

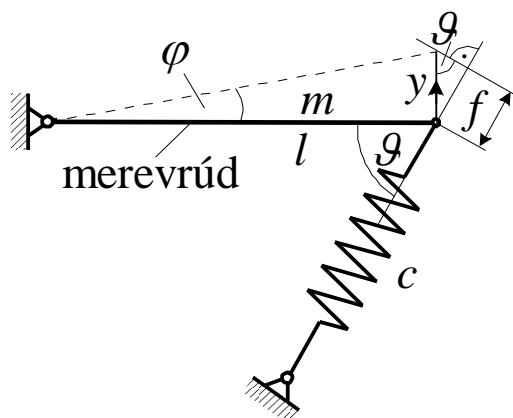
2. MECHANIKA-REZGÉSTAN GYAKORLAT

(kidolgozta: Fehér Lajos, tsz. mérnök; Tarnai Gábor, mérnök tanár;

Molnár Zoltán, egy. adj., Dr. Nagy Zoltán, egy. adj.)

Rugók helyettesítése

2.1. Példa: Különböző irányú rugók helyettesítése



Adott: Az ábrán látható rezgőrendszer.

Feladat:

a) Határozza meg az ábrán látható rezgőrendszerrel egyenértékű rezgőrendszer c_h helyettesítő rugóállandóját.

b) Határozza meg az ábrán látható rezgőrendszerrel egyenértékű rezgőrendszer c_h helyettesítő rugóállandóját, hogy a helyettesítő rugó a rudat annak felezőpontjában támasztja alá.

Feltételezés:

Kis rezgés: $y \ll l$ és $y = l\varphi$

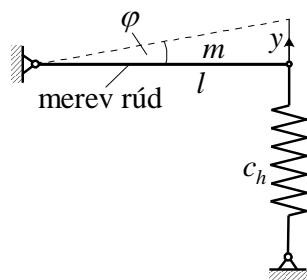
a) A rugó hosszváltozása: $f = y \sin \vartheta$

A rugóenergia:

$$U = \frac{1}{2} \frac{f^2}{c} = \frac{1}{2} \frac{(y \sin \vartheta)^2}{c} = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \vartheta}{c} y^2 = \frac{1}{2} \frac{y^2}{c_h}$$

A redukált rugóállandó: $\frac{1}{c_h} = \frac{\sin^2 \vartheta}{c}$

A helyettesítő modell:



b) A rugóenergia:

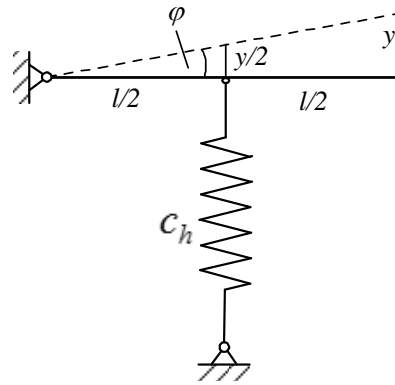
$$U = \frac{1}{2} \frac{f^2}{c} = \frac{1}{2} \frac{(y \sin \vartheta)^2}{c} = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \vartheta}{c} y^2$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^2}{c_h} = \frac{1}{2} \frac{y^2}{4c_h} = \frac{1}{2} \frac{1}{4c_h} y^2$$

A deformációs energiák egyenlősége alapján írható:

$$\frac{1}{4c_h} = \frac{\sin^2 \vartheta}{c} \Rightarrow \frac{1}{c_h} = \frac{4 \cdot \sin^2 \vartheta}{c}$$

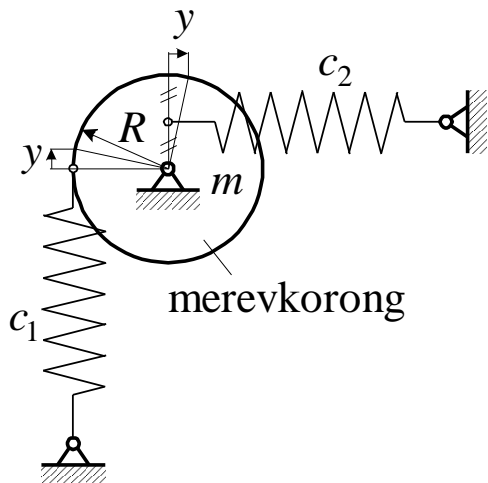
A redukált rugóállandó: $\frac{1}{c_h} = \frac{4 \cdot \sin^2 \vartheta}{c}$



2.2. Példa: Különböző irányú rugók helyettesítése

Adott: Az ábrán látható rezgőrendszer.

