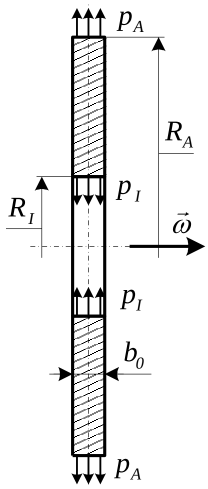
ÜBUNG 9.: KREIS- UND KREISRINGSCHEIBEN

Aufgabe 1.: Schnell rotierende Kreisringscheibe



Gegeben:

Das Material, die Abmessungen und die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ der im Bild zu sehenden schnell rotierenden Kreisringscheibe:

$E = 2\cdot 10^5$ MPa, $\nu = 1/3$, $\rho = 8000$ kg/m^3, $b_0 = 20$ mm, $R_A = 200$ mm,
$R_I = 100$ mm, $\omega = 300$ rad/s = konst., $p_A = p_I = 0$, $\sigma_{zul} = 80$ MPa.

Aufgabe:

a) Grafische Darstellung des Spannungsdiagrammes der schnell rotierenden Scheibe.

b) Ermittlung der Matrix des Spannungstensors in Zylinder-Koordinaten an der Stelle $R = R_A$.

c) Festigkeitsnachweis der Scheibe nach der *Mohrschen*-Theorie.

d) Berechnung der Änderung des Innendurchmessers ΔD_I der Scheibe.

Lösung:

a) Grafische Darstellung des Spannungsdiagrammes der schnell rotierenden Scheibe:

$$\lambda_I = \frac{R_I^2}{R_A^2} = \left(\frac{100}{200}\right)^2 = 0{,}25\,, \quad \mu_3 = \frac{3\nu+1}{3+\nu} = \frac{3\cdot(1/3)+1}{3+(1/3)} = 0{,}6\,.$$

$$\bar{\sigma}_{\omega 0} = \frac{(3+\nu)}{\nu}\frac{\rho}{8}(R_A\,\omega)^2 = \frac{(3+0{,}3\dot{3})\cdot 8\cdot 10^3}{0{,}3\dot{3}\cdot 8}(0{,}2\cdot 300)^2 = 36\cdot 10^6 \text{ Pa} = 36 \text{ MPa}\,.$$

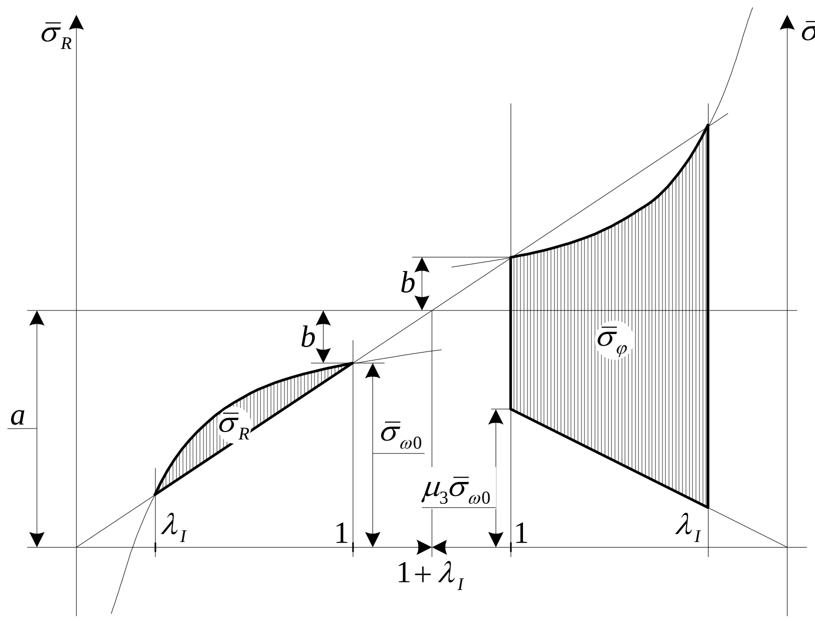
Spannungsverläufe für die Durchschnittsspannungen:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\sigma}_R &= a - \frac{b}{\lambda} - \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda \\ \bar{\sigma}_\varphi &= a + \frac{b}{\lambda} - \mu_3\bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda \\ \bar{\sigma}_z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Randbedingungen:

$\bar{\sigma}_R(\lambda = \lambda_I) = p_I = 0$,

$\bar{\sigma}_R(\lambda = 1) = p_A = 0$.



b) Ermittlung der Matrix des Spannungstensors in Zylinder-Koordinaten an der Stelle $R = R_A$:

Durchschnittsspannungen:

$\bar{\sigma}_R(\lambda = 1) = p_A = 0$, $\quad \bar{\sigma}_\varphi(\lambda = 1) = \bar{\sigma}_{\omega 0}(1 + 2\lambda_I - \mu_3) = 36\cdot 0{,}9 = 32{,}4$ MPa, $\quad \bar{\sigma}_z(\lambda = 1) = 0$.

Tensor der Durchschnittsspannungen: $\quad \left[\underline{\underline{\bar{F}}}_P\right]_{R\varphi z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ MPa.

c) Festigkeitsnachweis der Scheibe nach der *Mohrschen*-Theorie:

$\bar{\sigma}_{V\max} = \bar{\sigma}_{\varphi}(\lambda_I) = \bar{\sigma}_{\omega 0}(2 + \lambda_I - \mu_3\lambda_I) = 36 \cdot 2{,}1 = 75{,}6 \text{ MPa}$.

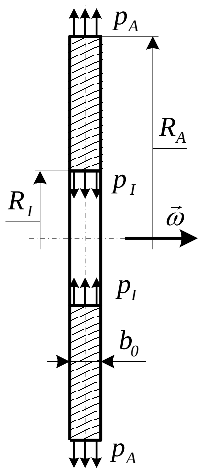
$\bar{\sigma}_{V\,max} = 75{,}6 \text{ MPa} < \sigma_{zul} = 80 \text{ MPa}$. Eine ausreichende Festigkeit der Scheibe ist gewährleistet.

d) Berechnung der Änderung des Innendurchmessers $\varDelta D_B$ der Scheibe:

Nach dem *Hookschem*-Gesetz: $\bar{\varepsilon}_{\varphi} = \frac{1}{2G}\left[\bar{\sigma}_{\varphi} - \frac{\nu}{1+\nu}\bar{\sigma}_{\varphi}\right] = \frac{1}{2G}\frac{1}{1+\nu}\bar{\sigma}_{\varphi} = \frac{\bar{\sigma}_{\varphi}}{E}$.

$$\Delta D_I = 2R_I\bar{\varepsilon}_{\varphi} = \frac{2R_I}{E}\bar{\sigma}_{\varphi}(\lambda_I) = \frac{200}{2\cdot 10^5}32{,}4 = 3{,}24\cdot 10^{-2} \text{ mm} = 32{,}4\ \mu\text{m}.$$

Aufgabe2.: Schnell rotierende Kreisringscheibe



Gegeben:

Das Material, die Abmessungen und die Drehzahl n der im Bild zu sehenden schnell rotierenden Kreisringscheibe:

$\nu = 0{,}33$, $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $R_A = 200 \text{ mm}$, $R_I = 20 \text{ mm}$, $p_A = p_I = 0$,

$n = 3000$ U/min=konst., $\sigma_{zul} = 100$ MPa .

Aufgabe:

a) Bestimmung der Durchschnittsspannungsverläufe $\bar{\sigma}_R(\lambda)$ und $\bar{\sigma}_{\varphi}(\lambda)$ der schnell rotierenden Scheibe.

b) Ermittlung des maximalen Wertes der Radialspannung $\bar{\sigma}_R(\lambda)$.

c) Bestimmung der zulässigen maximalen Drehzahl $n_{\max}$ der Scheibe.

Lösung:

a) Bestimmung der Durchschnittsspannungsverläufe $\bar{\sigma}_R(\lambda)$ und $\bar{\sigma}_{\varphi}(\lambda)$ der schnell rotierenden Scheibe:

$$\lambda_I = \frac{R_I^2}{R_A^2} = \left(\frac{20}{200}\right)^2 = 0{,}01, \qquad \mu_3 = \frac{3\nu+1}{3+\nu} = \frac{3\cdot(0{,}33)+1}{3+(0{,}33)} = 0{,}598, \qquad \omega = \frac{2\pi}{60}n = 314{,}2\ \frac{1}{\text{s}}$$

$$\bar{\sigma}_{\omega 0} = \frac{(3+\nu)}{\nu}\frac{\rho}{8}(R_A\,\omega)^2 = \frac{(3+0{,}33)\cdot 7{,}8\cdot 10^3}{0{,}33\cdot 8}(0{,}2\cdot 314{,}2)^2 = 38{,}85\cdot 10^6 \text{ Pa} = 38{,}85 \text{ MPa} .$$

Durchschnittsspannungen:

$$\bar{\sigma}_R = a - \frac{b}{\lambda} - \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda, \quad \bar{\sigma}_{\varphi} = a + \frac{b}{\lambda} - \mu_3\bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda, \quad \bar{\sigma}_z = 0 .$$

Randbedingungen: $\bar{\sigma}_R(\lambda = \lambda_I) = p_I = 0 \quad \Rightarrow \quad a - \frac{b}{0{,}01} = 0{,}01\,\bar{\sigma}_{\omega 0}$,

$\bar{\sigma}_R(\lambda = 1) = p_A = 0 \quad \Rightarrow \quad a - b = \bar{\sigma}_{\omega 0}$.

