)$, $\sigma_\varphi(\lambda)$ und $\sigma_z(\lambda)$.

b) Berechnung der maximalen Vergleichsspannung nach *Mohr*.

c) Ermittlung der zulässigen maximalen Drehzahl der Welle, wenn $\sigma_{zul} = 80$ MPa ist.

Lösung:

a) Die grafische Darstellung der Spannungsverteilungen $\sigma_R(\lambda)$, $\sigma_\varphi(\lambda)$ und $\sigma_z(\lambda)$:

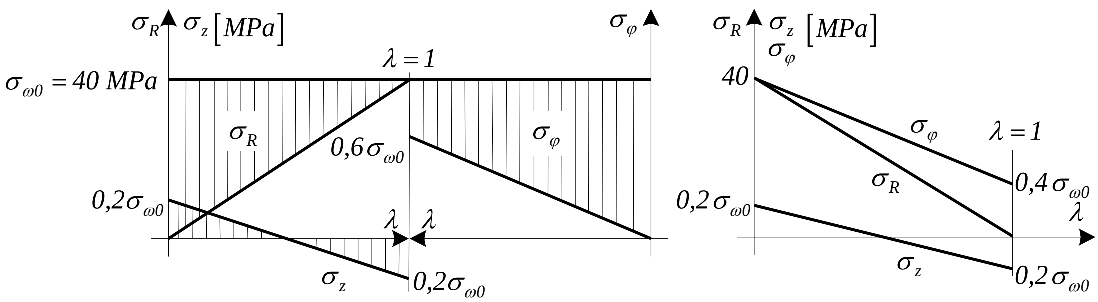
$$\left.\begin{aligned} \sigma_R &= a - \sigma_{\omega 0}\lambda \\ \sigma_\varphi &= a - \mu_1\sigma_{\omega 0}\lambda \\ \sigma_z &= \mu_2\sigma_{\omega 0}(1\text{-}2\lambda) \end{aligned}\right\} \lambda = \frac{R^2}{R_A^2}.$$

$$\mu_1 = \frac{1+2\nu}{3-2\nu} = \frac{1+2\cdot 0{,}25}{3-2\cdot 0{,}25} = 0{,}6,$$

$$\mu_2 = \frac{2\nu}{3-2\nu} = \frac{2\cdot 0{,}25}{3-2\cdot 0{,}25} = 0{,}2.$$

Randbedingung: $R = R_A(\lambda = 1) \Rightarrow \sigma_R = 0 = a - \sigma_{\omega 0} = 0 \Rightarrow a = \sigma_{\omega 0} = 40$ MPa .

Zwei unterschiedliche Möglichkeiten für die grafische Darstellung der Spannungsdiagramme:



Die charakteristischen Werte:

$\sigma_R(\lambda = 0) = a - \sigma_{\omega 0}\lambda = 40 - 40\cdot 0 = 40\,\text{MPa}$,

$\sigma_R(\lambda = 1) = a - \sigma_{\omega 0}\lambda = 40 - 40\cdot 1 = 0\,\text{MPa}$,

$\sigma_\varphi(\lambda = 0) = a - \mu_1\sigma_{\omega 0}\lambda = 40 - 0{,}6\cdot 40\cdot 0 = 40\,\text{MPa}$,

$\sigma_\varphi(\lambda=1)=a-\mu_1\sigma_{\omega0}\lambda=40-0{,}6\cdot 40\cdot 1=16\,\text{MPa}$,
$\sigma_z(\lambda=0)=\mu_2\sigma_{\omega0}(1-2\lambda)=0{,}2\cdot 40\cdot(1-2\cdot 0)=8\,\text{MPa}$,
$\sigma_z(\lambda=1)=\mu_2\sigma_{\omega0}(1-2\lambda)=0{,}2\cdot 40\cdot(1-2\cdot 1)=-8\,\text{MPa}$.

b) Berechnung der maximalen Vergleichsspannung nach *Mohr:*

$\lambda=0$, $\quad\sigma_V(Mohr)=\sigma_{\omega0}-0{,}2\sigma_{\omega0}=0{,}8\sigma_{\omega0}=0{,}8\cdot 40=32$ MPa,
$\lambda=1$, $\quad\sigma_V(Mohr)=0{,}4\sigma_{\omega0}+0{,}2\sigma_{\omega0}=0{,}6\sigma_{\omega0}=0{,}6\cdot 40=24$ MPa,

$\sigma_{V\max}(Mohr)=32$ MPa.