Feladat: Határozza meg az ábrán látható rezgőrendszerrel egyenértékű rezgőrendszer c_h helyettesítő rugóállandóját.



Feltételezés:

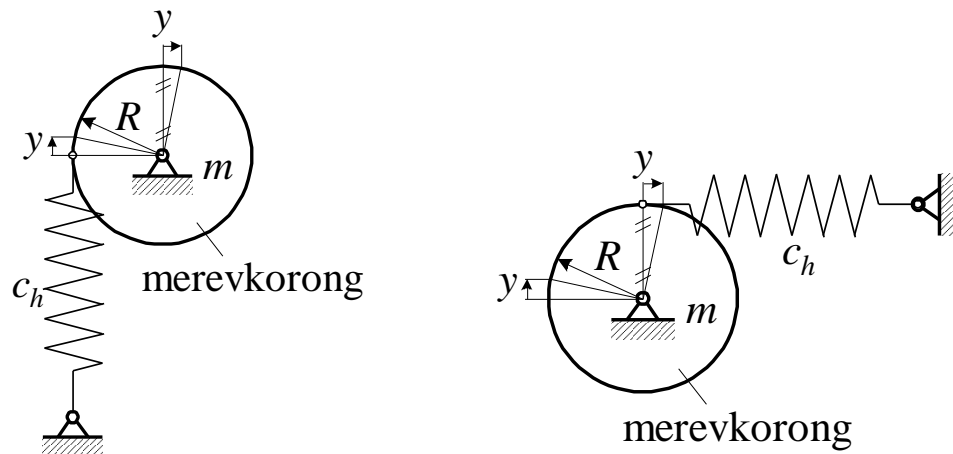
Kis rezgés: $y \ll l$ és $y = R\varphi$

A rugóenergia:

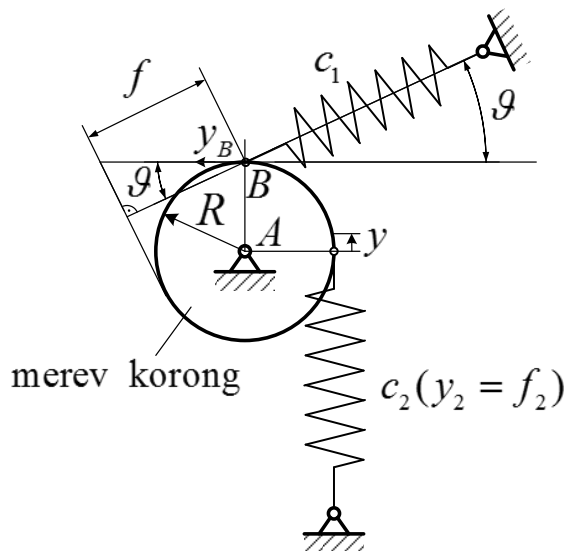
$$U = \frac{1}{2} \frac{y^2}{c_1} + \frac{1}{2} \frac{(y/2)^2}{c_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{4c_2} \right) y^2 = \frac{1}{2} \frac{y^2}{c_h}$$

A helyettesítő rugóállandó: $\frac{1}{c_h} = \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{4c_2} \right)$

A helyettesítő modellek:



2.3. Példa: Különböző irányú rugók helyettesítése



Adott: Az ábrán látható rezgőrendszer.

Feladat: Határozza meg az ábrán látható rezgőrendszerrel egyenértékű rezgőrendszer $c_{helyettesítő}$ helyettesítő rugóállandóját.