Lösung des Gleichungssystems: $b = \frac{\bar{\sigma}_{\omega 0}}{100} = 3{,}89$ MPa,

$a = 1{,}01\,\bar{\sigma}_{\omega 0} = 39{,}25$ MPa.

Nach dem Einsetzen der Konstanten a und b in die Spannungsfunktionen:

$$\bar{\sigma}_R(\lambda) = 39{,}25 - \frac{3{,}89}{\lambda} - 38{,}85\lambda\ ; \qquad \bar{\sigma}_{\varphi}(\lambda) = 39{,}25 + \frac{3{,}89}{\lambda} - 23{,}23\lambda\ ; \qquad \bar{\sigma}_z = 0.$$

b) Ermittlung des maximalen Wertes der Radialspannung $\bar{\sigma}_R(\lambda)$:

Ein Extremwert befindet sich dort, wo die erste Ableitung der Funktion $\bar{\sigma}_R(\lambda)$ verschwindet:

$\frac{d\bar{\sigma}_R(\lambda)}{d\lambda} = \frac{3{,}89}{\lambda^2} - 38{,}85 = 0, \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0{,}3164$ (ein negative Wurzel ergibt keinen physikalischen Sinn).

$$\bar{\sigma}_{R\max} = \bar{\sigma}_R(\lambda = 0{,}3164) = 39{,}25 - \frac{3{,}89}{0{,}3164} - 38{,}85 \cdot 0{,}3164 = 14{,}67 \text{ MPa} .$$

c) Bestimmung der zulässigen maximalen Drehzahl der Scheibe.

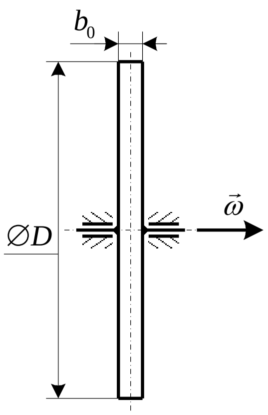
$$\bar{\sigma}_{V\max} = \bar{\sigma}_\varphi(\lambda_I) = (2 + \lambda_I - \mu_3\lambda_I)\bar{\sigma}_{\omega 0\max} = 2{,}004\, \bar{\sigma}_{\omega 0\max} \le \bar{\sigma}_{zul} = 100 \text{ MPa} ,$$

$$\bar{\sigma}_{\omega 0\max} \le \frac{100}{2{,}004} = 49{,}9 \text{ MPa} .$$

$$\bar{\sigma}_{\omega 0} = \frac{(3+\nu)}{\nu}\frac{\rho}{8}(R_A\,\omega)^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_{\max} = \sqrt{\frac{8\nu\bar{\sigma}_{\omega 0\max}}{(3+\nu)\rho R_A^2}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 0{,}33 \cdot 49{,}9 \cdot 10^6}{3{,}33 \cdot 7800 \cdot 0{,}04}} = 356\ \frac{1}{\text{s}} .$$

$$n_{\max} = \omega_{\max}\frac{60}{2\pi} = 3400\ \frac{\text{U}}{\text{min}} .$$

Aufgabe 3.: Schnell rotierende Kreisscheibe



Gegeben: Das Material, die Abmessungen und die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} =$ konstant einer Kreisscheibe: $D = 100$ mm, $b_0 = 10$ mm, $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 1/3$, $\bar{\sigma}_{\omega 0} = 30$ MPa, $\sigma_{zul} = 140$ MPa.

Aufgabe:

a) Bestimmung der Durchschnittsspannungsverläufe $\bar{\sigma}_R(\lambda)$ und $\bar{\sigma}_\varphi(\lambda)$ für die schnell rotierende Scheibe.
b) Grafische Darstellung der Durchschnittsspannungsverläufe.
c) Ermittlung des maximalen Wertes der Vergleichsspannung nach Mohr.
d) Bestimmung der zulässigen maximalen Drehzahl $n_{\max}$ der Scheibe.

Lösung:

a) Bestimmung der Durchschnittsspannungsverläufe $\bar{\sigma}_R(\lambda)$ und $\bar{\sigma}_\varphi(\lambda)$ für die schnell rotierende Scheibe:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\sigma}_R &= a - \frac{b}{\lambda} - \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda \\ \bar{\sigma}_\varphi &= a + \frac{b}{\lambda} - \mu_3\bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda \end{aligned}\right\} \qquad \lambda = \frac{R^2}{R_A^2} \ , \quad \mu_3 = \frac{1+3\nu}{3+\nu} = \frac{1+3 \cdot 0{,}3333}{3+0{,}3333} = 0{,}6 .$$

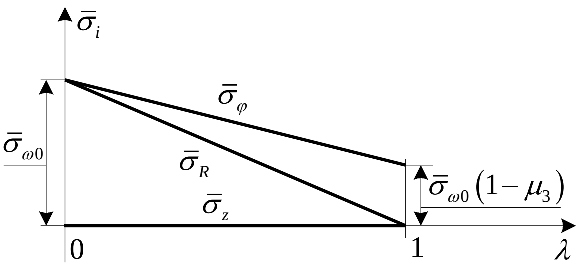
Bestimmung der Konstanten aus Randbedingungen:

$$\bar{\sigma}_R(\lambda = 1) = 0 = a - \bar{\sigma}_{\omega 0} \quad \Rightarrow \quad a = \bar{\sigma}_{\omega 0} = 30 \text{ MPa} .$$

$\bar{\sigma}_R(\lambda = 0)$ hat einen endlich großen Wert $\Rightarrow$ $b = 0$.

b) Grafische Darstellung der Durchschnittsspannungsverläufe.

Spannungsdiagramme:



Funktionen der Spannungsverläufe:

$$\bar{\sigma}_R(\lambda) = \bar{\sigma}_{\omega 0}(1-\lambda) = 30(1-\lambda)\ [\text{MPa}],$$
$$\bar{\sigma}_\varphi(\lambda) = \bar{\sigma}_{\omega 0}(1-\mu_3\lambda) = 30(1-0{,}6\lambda)\ [\text{MPa}],$$
$$\bar{\sigma}_z(\lambda) = 0 .$$

c) Ermittlung des maximalen Wertes der Vergleichsspannung nach Mohr:

Aus den Spannungsdiagrammen ist es zu sehen, daß der größte Unterschied zwischen der maximalen und minimalen Hauptspannung an der Stelle $\lambda = 0$ (das heißt in der Mitte der Scheibe) auftritt.

$\bar{\sigma}_{V\max}(Mohr) = \bar{\sigma}_R(\lambda = 0) - \bar{\sigma}_z(\lambda = 0) = \bar{\sigma}_{\omega 0} = 30$ MPa .

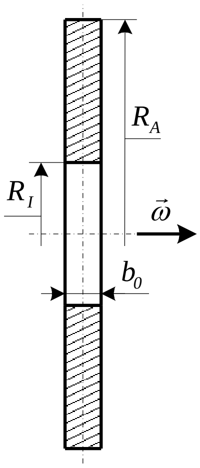
d) Bestimmung der zulässigen maximalen Drehzahl $n_{\max}$ der Scheibe:

$\sigma_{zul} \geq \bar{\sigma}_{V\max}(Mohr) = \bar{\sigma}_{\omega 0} \quad \Rightarrow \quad \bar{\sigma}_{\omega 0} = 140$ MPa .

Aus dem Ausdruck $\bar{\sigma}_{\omega 0} = \dfrac{(3+\nu)}{\nu}\dfrac{\rho}{8}(R_A\,\omega)^2$ kann man die maximale Drehzahl berechnen:

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{8\nu}{3+\nu}\frac{\bar{\sigma}_{\omega 0}}{\rho R_A^2}} = \sqrt{\frac{8/3}{10/3}\frac{140\cdot 10^6}{8000\cdot 0{,}0025}} = 2366\,\frac{1}{s}, \qquad \Rightarrow \qquad n_{\max} = \frac{60\omega_{\max}}{2\pi} = 22600\,\frac{\text{U}}{\min}.$$

Aufgabe 4.: Schnell rotierende Kreisringscheibe



Gegeben:

Das Material, der Außenradius einer schnell rotierenden Kreisringscheibe:
$E = 2\cdot 10^5$ MPa , $\nu = 1/3$, $\rho = 8000$ kg / m^3 , $R_A = 200$ mm , $\sigma_{zul} = 80$ MPa ,
$\vec{\omega} =$ konstant .