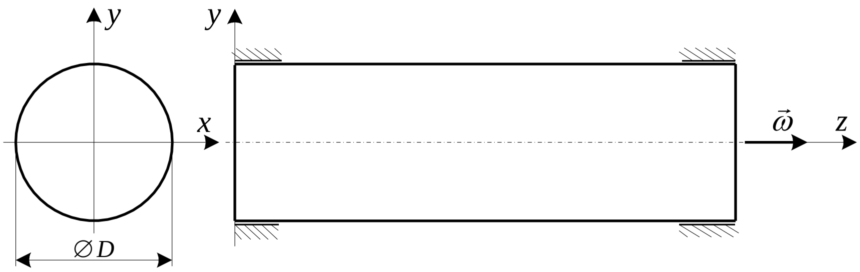
c) Ermittlung der zulässigen maximalen Drehzahl der Welle, wenn $\sigma_{zul}=80$ MPa ist:

$$\sigma_{V\max}(Mohr)=0{,}8\sigma_{\omega0}\le\sigma_{zul}\qquad \sigma_{zul}\ge 0{,}8\sigma_{\omega0}=0{,}8\frac{(3-2\nu)}{(1-\nu)}\frac{\rho}{8}(R_A\,\omega)^2$$

$$\omega_{\max}=\sqrt{\frac{\sigma_{zul}(1-\nu)}{0{,}1(3-2\nu)\rho R_A^2}}=\sqrt{\frac{80\cdot 10^6\cdot 0{,}75}{0{,}1\cdot 2{,}5\cdot 8\cdot 10^3\cdot 0{,}2^2}}=866\text{ rad/s},$$

$$\omega_{\max}=\frac{2\pi n_{\max}}{60}\quad\Rightarrow\quad n_{\max}=\frac{30\,\omega}{\pi}=\frac{30}{3{,}141}866=8269\ \text{U/min}.$$

Aufgabe 6.: Schnell rotierende Welle



Gegeben:

Eine rotierende Welle mit dem Durchmesser D, die sich mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω dreht.

$D=600\,\text{mm}$, $\omega=400\frac{1}{s}$, $\nu=1/3$

$\rho=8000\,\text{kg/m}^3$, $\sigma_{zul}=110\,\text{MPa}$.

Aufgabe:

a) Grafische Darstellung der Spannungsdiagramme $\sigma_R(\lambda),\sigma_\varphi(\lambda)$ und $\sigma_z(\lambda)$.
b) Ermittlung der Matrix des Spannungstensors in Zylinder-Koordinaten an den Punkten P mit dem Radius $R_1=100\,\text{mm}$.
c) Veranschaulichung des Spannungszustandes an den Punkten P mittels des elementaren Würfels.
d) Sicherheitsnachweis der Welle nach der *Mohrschen*-Theorie.

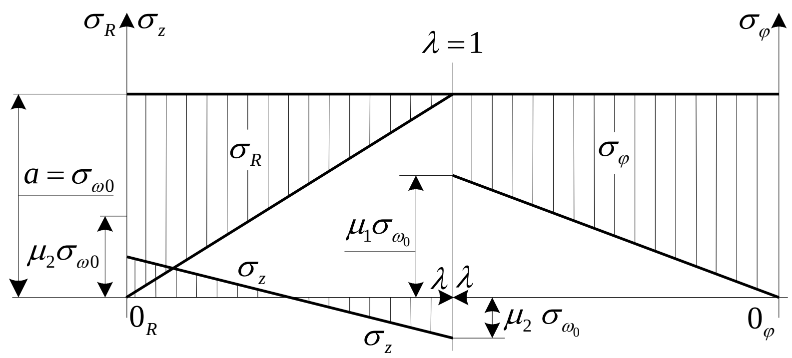
Lösung:

a) Grafische Darstellung der Spannungsdiagramme $\sigma_R(\lambda),\sigma_\varphi(\lambda)$ und $\sigma_z(\lambda)$:

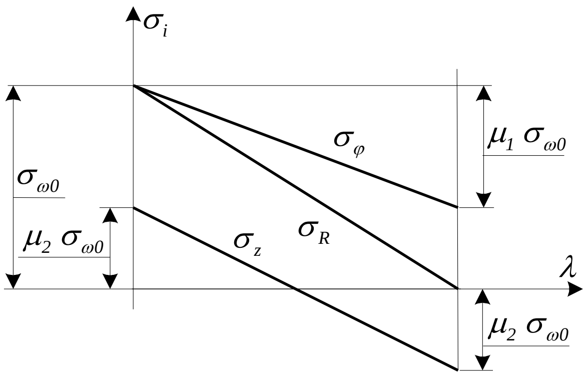
$$\left.\begin{aligned}\sigma_R&=a-\sigma_{\omega0}\lambda\\ \sigma_\varphi&=a-\mu_1\sigma_{\omega0}\lambda\\ \sigma_z&=\mu_2\sigma_{\omega0}(1-2\lambda)\end{aligned}\right\},\ \lambda=\frac{R^2}{R_A^2},\quad R_A=0{,}3\,\text{m}.\qquad \mu_1=\frac{1+2\nu}{3-2\nu}=\frac{1+2\cdot 0.333}{3-2\cdot 0{,}333}=0{,}714,\quad \mu_2=\frac{2\nu}{3-2\nu}=\frac{2\cdot 0{,}333}{3-2\cdot 0{,}333}=0{,}286.$$

$$\sigma_{\omega0}=\frac{(3\text{-}2\nu)}{(1\text{-}\nu)}\frac{\rho}{8}(R_A\,\omega)^2=3{,}5\cdot\frac{8000}{8}\cdot 120^2=3{,}5\cdot 1{,}44\cdot 10^7=5{,}04\cdot 10^7\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2},\quad \sigma_{\omega0}=50{,}4\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