Kis rezgés: $y \ll l$ és $y = R\varphi$

$y = R\varphi$ – elmozdulások és szögelfordulások között lineáris kapcsolat áll fenn

$$\cos \vartheta = \frac{f}{y_B} \Rightarrow f = y_B \cos \vartheta = R\varphi \cos \vartheta$$

A rugóban felhalmozott alakváltozási energia:

$$U = \frac{1}{2} \frac{(R\varphi \cos \vartheta)^2}{c_1} + \frac{1}{2} \frac{y^2}{c_2} = \frac{1}{2} \frac{R^2 \varphi^2 \cos^2 \vartheta}{c_1} + \frac{1}{2} \frac{R^2 \varphi^2}{c_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{R^2 \cos^2 \vartheta}{c_1} + \frac{R^2}{c_2} \right) \varphi^2,$$

Helyettesítő modell:

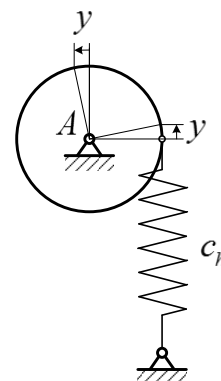
$$U = \frac{1}{2} \frac{y^2}{c_h} = \frac{1}{2} \frac{(R\varphi)^2}{c_h} = \frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{c_h} \right) \varphi^2$$

A helyettesítő rugóállandó:

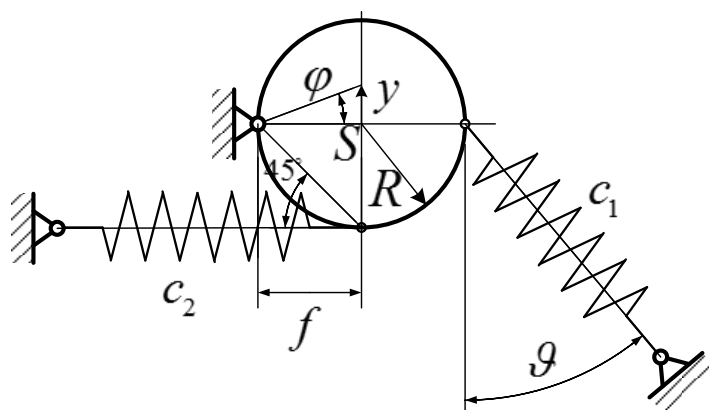
$$\frac{R^2}{c_h} = \frac{R^2 \cos^2 \vartheta}{c_1} + \frac{R^2}{c_2}$$

$$\frac{1}{c_h} = \frac{\cos^2 \vartheta}{c_1} + \frac{1}{c_2}$$

A helyettesítő modell:



2.4. Példa: Különböző irányú rugók helyettesítése

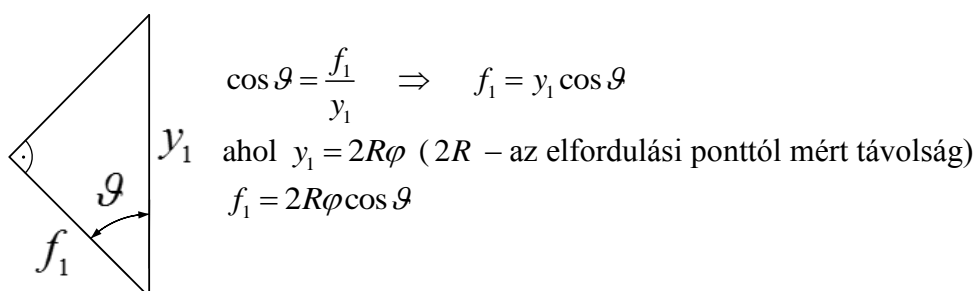


Adott: Az ábrán látható rezgőrendszer.

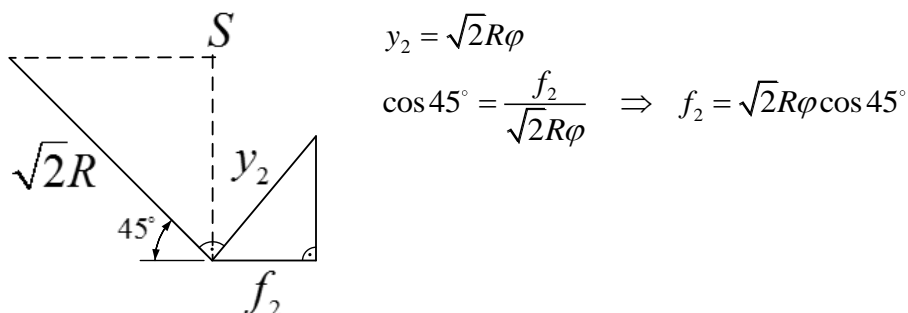
Feladat: Határozza meg az ábrán látható rezgőrendszerrel egyenértékű rezgőrendszer c_h helyettesítő rugóállandóját.