Aufgabe:

a) Grafische Darstellung der Spannungsverläufe für die schnell rotierende Scheibe.

b) Untersuchung, wie die maximale Drehzahl vom Durchmesser der Bohrung abhängt.

Lösung:

a) Grafische Darstellung der Spannungsverläufe für die schnell rotierende Scheibe:

$$\bar{\sigma}_{\omega 0} = \frac{(3+\nu)}{\nu}\frac{\rho}{8}(R_A\,\omega)^2 = \frac{(10/3)\cdot 8\cdot 10^3}{1/3\cdot 8}(0{,}2\cdot\omega)^2 = 400\omega^2, \qquad \mu_3 = \frac{3\nu+1}{3+\nu} = \frac{3\cdot(1/3)+1}{3+(1/3)} = 0{,}6.$$

Funktionen für die Spannungsverläufe:

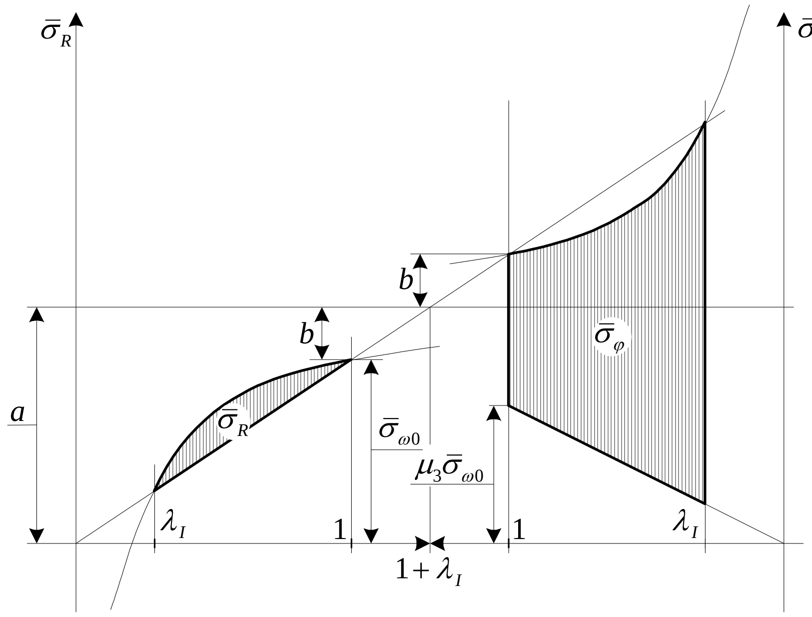
$$\left.\begin{aligned} \bar{\sigma}_R &= a - \frac{b}{\lambda} - \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda, \\ \bar{\sigma}_\varphi &= a + \frac{b}{\lambda} - \mu_3\bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda, \\ \bar{\sigma}_z &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Randbedingungen:

$\bar{\sigma}_R(\lambda = \lambda_I) = p_I = 0$,

$\bar{\sigma}_R(\lambda = 1) = p_I = 0$.

Spannungsdiagramm der schnell rotierenden Scheibe:



b) Untersuchung, wie die maximale Drehzahl vom Durchmesser der Bohrung abhängt.

Aus dem Spannungsdiagramm erhält man den maximalen Wert der *Mohrschen* Vergleichsspannung:

$$\bar{\sigma}_{V\max} = \bar{\sigma}_\varphi(\lambda_I) - \bar{\sigma}_z(\lambda_I) = \bar{\sigma}_{\omega 0}(2+\lambda_I-\mu_3\lambda_I) - 0 = 400\omega^2(2+0{,}4\lambda_I) \quad [\mathrm{MPa}].$$

Die Drehzahl kann nur erhöht werden, wenn die maximale Vergleichsspannung den zulässigen Spannungswert nicht erreicht.

$$\sigma_{zul} = 80\ \mathrm{MPa} = \bar{\sigma}_{V\max}(\omega_{\max}) = 400\omega_{\max}^2(2+0{,}4\lambda_I).$$

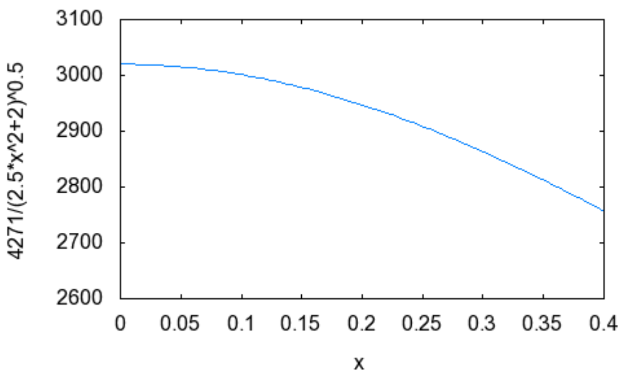
Berücksichtigt werden die Zusammenhänge $\lambda_I = \dfrac{R_I^2}{R_A^2} = \dfrac{R_I^2}{0{,}04} = 25R_I^2 = 6{,}25D_I^2$ und $\omega = \dfrac{2\pi}{60}n$:

$$80\cdot 10^6 = 400\left(\frac{2\pi}{60}n_{\max}\right)^2(2+0{,}4\cdot 6{,}25D_I^2) \qquad \Rightarrow \qquad n_{\max} = \frac{4271}{\sqrt{2+2{,}5D_I^2}}\left[\frac{\mathrm{U}}{\min}\right].$$

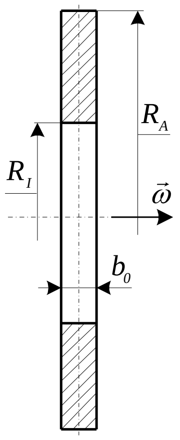
Der Durchmesser D_B muß in die Formel in m eingesetzt werden.

Grafische Darstellung der Funktion

$n_{\max} = n_{\max}(D_I)$:



Aufgabe 5.: Schnell rotierende Kreisringscheibe



Gegeben:

Die Abmessungen, das Material und die Belastung einer schnell rotierenden Kreisringscheibe:

$D_A = 400\,\text{mm}$, $D_I = 40\,\text{mm}$, $\rho = 7800\,\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $n = 3000\,\dfrac{\text{U}}{\text{min}} = \text{konstant}$, $\nu = 0{,}3$,

$\sigma_{zul} = 100\,\text{MPa}$.

Kennwerte aus den Materialeigenschaften und der Rotation:

$\bar{\sigma}_{\omega 0} = \dfrac{3+\nu}{8}8\left(R_A\omega\right)^2 = 12{,}701\,\text{MPa}$, $\quad \mu_3 = \dfrac{1+3\nu}{3+\nu} = \dfrac{1{,}9}{3{,}3} = 0{,}5757$.

Aufgabe:

a) Bestimmung und grafische Darstellung der Spannungsverläufe $\bar{\sigma}_R$, $\bar{\sigma}_\varphi$.

b) Bestimmung der zulässigen maximalen Drehzahl $n_{\max}$ der Scheibe.

Lösung:

a) Bestimmung und grafische Darstellung der Spannungsverläufe $\bar{\sigma}_R$, $\bar{\sigma}_\varphi$.