Die Spannungsdiagramme:



Die Diagramme in anderer Form:



Vergleichsspannungen:

$\sigma_V\left(\lambda = 0\right) = \sigma_{\omega 0}\left(1 - \mu_2\right)$,

$\sigma_V\left(\lambda = 0\right) = 0{,}714\sigma_{\omega 0}$,

$\sigma_V\left(\lambda = 1\right) = \sigma_{\omega 0}\left(1 - \mu_1 + \mu_2\right)$,

$\sigma_V\left(\lambda = 1\right) = 0{,}572\sigma_{\omega 0}$.

b) Ermittlung der Matrix des Spannungstensors in Zylinder-Koordinaten an den Punkten *P* mit dem Radius $R_1 = 100\,\text{mm}$:

$$\lambda_1 = \frac{R_1^2}{R_A^2} = \frac{1^2}{3^2} = \frac{1}{9}$$

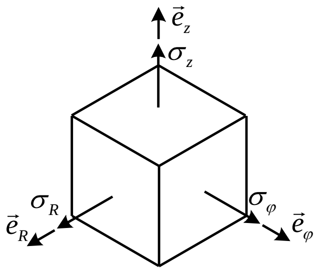
$$\sigma_R(R_1) = \sigma_{\omega_0}\left(1 - \lambda_1\right) = \frac{8}{9}\sigma_{\omega_0} = \frac{8}{9}50{,}4 = 44{,}8\ \text{MPa},$$

$$\sigma_\varphi(R_1) = \sigma_{\omega_0}\left(1 - \mu_1\lambda_1\right) = 50{,}4\left(1 - \frac{0{,}714}{9}\right) = 46{,}4\ \text{MPa},$$

$$\sigma_z(R_1) = \mu_2\sigma_{\omega_0}\left(1 - 2\lambda_1\right) = 0{,}286 \cdot 50{,}4\left(1 - \frac{2}{9}\right) = 11{,}2\ \text{MPa}.$$

Der Spannungstensor:
$$\underline{\underline{F}}(\lambda_1) = \begin{bmatrix} 44{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 46{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & 11{,}2 \end{bmatrix} \text{MPa}\,.$$

c) Veranschaulichung des Spannungszustandes an den Punkten *P* mittels des elementaren Würfels:



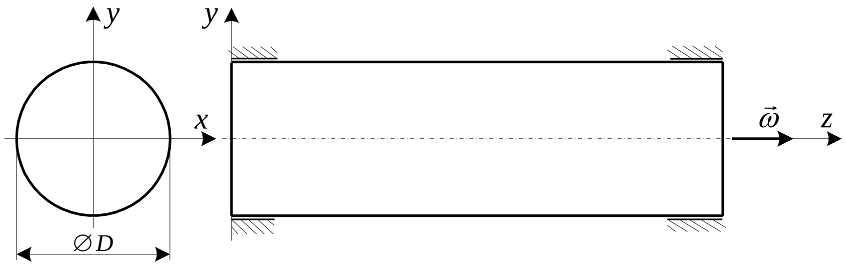
d) Sicherheitsnachweis der Welle nach der *Mohrschen*-Theorie:

$\sigma_{V\max} \le \sigma_{zul}$

$\sigma_{V\max} = \left(\sigma_\varphi - \sigma_z\right)_{\lambda=0} = 0{,}714\,\sigma_{\omega_0} = 35{,}99\ \text{MPa} \le \sigma_{zul} = 110\ \text{MPa}$.

Eine ausreichende Festigkeit der Welle ist gewährleistet.

Aufgabe 7.: Schnell rotierende Welle



Gegeben:

Eine rotierende Welle mit dem Durchmesser D, die sich mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω dreht.

$D = 400\text{ mm}$, $\sigma_{\omega_0} = 40\text{MPa}$,

$\rho = 8000\text{ kg/m}^3$, $\nu = 0{,}25$.

Aufgabe:

a) Grafische Darstellung der Spannungsdiagramme $\sigma_R(\lambda), \sigma_\varphi(\lambda)$ und $\sigma_z(\lambda)$.

b) Berechnung der maximalen Vergleichsspannung nach *Mohr* $\sigma_{V\max}(Mohr)$.

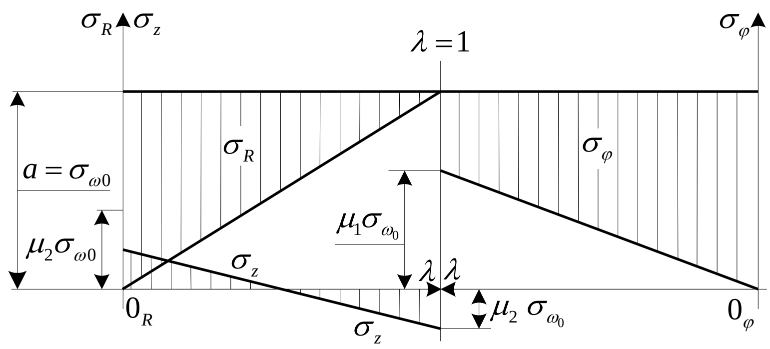
c) Ermittlung der zulässigen maximalen Drehzahl der Welle, wenn $\sigma_{zul} = 80$ MPa ist.

d) Bei welcher konzentrischen Bohrung mit dem Radius R_I ist noch eine ausreichende Festigkeit der Welle bei der gegebenen Winkelgeschwindigkeit ω gewährleistet?