Kis rezgés: $y \ll l$ és $y = R\varphi$

Az 1-es rugó hosszváltozása:



A 2-es rugó hosszváltozása:



$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \frac{f_1^2}{c_1} + \frac{1}{2} \frac{f_2^2}{c_2} = \frac{1}{2} \frac{(2R\varphi \cos \vartheta)^2}{c_1} + \frac{1}{2} \frac{\left(\sqrt{2}R\varphi \overbrace{\cos 45^\circ}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right)^2}{c_2} = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{4R^2\varphi^2 \cos^2 \vartheta}{c_1} + \frac{1}{2} \frac{R^2\varphi^2}{c_2} = \frac{1}{2} R^2\varphi^2 \left(\frac{4\cos^2 \vartheta}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{4R^2 \cos^2 \vartheta}{c_1} + \frac{R^2}{c_2} \right) \varphi^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{c_h} \varphi^2
 \end{aligned}$$

Helyettesítő rezgőrendszer:

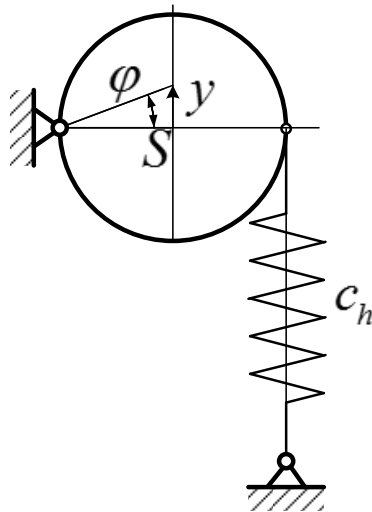
$$U = \frac{1}{2} \frac{f_h^2}{c_h} = \frac{1}{2} \frac{(2R\varphi)^2}{c_h} = \frac{1}{2} \left(\frac{4R^2}{c_h} \right) \varphi^2$$

Helyettesítő rugóállandó:

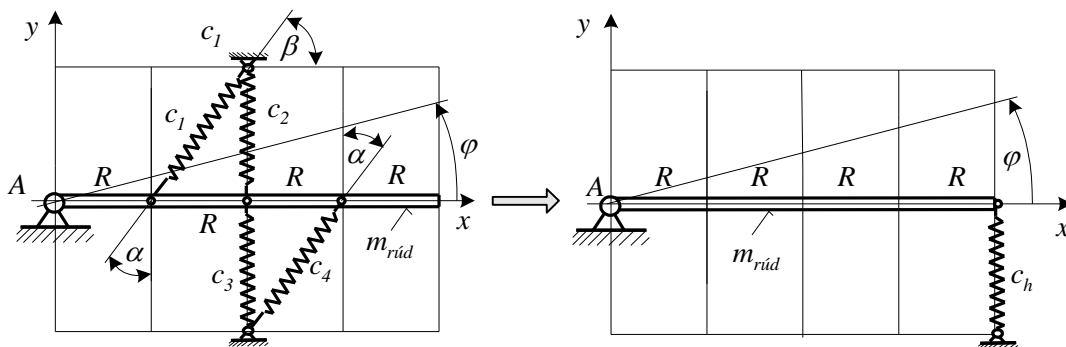
$$\frac{4R^2}{c_h} = \left(\frac{4R^2 \cos^2 \vartheta}{c_1} + \frac{R^2}{c_2} \right)$$

$$\frac{1}{c_h} = \left(\frac{\cos^2 \vartheta}{c_1} + \frac{1}{4c_2} \right)$$

Helyettesítő rezgőrendszer:



2.5. Példa: Szabad csillapítatlan rezgőrendszer (rugók helyettesítése egy adott pontban és egy előírt hatásvonalon)



1. ábra

2. ábra

Adott: az 1. ábrán látható, az A pontban csapágyazott rezgőrendszer. Az általános koordináta legyen a rúd szögelfordulása $q = \varphi$.

$\beta = 60^\circ$, $R = 1$ m, $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 4 \cdot 10^{-4}$ m/N, $m_{rúd} = 12$ kg.

Feladat: a) Határozza meg az 1. ábrán látható rezgőrendszerrel egyenértékű, a 2. ábrán vázolt rezgőrendszer c_h rugóállandóját.

b) Határozza meg a c_4 jelű rugóban ébredő U_4 deformációs energiát, ha a $\varphi = 3^\circ$.