Die Spannungsverläufe:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\sigma}_R &= \text{a} - \frac{b}{\lambda} - \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda \\ \bar{\sigma}_\varphi &= \text{a} + \frac{b}{\lambda} - \mu_3\bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda \end{aligned}\right\} \qquad \lambda = \frac{R^2}{R_A^2}.$$

Randbedingungen:

$$\bar{\sigma}_R\left(\lambda = 1\right) = \text{a} - \frac{b}{\lambda} - \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda = 0, \qquad a - b - \bar{\sigma}_{\omega 0} = 0,$$

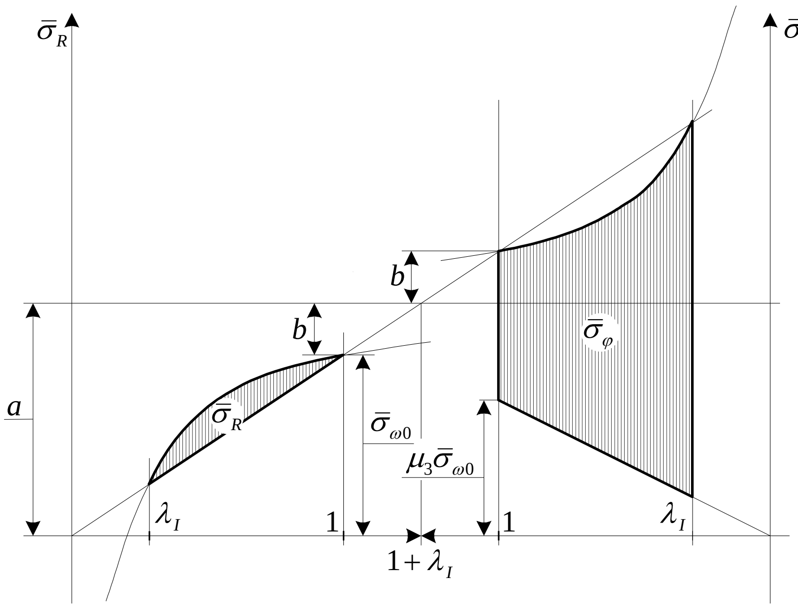
$$\bar{\sigma}_R\left(\lambda_I\right) = \text{a} + \frac{b}{\lambda_I} - \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda_I = 0. \qquad \Rightarrow \qquad \text{b} + \bar{\sigma}_{\omega 0} - \frac{b}{\lambda_I} - \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda_I = 0.$$

Aus der ersten Gleichung: $\quad \text{a} = b + \bar{\sigma}_{\omega 0} = 12{,}83\,\text{MPa}$.

Eingesetzt in die zweite Gleichung: $\text{b} + \bar{\sigma}_{\omega 0} - \dfrac{b}{\lambda_I} - \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda_I = 0$, $\quad \Rightarrow \quad \text{b}\dfrac{\lambda_I - 1}{\lambda_I} + \bar{\sigma}_{\omega 0}\left(1 - \lambda_I\right) = 0$.

Die Konstanten: $\quad \text{b} = \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda_I = 0{,}127$, $\quad \text{a} = b + \bar{\sigma}_{\omega 0} = 12{,}83\,\text{MPa}$.

Das Spannungsdiagramm:



Charakteristische Spannungswerte: $\overline{\sigma}_\varphi(\lambda=1)=5{,}7\,\text{MPa}$, $\quad \overline{\sigma}_\varphi(\lambda_I)=25{,}46\,\text{MPa}$.

Berechnung der maximalen Radialspannung $\overline{\sigma}_{R\max}$

$$\frac{d\overline{\sigma}_R}{d\lambda}=0=\frac{0{,}127}{\lambda^2}-12{,}7 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda=0{,}1 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{\sigma}_{R\max}=10{,}29\,\text{MPa}\,.$$

b) Bestimmung der zulässigen maximalen Drehzahl $n_{\max}$ der Scheibe:

Aus dem Spannungsdiagramm: $\overline{\sigma}_{V\max}=\overline{\sigma}_\varphi(\lambda_I)=\overline{\sigma}_{\omega 0}(2+\lambda_I)-\mu_3\overline{\sigma}_{\omega 0}\lambda_I=\overline{\sigma}_{\omega 0}(2+\lambda_I-\mu_3\lambda_I)$.

Dimensionierung: $\quad \overline{\sigma}_{V\max}\le\overline{\sigma}_{zul}$.

$$\overline{\sigma}_{\omega 0}\le\frac{\sigma_{zul}}{2+\lambda_I-\mu_3\lambda_I}=\frac{100}{2{,}0157}=49{,}61\,\text{MPa}$$

$$\omega_{\max}=\sqrt{\frac{8}{3+\nu}}\frac{1}{R_A}=\sqrt{\frac{8}{3{,}3}\cdot\frac{49{,}61\cdot 10^6}{7800}}\frac{1}{0{,}2}=621\frac{1}{s}\,.$$

$$n_{\max}=\frac{60\omega_{\max}}{2\pi}=\frac{60\cdot 621}{6{,}28}=5{,}932\,\frac{\text{U}}{\text{min}}\,.$$

Aufgabe 6.: Schnell rotierende Kreisscheibe

Gegeben: Die Abmessungen, das Material und die Drehzahl einer schnell rotierenden Kreisscheibe.

$$D=400\,\text{mm}, \quad \rho=7800\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad n=3000\,\frac{\text{U}}{\text{min}}, \quad \nu=0{,}3\,.$$

Aufgabe:

a) Ermittlung und Darstellung der Spannungsverläufe $\overline{\sigma}_R$, $\overline{\sigma}_\varphi$.

b) Bestimmung der zulässigen maximalen Drehzahl $n_{\max}$ der Scheibe, wenn $\sigma_{zul}=240\,\text{MPa}$.

Lösung:

a) Ermittlung und Darstellung der Spannungsverläufe $\overline{\sigma}_R$, $\overline{\sigma}_\varphi$:

An der Stelle $R=0$ sind $\sigma_R,\sigma_\varphi\neq\infty \quad \Rightarrow \quad b=0$.

$$\left.\begin{aligned}\overline{\sigma}_R&=\text{a}-\overline{\sigma}_{\omega 0}\lambda\\ \overline{\sigma}_\varphi&=\text{a}-\mu_3\overline{\sigma}_{\omega 0}\lambda\end{aligned}\right\}, \text{ wobei } \quad \overline{\sigma}_{\omega 0}=\frac{3+\nu}{8}\rho(R_A\omega)^2, \quad \mu_3=\frac{1+3\nu}{3+\nu}=\frac{1{,}9}{3{,}3}=0{,}5757\,.$$

$$R_A=\frac{D}{2}=0{,}2\,\text{m}, \qquad \omega=\frac{2\pi n}{60}=314{,}15\,\frac{1}{\text{s}}\,.$$

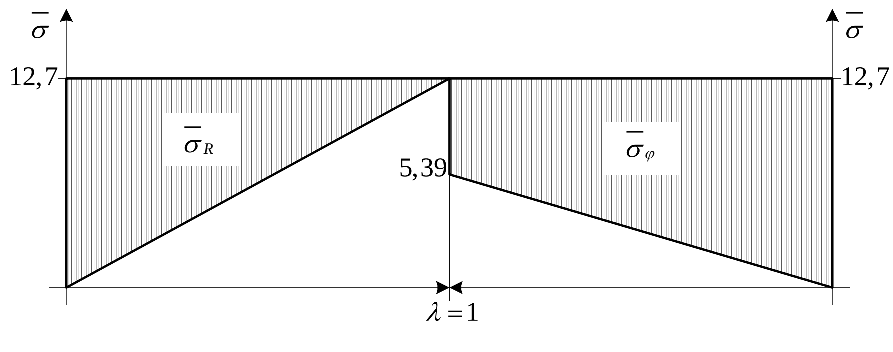
$$\overline{\sigma}_{\omega 0}=\frac{3{,}3}{8}7800(0{,}2\cdot 314{,}15)^2=12\,701\,431{,}64\,\text{Pa}\,.$$

$$\overline{\sigma}_{\omega 0}=12{,}701\,\text{MPa}\,.$$

Randbedingung: $\quad \overline{\sigma}_R(\lambda=1)=0=\text{a}-\overline{\sigma}_{\omega 0}$, $\qquad \text{a}=\overline{\sigma}_{\omega 0}=12{,}701\,\text{MPa}$.

Spannungsverläufe:

$$\left.\begin{aligned}\overline{\sigma}_R&=\overline{\sigma}_{\omega 0}(1-\lambda)\\ \overline{\sigma}_\varphi&=\overline{\sigma}_{\omega 0}(1-\mu_3\lambda)\end{aligned}\right\}$$



b) Bestimmung der zulässigen maximalen Drehzahl $n_{\max}$ der Scheibe, wenn $\sigma_{zul} = 240\,\text{MPa}$:

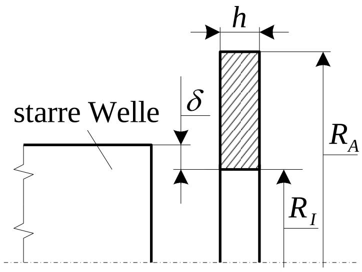
Mohrsche Theorie: $\overline{\sigma}_{V\max}(Mohr) = \left(\overline{\sigma}_1 - \underbrace{\overline{\sigma}_3}_{=0}\right) \le \sigma_{zul}$.

$$\overline{\sigma}_{V\max} = \overline{\sigma}_R(\lambda = 0) = \overline{\sigma}_\varphi(\lambda = 0) = \overline{\sigma}_{\omega 0} \le \sigma_{zul}.$$

$$\frac{3+\nu}{8}\rho R_A^2\left(\frac{2\pi n_{\max}}{60}\right)^2 \le \sigma_{zul}.$$

$$n_{\max} \le \sqrt{\frac{\sigma_F \cdot 8}{(3+\nu)\rho R_A^2}}\,\frac{60}{2\pi} = \sqrt{\frac{240\cdot 8}{3{,}3\cdot 7800\cdot 0{,}04}10^3}\,\frac{60}{6{,}283} = 13{,}041\,\frac{\text{U}}{\text{min}}.$$

Aufgabe 7.: Schnell rotierende starre Welle und elastische Kreisringscheibe



Gegeben:

Die Abmessungen und das Material einer Kreisringscheibe. Die Scheibe ist mit einer Überlappung / einem Schrumpfmaß δ auf eine starre Welle aufgeschrumpft.

$R_I = 20\,\text{mm}$, $R_A = 200\,\text{mm}$, $h = 40\,\text{mm}$,

$\delta = 0{,}02\,\text{mm}$, $\rho = 7800\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $\nu = 0{,}3$, $E = 2\cdot 10^{11}\,\text{Pa} = 2\cdot 10^5\,\text{MPa}$.

Aufgabe:

a) Ermittlung der Winkelgeschwindigkeit $\omega_{\max}$, bei der sich die Scheibe löst, die Überlappung / das Schrumpfmaß δ verschwindet.

b) Berechnung der Spannungen im Fall des Ablösens.

c) Wie groß ist der Druck p zwischen der Kreisscheibe und der Welle, wenn es keine Rotation gibt?

d) Wie groß muß die axiale Kraft zum Abziehen der Scheibe sein, wenn der Reibungskoeffizient $\mu = 0{,}25$ beträgt?

e) Welcher Zustand ist kritisch?

Lösung:

a) Ermittlung der Winkelgeschwindigkeit $\omega_{\max}$, für die sich die Scheibe ablöst, die Überlappung / das Schrumpfmaß δ verschwindet:

$$\lambda = \frac{R^2}{R_A^2},\quad \lambda_I = \frac{R_I^2}{R_A^2} = \left(\frac{1}{10}\right)^2 = 0{,}01,\qquad \mu_3 = \frac{1+3\nu}{3+\nu} = \frac{1{,}9}{3{,}3} = 0{,}5757.$$

Spannungsverteilung:
$$\left.\begin{aligned}\overline{\sigma}_R &= \text{a} - \frac{b}{\lambda} - \overline{\sigma}_{\omega 0}\lambda,\\ \overline{\sigma}_\varphi &= \text{a} + \frac{b}{\lambda} - \mu_3\overline{\sigma}_{\omega 0}\lambda.\end{aligned}\right\},\ \text{wobei } \overline{\sigma}_{\omega 0} = \frac{3+\nu}{8}\rho(R_A\omega)^2.$$

Randbedingungen beim Ablösen:
$$\left.\begin{aligned}\overline{\sigma}_R(\lambda = 1) &= 0 = \text{a} - b\overline{\sigma}_{\omega 0}\\ \overline{\sigma}_R(\lambda_I) &= 0 = \text{a} - \frac{b}{\lambda_I} - \overline{\sigma}_{\omega 0}\lambda_I\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \text{a} = b + \overline{\sigma}_{\omega 0}.$$

Bestimmung der Konstanten *a* und *b*:

$$0 = \text{b} - \frac{b}{\lambda_I} + \overline{\sigma}_{\omega 0} - \overline{\sigma}_{\omega 0}\lambda_I = \text{b}\frac{\lambda_I - 1}{\lambda_I} + \overline{\sigma}_{\omega 0}\lambda_I(1-\lambda_I) \quad \Rightarrow \quad \text{b} = \overline{\sigma}_{\omega 0}\lambda_I,\quad \text{a} = \overline{\sigma}_{\omega 0}(1+\lambda_I).$$

Die Überlappung / Das Schrumpfmaß: $\delta = \mathrm{R}_I \varepsilon_\varphi(\lambda_I) = \dfrac{\mathrm{R}_I}{E}\sigma_\varphi(\lambda_I) = \dfrac{\mathrm{R}_I}{E}\bar{\sigma}_{\omega 0}\underbrace{\left[(1+\lambda_I)+1-\mu_3\lambda_I\right]}_{\left[2+(1-\mu_3)\lambda_I\right]}$.

Aus der obigen Gleichung: $\bar{\sigma}_{\omega 0} = \dfrac{E}{\mathrm{R}_I}\dfrac{\delta}{2+(1-\mu_3)\lambda_I}$,

$$\frac{3+\nu}{8}\rho R_A^2 \omega_{\max}^2 = \frac{E}{\mathrm{R}_I}\frac{\delta}{2+(1-\mu_3)\lambda_I}.$$

$$\omega_{\max} = \frac{1}{R_A}\sqrt{\frac{E}{\rho \mathrm{R}_I}\frac{8}{3+\nu}\frac{\delta}{2+(1-\mu_3)\lambda_I}} = \frac{1}{0{,}2}\sqrt{\frac{8}{3{,}3}\cdot\frac{2\cdot 10^6}{7800\cdot 0{,}02}\frac{2\cdot 10^{-5}}{2+(1-0{,}57)10^{-2}}}.$$

$$\omega_{\max} = 881{,}55\,\frac{1}{s}.$$

b) Berechnung der Spannungen im Fall des Ablösens:

$$\bar{\sigma}_{\omega 0} = \frac{3+\nu}{8}\rho\, R_A^2\, \omega_{\max}^2 = \frac{3{,}3}{8}\cdot 7800\cdot 0{,}2^2\cdot 881{,}5^2 = 100\,005\,337{,}6\ \mathrm{Pa}.$$

$$\bar{\sigma}_{\omega 0} = 100\ \mathrm{MPa}.$$

Bestimmung der Konstanten *a* und *b*: $\mathrm{a} = \mathrm{b} + \bar{\sigma}_{\omega 0}(1+\lambda_I) = 101\,\mathrm{MPa}$, $\mathrm{b} = \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda_I = 1\,\mathrm{MPa}$.

Spannungen an der Stelle des Außen- und Innenradius:

$$\bar{\sigma}_R(\lambda = 1) = a - b - \bar{\sigma}_{\omega 0} = \bar{\sigma}_{\omega 0}(1+\lambda_I) - \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda_I - \bar{\sigma}_{\omega 0} = 0.$$

$$\bar{\sigma}_R(\lambda_I) = a - \frac{b}{\lambda_I} - \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda_I = \bar{\sigma}_{\omega 0}(1+\lambda_I) - \bar{\sigma}_{\omega 0} - \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda_I = 0.$$

$$\bar{\sigma}_\varphi(\lambda = 1) = a + b - \mu_3\bar{\sigma}_{\omega 0} = \bar{\sigma}_{\omega 0}(1+\lambda_I) + \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda_I - \mu_3\bar{\sigma}_{\omega 0} =$$

$$= \bar{\sigma}_{\omega 0}(1+2\lambda_I-\mu_3) = 100(1+0{,}02-0{,}5757) = 44{,}43\,\mathrm{MPa}.$$

$$\bar{\sigma}_\varphi(\lambda_I) = a + \frac{b}{\lambda_I} - \mu_3\bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda_I = \bar{\sigma}_{\omega 0}(1+\lambda_I) + \bar{\sigma}_{\omega 0} - \mu_3\bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda_I =$$

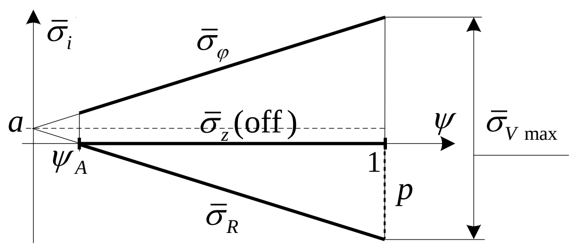
$$= \bar{\sigma}_{\omega 0}(1+2\lambda_I-\mu_3\lambda_I) = 100(1+0{,}01-0{,}00575) = 200{,}4\,\mathrm{MPa}.$$

c) Wie groß ist der Druck p zwischen der Kreisscheibe und der Welle, wenn es keine Rotation gibt?

Spannungen für eine nicht rotierende Scheibe: $\left.\begin{aligned}\bar{\sigma}_R &= a - b\,\psi\\ \bar{\sigma}_\varphi &= a + b\,\psi\end{aligned}\right\}$, wobei $\psi = \dfrac{R_I^2}{R^2}$.

Randbedingungen: $\left.\begin{aligned}\bar{\sigma}_R(\psi_A) &= 0 = a - b\,\psi_A\\ \bar{\sigma}_R(\psi = 1) &= -p = a - b\end{aligned}\right\}$, $\qquad \psi_A = \dfrac{R_I^2}{R_A^2} = 0{,}01$.

Die Spannungsverläufe:



Die Überlappung / Das Schrumpfmaß: $\delta = \mathrm{R}_I \bar{\varepsilon}_\varphi(\psi=1) = \dfrac{\mathrm{R}_I}{E}\left[\bar{\sigma}_\varphi - \nu\bar{\sigma}_R\right]_{\psi=1}$.

$$\delta = \frac{\mathrm{R}_I}{E}\left[\frac{p}{1-\psi_A}2 - p + \nu p\right] = \frac{\mathrm{R}_I}{E}\,p\left(\frac{1+\psi_A}{1-\psi_A}+\nu\right).$$

Aus dieser Gleichung: $p = \dfrac{\delta E}{\mathrm{R}_I\left(\dfrac{1+\psi_A}{1-\psi_A}+\nu\right)} = \dfrac{2\cdot 10^6\cdot 2\cdot 10^{-5}}{0{,}02\left(\dfrac{1{,}01}{0{,}99}+0{,}3\right)} = 151{,}5\cdot 10^6\,\mathrm{Pa} \approx 152\ \mathrm{MPa}$.

d) Wie groß muß die axiale Kraft zum Abziehen der Scheibe sein, wenn der Reibungskoeffizient $\mu = 0{,}25$ beträgt?

$\mathrm{F}_{ax} = \mu\,\mathrm{p}\,2\mathrm{R}_I\pi\mathrm{h} = 1{,}9\cdot 10^5\,\mathrm{N} = 190\,\mathrm{kN}$.

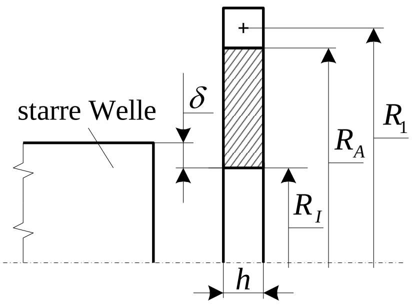
e) Welcher Zustand ist kritisch?

Die Grundlage für die Entscheidung $\sigma_{V\max}$: $\sigma_{V\max}(\text{Stillstand}) = \dfrac{2p}{1-2\nu} = 307{,}1\,\mathrm{MPa}$.

$\sigma_{V\max}(\text{Rotation}) = \sigma_\varphi(\lambda_I) = 133{,}9\ \mathrm{MPa}$.

Der Stillstand ist der kritische Zustand.

Aufgabe 8.: Schnell rotierende starre Welle und elastische Kreisringscheibe



Gegeben:

Die Abmessungen und das Material einer Kreisringscheibe. Die Scheibe ist mit einer Überlappung / einem Schrumpfmaß δ auf eine starre Welle aufgeschrumpft. Am äußeren Mantel der Kreisscheibe befindet sich eine dichte Schaufelreihe. Die Gesamtmasse der Schaufeln ist m_1 und der Schwerpunkt / die Schwerpunktlinie der Schaufeln liegt beim Radius R_1.

$R_I = 15\,\mathrm{mm}$, $R_A = 120\,\mathrm{mm}$, $R_1 = 135\,\mathrm{mm}$, $h = 20\,\mathrm{mm}$,

$m_1 = 1{,}5\,\mathrm{kg}$, $\rho = 7860\,\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, $E = 2\cdot 10^{11}\ \mathrm{Pa}$, $\nu = 0{,}3$.

Aufgabe:

a) Wie groß darf die Überlappung / das Schrumpfmaß δ sein, damit bei einer Winkelgeschwindigkeit von $\omega = 1000\ \mathrm{rad}/s$ kein Ablösen der Scheibe erfolgt?

b) Wie groß ist der Druck p zwischen der Kreisscheibe und der Welle, wenn $\omega = 0$ ist?

c) Welcher Zustand ist kritisch?

Lösung:

a) Wie groß darf die Überlappung / das Schrumpfmaß δ sein, damit bei einer Winkelgeschwindigkeit von $\omega = 1000\ \mathrm{rad}/s$ kein Ablösen der Scheibe erfolgt?

Flächenbelastung aus der Schaufelreihe:

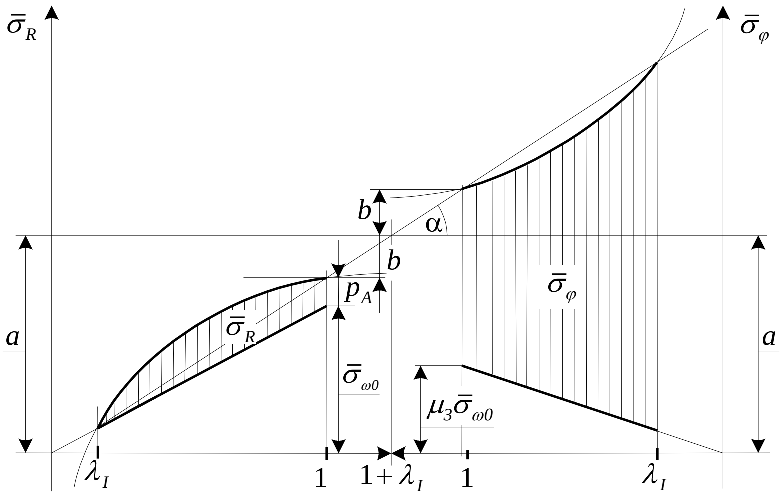
$$p_A = \frac{m_1 R_1\omega^2}{2R_A\pi h} = \frac{1{,}5\cdot 0{,}135\cdot 1000^2}{2\cdot 0{,}12\cdot 3{,}1415\cdot 0{,}02} = 13{,}429\cdot 10^3\,\mathrm{Pa} = 13{,}44\ \mathrm{MPa}.$$

Die Spannungsverläufe:

$$\left.\begin{aligned}\bar{\sigma}_R &= \mathrm{a} - \frac{b}{\lambda} - \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda \\ \bar{\sigma}_\varphi &= \mathrm{a} + \frac{b}{\lambda} - \mu_3\bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda\end{aligned}\right\},\quad \lambda = \frac{R^2}{R_A^2},\quad \bar{\sigma}_{\omega 0} = \frac{3+\nu}{8}\rho\left(R_A\omega\right)^2.$$

Randbedingungen bei Ablösen: $$\left.\begin{aligned}\bar{\sigma}_R(\lambda=1)&=p_A=\mathrm{a}-b-\bar{\sigma}_{\omega 0},\\ \bar{\sigma}_R(\lambda_I)&=0=\mathrm{a}-\frac{b}{\lambda_I}-\bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda_I.\end{aligned}\right\}$$

Spannungsverlauf:



Ermittlung der Konstanten *a* und *b*: $$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\left(\bar{\sigma}_{\omega 0}+p_A\right)-\bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda_I}{1-\lambda_I},$$

$$a=\frac{\bar{\sigma}_{\omega 0}(1-\lambda_I)+p_A}{1-\lambda_I}+\bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda_I,\quad b=\frac{\bar{\sigma}_{\omega 0}(1-\lambda_I)+p_A}{1-\lambda_I}\lambda_I.$$

Berechnung der Konstanten *a* und *b*: $\lambda_\mathrm{I}=\frac{\mathrm{R_I^2}}{\mathrm{R_A^2}}=\left(\frac{15}{120}\right)^2=15,63\cdot 10^{-3}$, $\mu_3=\frac{1+3\nu}{3+\nu}=\frac{1,9}{3,3}=0,5757$.

$$\bar{\sigma}_{\omega 0}=\frac{3+\nu}{8}\rho R_A^2\omega^2=\frac{3,3}{8}\cdot 7860\cdot 0,12^2\cdot 10^6=46,688\cdot 10^6\,\mathrm{Pa}=46,688\,\mathrm{MPa},$$

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\bar{\sigma}_{\omega 0}(1-\lambda_I)+p_A}{1-\lambda_I}=60,33\,\mathrm{MPa},$$

$$\mathrm{a}=\mathrm{tg}\alpha+\bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda_I=60,33+46,688\cdot 15,63\cdot 10^{-3}=61,06\,\mathrm{MPa},$$

$$\mathrm{b}=\mathrm{tg}\alpha\cdot\lambda_I=60,33\cdot 15,63\cdot 10^{-3}=0,943\,\mathrm{MPa}.$$

Die Überlappung / Das Schrumpfmaß: $$\delta=\mathrm{R}_I\varepsilon_\varphi(\lambda_I)=\frac{\mathrm{R}_I}{E}\bar{\sigma}_\varphi(\lambda_I)=\frac{\mathrm{R}_I}{E}\left(a+\frac{b}{\lambda_I}-\mu_3\bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda_I\right)=$$

$$=\frac{15}{2\cdot 10^5}\left(61,06+60,33-0,576\cdot 46,688\cdot 15,63\cdot 10^{-3}\right)=9,1\cdot 10^{-3}\,\mathrm{mm}.$$

Spannungen am Innen- und Außenradius: $\bar{\sigma}_I(\lambda_I)=0$, $\bar{\sigma}_R(\lambda=1)=\mathrm{p}_A=13,44\,\mathrm{MPa}$,

$\bar{\sigma}_\varphi(\lambda_I)=121\,\mathrm{MPa}$, $\bar{\sigma}_\varphi(\lambda=1)=35{,}1\,\mathrm{MPa}$.

b) Wie groß ist der Druck p zwischen der Kreisscheibe und der Welle, wenn $\omega=0$ ist?

Spannungsverlauf im Stillstand: $$\left.\begin{aligned}\bar{\sigma}_R&=a-b\,\psi,\\ \bar{\sigma}_\varphi&=a+b\,\psi.\end{aligned}\right\}$$

Randbedingungen im Stillstand: $$\left.\begin{aligned}\bar{\sigma}_R(\psi_A)&=0=a-b\,\psi_A,\\ \bar{\sigma}_R(\psi=1)&=-p=a-b.\end{aligned}\right\}\qquad \psi_A=\lambda_I=15,63\cdot 10^{-3}.$$

Die Überlappung / Das Schrumpfmaß: $$\delta=\mathrm{R}_I\varepsilon_\varphi(\psi=1)=\frac{\mathrm{R}_I}{E}\left[\bar{\sigma}_\varphi-\nu\bar{\sigma}_R\right]_{\psi=1}=\frac{\mathrm{R}_I}{E}p\left(\frac{1+\psi_A}{1-\psi_A}+\nu\right).$$

Aus dieser Gleichung: $$p = \frac{\delta E}{R_I\left(\frac{1+\psi_A}{1-\psi_A}+\nu\right)} = \frac{2\cdot 10^{11}\cdot 9{,}1\cdot 10^{-6}}{0{,}0015\left(\frac{1{,}0156}{0{,}984}+0{,}3\right)} = 87{,}44\cdot 10^{6}\,\text{Pa} \approx 87{,}44\,\text{MPa}\,.$$

c) Welcher Zustand ist kritisch?

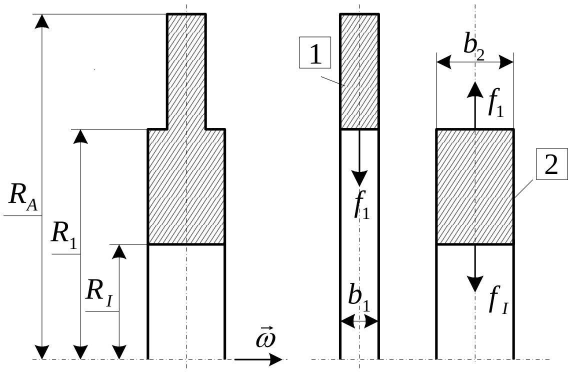
Die Grundlage für die Entscheidung $\sigma_{V\max}$:

Rotation: $\bar{\sigma}_{V\max} = \bar{\sigma}_{\varphi}(\lambda_I) = 121\,\text{MPa}\,.$

Stillstand: $\bar{\sigma}_{V\max} = 2\frac{p}{1-\psi_A} = 2\frac{87{,}44}{1-0{,}0156} = 177{,}72\,\text{MPa}\,.$

Der Stillstand ist der kritische Zustand.

Aufgabe 9.: Schnell rotierende Kreisringscheibe mit veränderlicher Scheibendicke



Gegeben:

Die Abmessungen einer schnell rotierenden Kreisringscheibe mit bereichsweise konstanter Dicke. Die Scheibe ist mit einer Linienbelastung von f_I an der inneren Mantelfläche belastet.

$\lambda_I = 0{,}25$, $\lambda_1 = 0{,}5$, $b_2 = 2b_1$, $\mu_3 = 0{,}6$,

$N_{\omega 0} = b_1\bar{\sigma}_{\omega 0}$, f_I.

Aufgabe:

a) Die charakteristische Darstellung der Schnittgrößenverläufe $N_R(\lambda)$, $N_\varphi(\lambda)$.

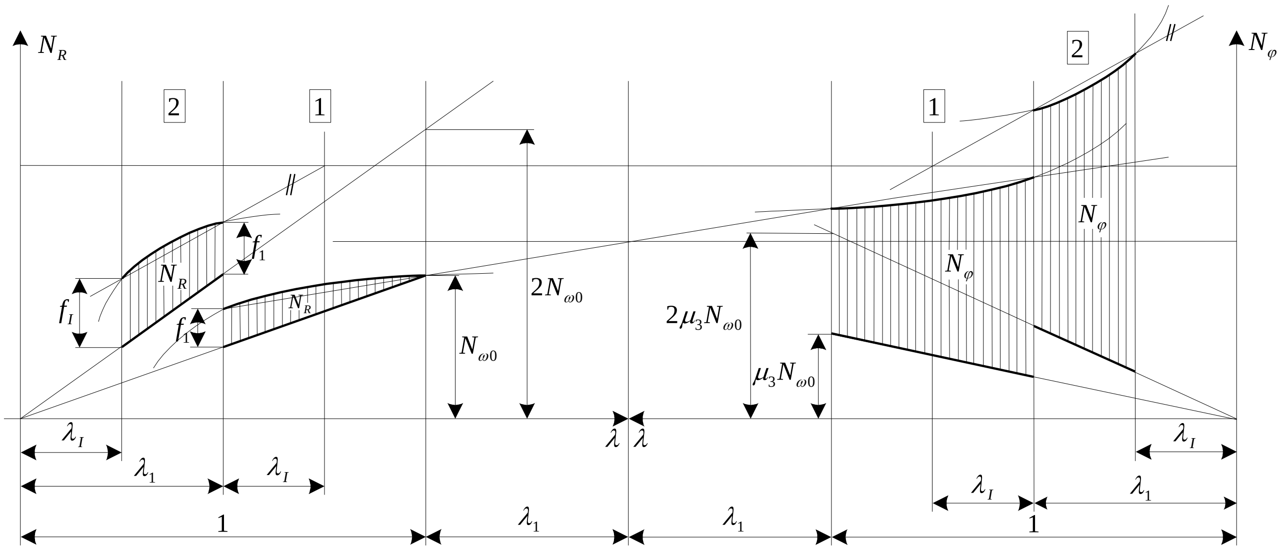
b) Ermittlung der Konstanten für die Verläufe von $N_R(\lambda)$ und $N_\varphi(\lambda)$ mittels der Randbedingungen.

c) Bestimmung der Intensität f_1 aus den Übergangsbedingungen.

Lösung:

a) Die charakteristische Darstellung der Schnittgrößenverläufe $N_R(\lambda)$, $N_\varphi(\lambda)$:

Die Scheibe wird am Radius R_1 in zwei Teilen 1 und 2 zerlegt. Die Wechselwirkung zwischen den beiden Scheibenteilen 1 und 2 wird mit der Linienbelastung f_1 berücksichtigt.



b) Ermittlung der Konstanten der Verläufe $N_R(\lambda)$ und $N_\varphi(\lambda)$ mittels der Randbedingungen:

Schnittgrößenverläufe:

Scheibe 1:
$$\left.\begin{aligned} N_{R1} &= A_1 - \frac{B_1}{\lambda} - N_{\omega 0}\lambda \\ N_{\varphi 1} &= A_1 + \frac{B_1}{\lambda} - \mu_3 N_{\omega 0}\lambda \end{aligned}\right\}$$

Scheibe 2:
$$\left.\begin{aligned} N_{R2} &= A_2 - \frac{B_2}{\lambda} - 2N_{\omega 0}\lambda \\ N_{\varphi 2} &= A_2 + \frac{B_2}{\lambda} - 2\mu_3 N_{\omega 0}\lambda \end{aligned}\right\}$$

Randbedingungen:
$$\left.\begin{aligned} N_{R1}(\lambda = 1) &= 0 \\ N_{R1}(\lambda = \lambda_1) &= f_1 \end{aligned}\right\}$$
$$\left.\begin{aligned} N_{R2}(\lambda = \lambda_1) &= f_1 \\ N_{R2}(\lambda = \lambda_I) &= f_I \end{aligned}\right\}$$

Bestimmung der Konstanten:

Randbedingungen für die Scheibe 1:
$$\left.\begin{aligned} 0 &= A_1 - B_1 - N_{\omega 0} \\ f_1 &= A_1 - 2B_1 - 0{,}5N_{\omega 0} \end{aligned}\right\}$$

Aus der ersten Gleichung: $A_1 = B_1 + N_{\omega 0}$, $A_1 = 1{,}5N_{\omega 0} - f_1$.

Aus der zweiten Gleichung: $f_1 = B_1 - 2B_1 + 0{,}5N_{\omega 0}$, $B_1 = \frac{N_{\omega 0}}{2} - f_1$.

Randbedingungen für die Scheibe 2:
$$f_I = A_2 - 4B_2 - \frac{1}{4}2N_{\omega 0}$$
$$f_1 = A_2 - 2B_2 - \frac{1}{2}2N_{\omega 0} \quad /\cdot 2 \quad \Rightarrow \quad B_2 = \frac{1}{2}\left(A_2 - f_1 - N_{\omega 0}\right).$$
$$f_I - 2f_1 = -A_2 \quad \Rightarrow \quad A_2 = 2f_1 - f_I \qquad B_2 = 0{,}5\left(f_1 - f_I - N_{\omega 0}\right)$$

c) Bestimmung der Intensität f_1 aus den Übergangsbedingungen:

Übergangsbedingung für die Verschiebungen: $u_1|_{\lambda 1} = u_2|_{\lambda 1} \quad \Rightarrow \quad R_1\,\varepsilon_{\varphi 1}|_{\lambda 1} = R_1\,\varepsilon_{\varphi 2}|_{\lambda 1}$

Hookesches Gesetz:
$$2G\left(\bar{\sigma}_{\varphi 1} - \nu\frac{\bar{\sigma}_{\varphi 1} + f_1}{1+\nu}\right)\Bigg|_{\lambda 1} = 2G\left(\bar{\sigma}_{\varphi 2} - \nu\frac{\bar{\sigma}_{\varphi 2} + f_1}{1+\nu}\right)\Bigg|_{\lambda 1}$$

$u_1|_{\lambda 1} = u_2|_{\lambda 1} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\varphi 1}|_{\lambda 1} = \sigma_{\varphi 2}|_{\lambda 1}$ - Übergangsbedingung für die Spannungen.

Die Schnittgrößen an der Stelle R_1:

$$N_{\varphi 1}|_{\lambda 1} = \left[N_{\omega 0} - \frac{f_1}{1-\lambda_1}\right](1+\lambda_1) + N_{\omega 0}(1-\mu_3\lambda_1) = 2{,}2N_{\omega 0} - 3f_1.$$

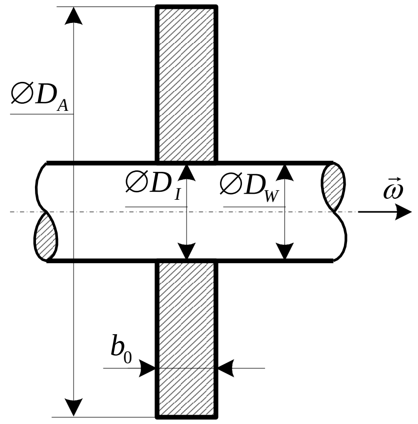
$$N_{\varphi 2}|_{\lambda 1} = \left[2N_{\omega 0} + \frac{f_1 - f_I}{\lambda_1 - \lambda_I}\right]2\lambda_I + 2N_{\omega 0}\lambda_1 + f_1 - 2N_{\omega 0}\mu_3\lambda_1 =$$
$$= 2N_{\omega 0} + (2\lambda_I + \lambda_1 - \mu_3\lambda_1) + \frac{f_1}{\lambda_1 - \lambda_I}(2\lambda_I + 1) - f_I\frac{2\lambda_I}{\lambda_1 - \lambda_I}.$$

$$N_{\varphi 2}|_{\lambda 1} = 1{,}4N_{\omega 0} + 3f_1 - 2f_I$$

Übergangsbedingung für die Spannungen: $\left.\frac{N_{\varphi 1}}{b_1}\right|_{\lambda 1} = \left.\frac{N_{\varphi 2}}{2b_1}\right|_{\lambda 1} \quad \Rightarrow \quad 2N_{\varphi 1}|_{\lambda 1} = N_{\varphi 2}|_{\lambda 1}$

Nach dem Einsetzen:
$$4{,}4N_{\omega 0} - 6f_1 = 1{,}4N_{\omega 0} + 3f_1 - 2f_I$$
$$3N_{\omega 0} + 2f_I = 9f_1$$
$$f_1 = \frac{1}{3}N_{\omega 0} + \frac{2}{9}f_I$$

Aufgabe 10.: Schnell rotierende starre Welle und elastische Kreisringscheibe



Gegeben:

Die Abmessungen und das Material einer Kreisringscheibe mit der konstanten Dicke b_0. Die Scheibe wird erhitzt und dann auf die starre Welle mit dem Durchmesser D_t aufgeschrumpft. Nach der Abkühlung ist die Überlappung / das Schrumpfmaß $\delta = (D_W - D_I)/2$. Es wird angenommen, daß das Material der Scheibe linear elastisch und das Material der Welle ideal starr ist.

$b_0 = 8\,\text{mm}$, $D_A = 400\,\text{mm}$, $D_I = 200\,\text{mm}$, $\delta = 0{,}021\,\text{mm}$,

$E = 2\cdot 10^5$ MPa, $\nu = 1/3$, $\rho = 8\cdot 10^3$ kg/m^3, $\lambda_I = \dfrac{R_I^2}{R_A^2} = \dfrac{1}{4}$.

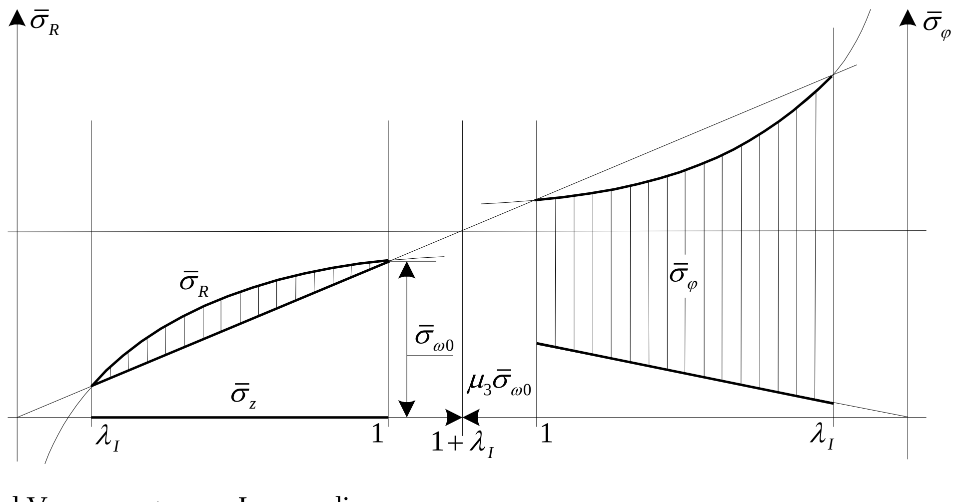
Frage: Bei welcher Drehzahl erfolgt das Ablösen?

Lösung:

Bedingung für das Ablösen: $\Delta D_I = 2\delta$.

Spannungsverlauf:
$$\left.\begin{aligned} \bar\sigma_R &= a - \frac{b}{\lambda} - \bar\sigma_{\omega 0}\lambda \\ \bar\sigma_\varphi &= a + \frac{b}{\lambda} - \mu_3\bar\sigma_{\omega 0}\lambda \\ \bar\sigma_z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Spannungsdiagramm:



Spannungen und Verzerrungen am Innenradius

$$\bar\sigma_\varphi(\lambda_I) = \bar\sigma_{\omega 0}(2+\lambda_I) - \bar\sigma_{\omega 0}\mu_3\lambda_I = \bar\sigma_{\omega 0}\left[2+\lambda_I(1-\mu_3)\right].$$

$$\bar\varepsilon_\varphi(\lambda_I) = \frac{1}{E}\bar\sigma_\varphi(\lambda_I); \qquad \Delta D_I = 2n(\lambda_I) = 2R_I\bar\varepsilon_\varphi(\lambda_I) = \frac{D_I}{E}\bar\varepsilon_\varphi(\lambda_I).$$

Ablösbedingung: $D_I\varepsilon_\varphi(\lambda_I) = 2\delta$.

$$\bar\sigma_{\omega 0} = \frac{2\delta E}{D_I\left[2+\lambda_I(1-\mu_3)\right]} = \frac{4{,}2\cdot 10^{-2}\cdot 2\cdot 10^5}{100\left[2+0{,}1\right]} = 40\ \text{N/mm}^2 = 40\cdot 10^6\ \text{N/m}^2.$$

$$\bar\sigma_{\omega 0} = (3+\nu)\frac{\rho}{8}\left(R_A\omega^2\right) = 4\cdot 10^7.$$

$$\left(R_A\omega\right)^2 = 0,3\cdot 4\cdot 10^4 .$$

$$R_A\omega = 100\sqrt{1,2} = 109,54 .$$

$$\omega = \frac{109,54}{0,4} = 273,86\frac{1}{s} .$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{60}n , \qquad n = \frac{30\omega}{\pi} = \frac{30\cdot 273,86}{3,14} = 2615,26\,\frac{\mathrm{U}}{\min} .$$