Lösung:

a) Grafische Darstellung der Spannungsdiagramme $\sigma_R(\lambda), \sigma_\varphi(\lambda)$ und $\sigma_z(\lambda)$:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_R &= a - \sigma_{\omega_0}\lambda \\ \sigma_\varphi &= a - \mu_1\sigma_{\omega_0}\lambda \\ \sigma_z &= \mu_2\sigma_{\omega_0}(1-2\lambda) \end{aligned}\right\} \quad \lambda = \frac{R^2}{R_A^2}, \quad R_A = 0{,}2\text{ m} \qquad \begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1+2\nu}{3-2\nu} = \frac{1+2\cdot 0.25}{3-2\cdot 0{,}25} = 0{,}6, \\ \mu_2 &= \frac{2\nu}{3-2\nu} = \frac{2\cdot 0{,}25}{3-2\cdot 0{,}25} = 0{,}2\,. \end{aligned}$$



b) Berechnung der maximalen Vergleichsspannung nach *Mohr* $\sigma_{V\max}(Mohr)$*:*

$$\sigma_{V\max} = \left(\sigma_\varphi - \sigma_z\right)_{\lambda=0} = \sigma_{\omega_0}(1-\mu_2) = 0{,}8\cdot 40 = 32\text{ MPa}\,.$$

c) Ermittlung der zulässigen maximalen Drehzahl der Welle, wenn $\sigma_{zul} = 80$ MPa ist:

$$\sigma_{V\max} \le \sigma_{zul} \qquad \sigma_{zul} = 80\text{ N/mm}^2 = 8\cdot 10^5\text{ N/m}^2\,.$$

$$\sigma_{\omega_0}(1-\mu_2) \le \sigma_{zul} \quad \Rightarrow \quad (1-\mu_2)\frac{3-2\nu}{1-\nu}\frac{\rho}{8}\left(R_k\omega_{\max}\right)^2 = \sigma_{zul}\,.$$

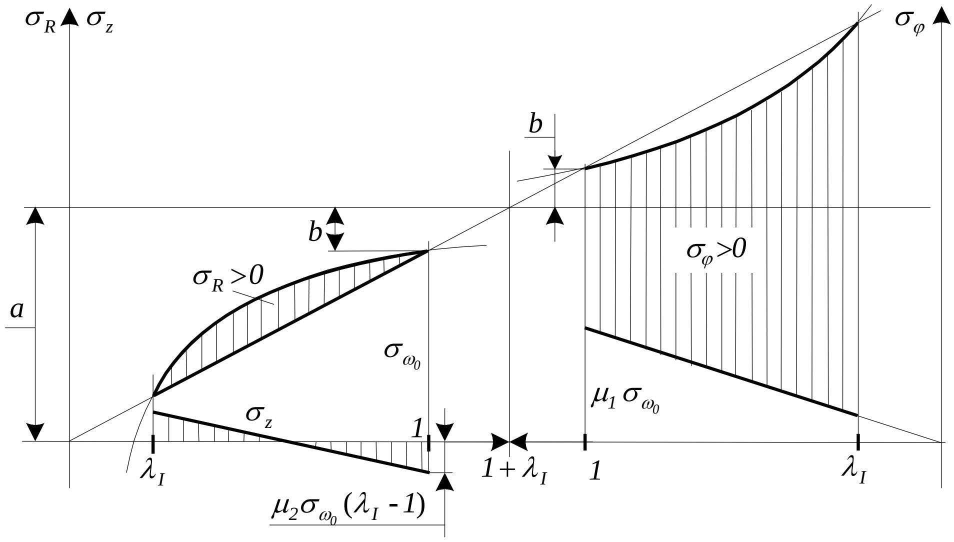
$$R_A\omega_{\max} = \sqrt{\frac{\sigma_{zul}}{1-\mu_2}\frac{8}{\rho}\frac{1-\nu}{3-2\nu}} = \sqrt{10^6\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}3} = 10\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \omega_{\max} = \frac{10\sqrt{3}}{0{,}2} = 50\sqrt{3}\,\frac{1}{s}\,.$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi\frac{n}{60} \quad \Rightarrow \quad n_{\max} = \frac{30\omega_{\max}}{\pi} = \frac{1500\sqrt{3}}{3{,}14} = 821\,\frac{\text{U}}{\text{min}}\,.$$

d) Bei welcher konzentrischen Bohrung mit dem Radius R_I ist noch eine ausreichende Festigkeit der Welle bei der gegebenen Winkelgeschwindigkeit ω gewährleistet?

Spannungsverteilung bei einer Bohrung:

$$\sigma_R = a - \frac{b}{\lambda} - \sigma_{\omega_0}\lambda\,,\qquad \sigma_\varphi = a + \frac{b}{\lambda} - \mu_1\sigma_{\omega_0}\lambda\,,\qquad \sigma_z = \mu_2\sigma_{\omega_0}\left(1+\lambda_I - 2\lambda\right).$$



$$\sigma_{V\max} = \sigma_\varphi\left(\lambda_I\right) = \sigma_{\omega_0}\left(2+\lambda_I\right) - \mu_1\sigma_{\omega_0}\lambda_I\,,$$

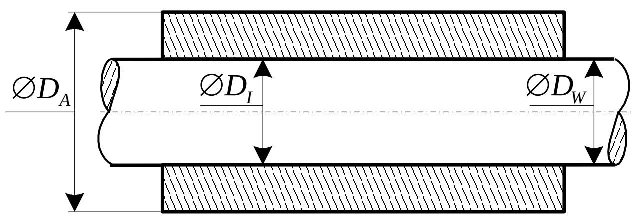
$$\sigma_{V\max} = 2\sigma_{\omega_0} + \lambda_I\left(1-\mu_1\right)\sigma_{\omega_0} \le \sigma_{zul}\,,$$

$$\lambda_I = \frac{\sigma_{zul} - 2\sigma_{\omega_0}}{\left(1-\mu_1\right)\sigma_{\omega_0}} = \frac{80-80}{40\left(1-0{,}6\right)} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_I = 0\,.$$

Hinsichtlich der Festigkeit ist es nicht möglich, die Welle mit einer Bohrung zu fertigen.

Aufgabe 8.: Schnell rotierende Buchse

Realisierung: die Buchse mit dem Außendurchmesser D_A und dem Innendurchmesser D_I wird erhitzt, auf die Welle aufgezogen und dann abgekühlt. In diesem Fall ist die Überlappung $\delta = \left(D_t - D_I\right)/2$. Nach der Abkühlung beginnt man, die Konstruktion schnell zu drehen. Annahme: das Material der Buchse ist linear elastisch und der Stoff der Welle ist vollständig starr.



Gegeben:

$D_A = 200\sqrt{2}$ mm, $D_t = 200$ mm, $\delta = 0{,}2175$ mm,

$E = 2\cdot 10^5$ MPa, $\nu = 0{,}25$, $\rho = 8\cdot 10^3\,\text{kg/m}^3$,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2\cdot 10^5}{2{,}5} = 0{,}8\cdot 10^5\,\text{MPa}\,.$$

Aufgabe:

a) Ermittlung des Druckes an der inneren Oberfläche der Buchse, der infolge der Überlappung auftritt.

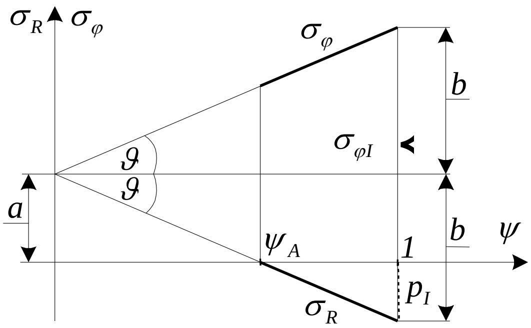
b) Bei welcher Drehzahl löst sich die Buchse von der Welle ab, wenn man die Buchse als dickwandiges Rohr / schnell rotierende Rohrwelle modelliert?

Lösung:

a) Ermittlung des Druckes an der inneren Oberfläche der Buchse, der infolge der Überlappung auftritt:

$$R_I = 100\,\text{mm},\qquad R_A = 100\sqrt{2}\,\text{mm},\qquad \psi_A = \lambda_I = \left(\frac{R_I}{R_A}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Das Spannungsdiagramm des nicht rotierenden Rohres:



Die Überlappung: $\delta = \dfrac{D_t - D_I}{2} = u_I = R_I \varepsilon_{\varphi I} = R_t \varepsilon_\varphi(\psi = 1) = \dfrac{R_t}{2G}\left[\sigma_{\varphi I} - \nu\left(\sigma_{RI} + \sigma_{\varphi I}\right)\right]$,

$$\delta = \frac{R_t}{2G}\left[\sigma_{\varphi I} - \nu\left(-p_I + \sigma_{\varphi I}\right)\right].$$

Aus dem Spannungsdiagramm: $\sigma_{\varphi I} = \sigma_\varphi(\psi = 1) = 2b - p_I = 2\dfrac{p_I}{1-\psi_I} - p_I = p_I \dfrac{1+\psi_A}{1-\psi_A}$.

$$\delta = \frac{R_t}{2G}\left[p_I \frac{1+\psi_A}{1-\psi_A} - \nu p_I \left(-1 + \frac{1+\psi_A}{1-\psi_A}\right)\right] = \frac{R_t}{G} p_I \left[\frac{1+\psi_A(1-2\nu)}{1-\psi_A}\right].$$

Der Druck aus der Überlappung: $p_I = \dfrac{\delta}{\dfrac{R_t}{G}\left[\dfrac{1+\psi_A(1-2\nu)}{1-\psi_A}\right]}$.

b) Bei welcher Drehzahl löst sich die Buchse von der Welle ab, wenn man die Buchse als dickwandiges Rohr / schnell rotierende Rohrwelle modelliert?

Das Spannungsdiagramm der schnell rotierenden Buchse:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_R &= a - \frac{b}{\lambda} - \sigma_{\omega 0}\lambda \\ \sigma_\varphi &= a + \frac{b}{\lambda} - \mu_1 \sigma_{\omega 0}\lambda \\ \sigma_z &= \mu_2 \sigma_{\omega 0}\left(1 + \lambda_I - 2\lambda\right) \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1+2\nu}{3-2\nu} = \frac{1+2\cdot 0.25}{3-2\cdot 0,25} = 0,6, \\ \mu_2 &= \frac{2\nu}{3-2\nu} = \frac{2\cdot 0,25}{3-2\cdot 0,25} = 0,2. \end{aligned}$$

Randbedingungen: $\sigma_R\left(\lambda = 1\right) = 0 = a - b - \sigma_{\omega 0}$,

$$\sigma_R\left(\lambda = \lambda_I\right) = -p_I = a - \frac{b}{\lambda_I} - \sigma_{\omega 0}\lambda_I .$$

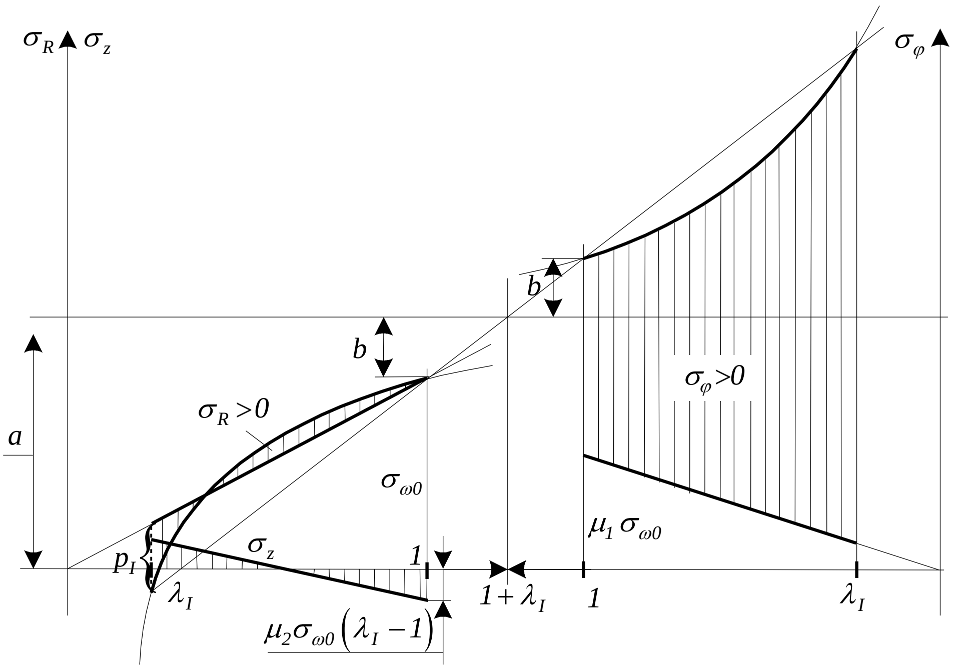
Spannungszustand an dem Innenradius:

$\sigma_R(\lambda_I) = -p_I$,

$\sigma_z(\lambda_I) = \mu_2 \sigma_{\omega 0}\left(1 - \lambda_I\right) = 0,2 \cdot 0,5 \cdot \sigma_{\omega 0} = 0,1 \cdot \sigma_{\omega 0}$,

$\sigma_\varphi(\lambda_I) = \sigma_{\omega 0} + (1+\lambda_I)\dfrac{\sigma_{\omega 0} - p_I}{1-\lambda_I} - \sigma_{\omega 0}\mu_1\lambda_I$.

Das Spannungsdiagramm für die Schrumpfverbindung:



Bei Ablösung: $p_I = 0$ und $u_R(R_I) = \delta$.

Verzerrungszustand an der Stelle $\lambda = \lambda_I$ bei der Ablösung:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2G}\left(\underline{\underline{F}} - \frac{F_I}{m+1}\underline{\underline{E}}\right); \quad F_I = \sigma_\varphi + \sigma_z = 2,3\sigma_{\omega 0}, \quad 2G = E\frac{1}{1+\nu} = 2\cdot\frac{4}{5}\cdot 10^5 = 1,6\cdot 10^5\,\text{MPa}.$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{2G}\left(\sigma_\varphi - \nu\frac{\sigma_\varphi + \sigma_z}{1+\nu}\right) = \frac{1}{2G}\left(2,2\sigma_{\omega 0} - \frac{2,3}{5}\sigma_{\omega 0}\right),$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{10}{16}\cdot 10^{-5}\cdot 1,74\sigma_{\omega 0} = 1,0875\cdot 10^{-5}\sigma_{\omega 0}$$

Ablösung:

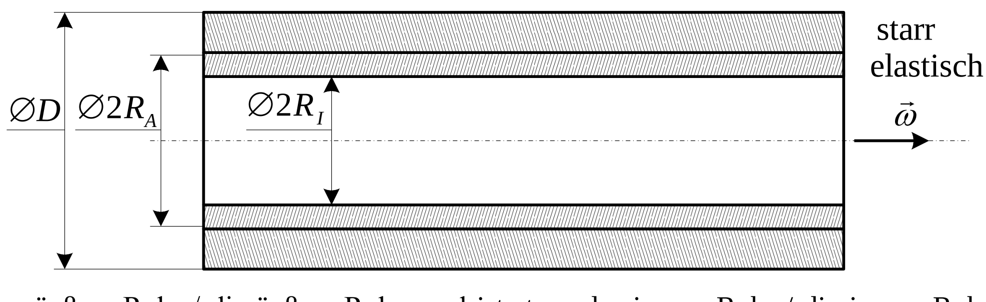
$$\delta = u_R(R_I) = R_I\varepsilon_\varphi\left(R_I\right) = \frac{D_I}{2}\varepsilon_\varphi\left(R_I\right) = 100\cdot 1,0875\cdot 10^{-5}\sigma_{\omega 0},$$

$$0,2175 = 10,875\cdot 10^{-4}\sigma_{\omega 0} \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_{\omega_0} = 200\ \text{N/mm}^2 = 2\cdot 10^8\,\text{N/m}^2.$$

$$\sigma_{\omega_0} = \frac{3-2\nu}{1-\nu}\frac{\rho}{8}\left(R_A\omega\right)^2 = 2\cdot 10^8, \qquad \left(R_A\omega\right)^2 = 0,6\cdot 10^5 = 6\cdot 10^4, \qquad R_A\omega = 100\sqrt{6}\,,$$

$$\omega_l = \frac{100\sqrt{6}}{0,1\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\pi f = 2\pi\frac{n}{60} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{30}{\pi}\omega \quad \Rightarrow \quad n_l = \frac{3\cdot 10^3}{3,1415}\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = 1\,658,9\,\frac{\text{U}}{\text{min}}.$$

Aufgabe 9.:Schnell rotierende doppelwandige Rohrwelle



Gegeben: Das äußere Rohr / die äußere Rohrwand ist starr, das innere Rohr / die innere Rohrwand ist elastisch. Die Rohre / Rohrwände sind ohne Überlappung zusammengesetzt. Das so aufgebaute doppelwandige Rohr dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Für das innere Rohr / die innere Rohrwand: $\lambda_I = 0{,}5$, $\sigma_{\omega 0} = 60$ N/mm^2, $\nu = 0{,}25$.

Aufgabe:

a) Charakteristische Darstellung der Spannungsverteilungen im inneren Rohr / in der inneren Rohrwand.

b) Ermittlung des Druckes p_A, der an der Stelle R_A entsteht.

c) Berechnung der maximalen Vergleichsspannung nach *Mohr* $\sigma_{V\max}(Mohr)$ im inneren Rohr / in der inneren Rohrwand.

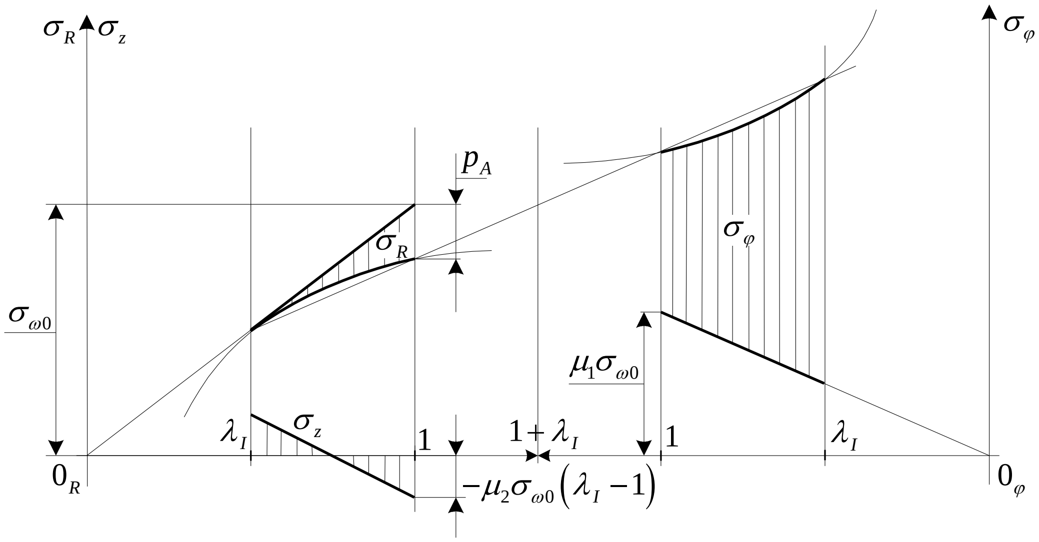
Lösung:

a) Charakteristische Darstellung der Spannungsverteilungen im inneren Rohr / in der inneren Rohrwand:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_R &= a - \frac{b}{\lambda} - \sigma_{\omega 0}\lambda \\ \sigma_\varphi &= a + \frac{b}{\lambda} - \mu_1\sigma_{\omega 0}\lambda \\ \sigma_z &= \mu_2\sigma_{\omega 0}\left(1+\lambda_I - 2\lambda\right)\end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned}\mu_1 &= \frac{1+2\nu}{3-2\nu} = \frac{1+2\cdot 0.25}{3-2\cdot 0{,}25} = 0{,}6, \\ \mu_2 &= \frac{2\nu}{3-2\nu} = \frac{2\cdot 0{,}25}{3-2\cdot 0{,}25} = 0{,}2\,.\end{aligned}$$

Randbedingungen:
$$\sigma_R\left(\lambda = 1\right) = -p_A = a - b - \sigma_{\omega 0}\,,$$
$$\sigma_R\left(\lambda = \lambda_I\right) = 0 = a - \frac{b}{\lambda_I} - \sigma_{\omega 0}\lambda_I\,.$$

Spannungsverteilung:



b) Ermittlung des Druckes p_A, der an der Stelle R_A entsteht:

Spannungen an der äußeren Oberfläche $(\lambda = 1)$ des inneren Rohres / der inneren Rohrwand:

$$\sigma_R = -p_A, \quad \sigma_z = -\mu_2\sigma_{\omega 0}\left(1-\lambda_I\right) = -6\text{ MPa},$$

$$\sigma_\varphi = \left[\sigma_{\omega_0} - \frac{p_A}{1-\lambda_I}\right]2\lambda_I + \left(\sigma_{\omega 0} - p_A\right) - \mu_1\sigma_{\omega 0} = \sigma_{\omega 0}\left(2\lambda_I + 1 - \mu_1\right) - p_A\left(\frac{2\lambda_I}{1-\lambda_I} + 1\right),$$

$$\sigma_\varphi = 60\left(2-0{,}6\right) - 3p_A = 84 - 3p_A \text{ MPa}.$$

Verzerrungen an der äußeren Oberfläche $(\lambda = 1)$ des inneren Rohres /der inneren Rohrwand:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2G}\left(\underline{\underline{F}} - \nu\frac{F_I}{1+\nu}\underline{\underline{E}}\right), \qquad 2G = E\frac{1}{1+\nu}, \qquad 2G = 1{,}6\cdot 10^5 \text{ MPa}.$$

$$F_I = \sigma_R + \sigma_\varphi + \sigma_z = -p_A - 6 + \left(84 - 3p_A\right), \qquad F_I = 78 - 4p_A\,.$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{2G}\left(\sigma_\varphi - \frac{\nu F_I}{1+\nu}\right) = \frac{1}{2G}\left[(84-3p_A)-0,2(78-4p_A)\right].$$

$$\varepsilon_\varphi(R_A) = \varepsilon_\varphi(\lambda=1) = \frac{1}{2G}(84-17,6-2,2p_A).$$

$$u(R_A) = 0 = R_A\varepsilon_\varphi(R_A) \quad \Rightarrow \quad 0 = 66,4-2,2p_A \quad \Rightarrow \quad p_A = \frac{66,4}{2,2} = 31,09\ \text{MPa}.$$

c) Berechnung der maximalen Vergleichsspannung nach *Mohr* $\sigma_{V\max}(Mohr)$ im inneren Rohr / in der inneren Rohrwand:

Ermittlung der Spannungen an den inneren und äußeren Oberflächen des inneren Rohres / der inneren Rohrwand:

$$\lambda = \lambda_I \qquad \sigma_\varphi(\lambda_I) = \left[\sigma_{\omega 0} - \frac{p_A}{1-\lambda_I}\right](1+\lambda_I) + \sigma_{\omega 0} - \mu_1\lambda_I\sigma_{\omega 0} =$$

$$= \sigma_{\omega_0}(2+\lambda_I-\mu_1\lambda_I) - p_A\frac{1+\lambda_I}{1-\lambda_I} = 168-47,43\cdot 3 = 25,71\ \text{MPa}.$$

$$\sigma_V(\lambda_I) = \sigma_\varphi(\lambda_I) = 25,71\ \text{MPa}.$$

$$\lambda = \lambda_I \qquad \sigma_\varphi(\lambda=1) = 84-93,3 = -9,7\ \text{MPa},$$

$$\sigma_z(\lambda=1) = -6\ \text{MPa}$$

$$\sigma_R(\lambda=1) = -p_A = -31,09\ \text{MPa}$$

$$\sigma_V(\lambda=1) = \sigma_z(\lambda=1) - \sigma_R(\lambda=1) = 25,09\ \text{MPa}.$$

$$\sigma_{V\max}(Mohr) = 25,71\ \text{MPa}.$$