Kidolgozás:

a) A helyettesítő rezgőrendszer jellemzőinek meghatározása:

A két rezgőrendszer azonos (egymást helyettesíti), ha a két rendszer rugóiban ébredő deformációs energia megegyezik! Az ábra alapján $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta = 30^\circ$.

1. ábra: $U = \sum_{i=1}^4 U_i = U_1 + U_2 + U_3 + U_4$,

$$U_1 = \frac{1}{2} \frac{(R\varphi \cos \alpha)^2}{c_1}, \quad U_2 = \frac{1}{2} \frac{(2R\varphi)^2}{c_2}, \quad U_3 = \frac{1}{2} \frac{(2R\varphi)^2}{c_3}, \quad U_4 = \frac{1}{2} \frac{(3R\varphi \cos \alpha)^2}{c_4}.$$

2. ábra: $U = \frac{1}{2} \frac{(4R\varphi)^2}{c_h}$.

A deformációs energiák egyenlősége alapján írható:

$$\frac{1}{2} R^2 \varphi^2 \left[\frac{\cos^2 \alpha}{c_1} + \frac{4}{c_2} + \frac{4}{c_3} + \frac{9 \cos^2 \alpha}{c_4} \right] = \frac{1}{2} R^2 \varphi^2 \frac{16}{c_h},$$

$$\frac{1}{c_h} = \left[\frac{\cos^2 \alpha}{c_1} + \frac{4}{c_2} + \frac{4}{c_3} + \frac{9 \cos^2 \alpha}{c_4} \right] \frac{1}{16} = \frac{\cos^2 30^\circ + 4 + 4 + 9 \cdot \cos^2 30^\circ}{16 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = \frac{15,5}{64 \cdot 10^{-4}} = 2421,875$$

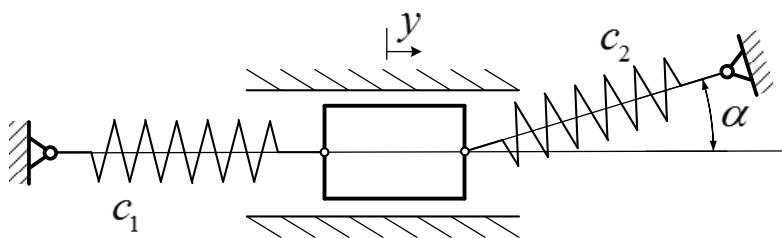
$$c_h = 4,129 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{N}}.$$

b) A c_4 jelű rugóban ébredő alakváltozási energia:

$$U_4 = \frac{9R^2 \cos^2 \alpha}{2c_4} \varphi^2, \quad \text{ahol } \varphi = \frac{3^\circ \pi}{180^\circ} = 0,05235 \text{ radián},$$

$$U_4 = \frac{9 \cdot 1^2 \cdot \cos^2 30^\circ \cdot 0,05235^2}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 23,12 \text{ Nm}.$$

2.6. Példa: Különböző irányú rugók helyettesítése



Adott: Az ábrán látható rezgőrendszer.

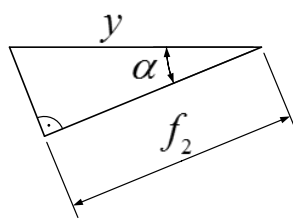
Feladat: Határozza meg az ábrán látható rezgőrendszerrel egyenértékű rezgőrendszer c_h helyettesítő rugóállandóját.

Kis rezgés: $y \ll l$ és $y = l\varphi$

Az 1-es rugó hosszváltozása:

$$f_1 = y$$

A 2-es rugó hosszváltozása:



$$\cos \alpha = \frac{f_2}{y} \Rightarrow f_2 = y \cos \alpha$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{f_1^2}{c_1} + \frac{1}{2} \frac{f_2^2}{c_2} = \frac{1}{2} \frac{y^2}{c_1} + \frac{1}{2} \frac{(y \cos \alpha)^2}{c_2} = \frac{1}{2} \frac{y^2}{c_1} + \frac{1}{2} \frac{y^2 \cos^2 \alpha}{c_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c_1} + \frac{\cos^2 \alpha}{c_2} \right) y^2,$$

$$\text{ahol } \frac{1}{c_h} = \frac{1}{c_1} + \frac{\cos^2 \alpha}{c_2}$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{c_h} y^2$$

Helyettesítő modell:

