4. MECHANIKA-VÉGESELEM MÓDSZER ELŐADÁS
(kidolgozta: Szüle Veronika, egy. ts.)

IV. előadás

2. Közelítő megoldások, energiaelvek:

2.4. Ritz-módszer,

2.4.1. Lineáris approximáció (elsőfokú közelítés)

Tekintsük ismét a húzott-nyomott rúd feladatot, és keressük a feladat közelítő megoldását az alábbi alakban:

$u^*(x) = C_0 + C_1 x$. Ellenőrizzük, hogy ezen $u^*(x) = C_0 + C_1 x$ feltételezett megoldás kinematikailag lehetséges-e.

Emlékeztető:

Kinematikailag lehetséges elmozdulás mező: az az $u^*(x)$ elmozdulás mező, amely folytonos, elegendően sokszor differenciálható és kielégíti a kinematikai peremfeltételt. Ezen definíció alapján az első feladatra teljesülnie kell az alábbi egyenletnek.

A kinematikai peremfeltétel: $u^*(x=0) = 0$, azaz $C_0 + C_1 0 = 0 \;\Rightarrow\; C_0 = 0$. Azaz az $u^*(0) = 0 = C_0 + C_1 0$ egyenlet csak akkor teljesül, ha $C_0 = 0$, azaz a kinematikailag lehetséges elmozdulás a következő alakú:

$u^*(x) = C_1 x$.

A deriválhatóság feltétele $\varepsilon^*(x) = \dfrac{du^*}{dx} = C_1$ is teljesül, tehát megállapíthatjuk, hogy az $u^*(x) = C_1 x$ alakú közelítő elmozdulás kinematikailag lehetséges.

Az $\left.\begin{aligned} u^*(x) &= C_1 x \\ \varepsilon^*(x) &= \frac{du^*}{dx} = C_1 \end{aligned}\right\}$ képleteket behelyettesítve az

$$\Pi_p\left[u(x)\right] = \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^l AE\left(\frac{du(x)}{dx}\right)^2 dx}_{\text{alakváltozási energia}} \quad \underbrace{-\int_0^l u\, f_x dx - F_x u_l}_{\text{külső erők virtuális munkája}} \quad \text{funkcionálba,}$$

a $\Pi_p^*\left[u^*(x)\right] = \Pi_p^*(C_1) = \frac{1}{2}\int_0^l AE(C_1)^2 dx - \int_0^l C_1 x\, f_x dx - F_x C_1 l$ kifejezést kapjuk.

Egyváltozós függvény szélsőértéke:

Szükséges feltétel: a függvény első deriváltja az adott helyen nulla legyen.

Elégséges feltétel: a függvény második deriváltjának előjele nem változhat (ez mindig teljesülni fog).
Azaz akkor lesz a potenciális energiának szélsőértéke, ha

$$\min \Pi_p^*(C_1) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\Pi_p}{dC_1} = 0 = \int_0^l AEC_1 dx - \int_0^l x\, f_x dx - F_x l$$

A kijelölt integrálást elvégezve és az ismeretlen paramétert kifejezve:

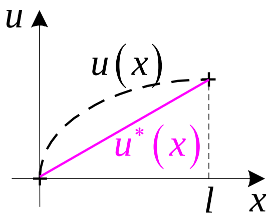
$$0 = AEC_1 \underbrace{\int_0^l dx}_{l} - f_x \underbrace{\int_0^l x\, dx}_{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^l} - F_x l$$

$$0 = AEC_1 l - f_x \frac{l^2}{2} - F_x l \qquad / : l \;/ : AE$$

$$C_1 = \frac{f_x l}{2AE} + \frac{F_x}{AE} = \frac{f_x l + 2F_x}{2AE}$$

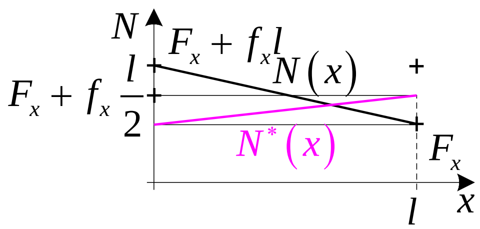
$$u^*(x) = C_1 x = \frac{f_x l + 2F_x}{2AE} x$$

$$\left.\begin{aligned} &u(x=0) = 0 \\ &u(x=l) = -\frac{f_x}{2AE} l^2 + \left(\frac{F_x + f_x l}{AE}\right) l + 0 = \frac{f_x l^2 + 2F_x l}{2AE} \\ &u^*(x=l) = C_1 x = \frac{f_x l + 2F_x}{2AE} l = \frac{f_x l^2}{2AE} + \frac{F_x l}{AE} \end{aligned}\right\}$$



. ábra: Elmozdulás függvény ábrázolása egzakt és közelítő megoldás esetén

$$\left.\begin{aligned} &N(x=0) = F_x + f_x \cdot l \\ &N(x=l) = F_x \\ &N^*(x) = AE\frac{du^*}{dx} = \frac{2F_x + f_x l}{2} = F_x + \frac{f_x l}{2} \\ &N^*(x=0) = F_x \\ &N^*(x=l) = F_x + \frac{f_x l}{2} \end{aligned}\right\}$$



Ha összevetjük a közelítő megoldásokat a megfelelő egzakt megoldásokkal akkor valóban mind a két esetben lényeges eltérés mutatkozik.

A közelítő megoldás minősítéséhez definiálnunk kell a hiba fogalmát.
A megoldás hibája: az egzakt és a közelítő megoldás közötti különbség.

$$e(x) \overset{def}{=} u_{egzakt}(x) - u^*(x),$$

ahol $e(x)$ a hiba, amely x-nek a függvénye. Gyakorlati számításokhoz a hiba energia normáját szokás alkalmazni, amely tulajdonképpen a hibafüggvényből számolt alakváltozási energia $\delta^2 \prod_p (= \prod_p^* - \prod_p)$ második variáció négyzetgyöke.

$$\|e\|_E := \sqrt{\frac{1}{2}\int_0^l AE\left(\frac{d}{dx}(\delta u)\right)^2 dx} = \sqrt{\frac{1}{2}\int_0^l AE\left(\frac{de}{dx}\right)^2} = \sqrt{\Pi_p^*\left(u^*\right) - \Pi_p\left(u\right)},$$

ahol $\| \ \|$ a norma jele, és a norma jel E indexe az energia fogalomra utal.

A hiba lineáris approximáció esetén:

$$e(x) \overset{def}{=} u_{egzakt}(x) - u^*(x) =$$

$$e(x) = -\frac{f_x}{2AE}x^2 + \frac{F_x + f_x l}{AE}x - \frac{2F_x + f_x l}{2AE}x = -\frac{f_x}{2AE}x^2 + \frac{f_x l}{2AE}x$$

Ezen hiba függvényt megvizsgálva látható, hogy a hiba zérustól különböző f_x megoszló erő esetén jelentkezik, de a rúd végén $x = l$ helyettesítésnél az elmozdulás hibája zérus. Megállapítható, hogy a rúd végei az elmozdulás kiértékelése szempontjából optimális pontok. A hiba függvény deriváltja az alakváltozás hibáját adja:

$$\frac{de}{dx} = -\frac{f_x}{AE}x + \frac{f_x l}{2AE} = \frac{f_x}{AE}\left(-x + \frac{l}{2}\right)$$

A rúd közepén az $x = \frac{l}{2}$ helyettesítésnél az alakváltozás hibája zérus, azaz az alakváltozásból számolt rúderő ebben a pontban pontos. A feladatban a rúderő optimális kiértékelési helye a rúd felező pontja.

Az energia norma szerint értelmezett hiba:

$$\|e\|_E := \sqrt{\frac{1}{2}\int_0^l AE\frac{f_x^2}{A^2E^2}\left(\frac{l}{2} - x\right)^2} = \sqrt{\int_0^l \frac{f_x^2}{2AE}\left[\frac{-\left(\frac{l}{2} - x\right)^3}{3}\right]_0^l} = \sqrt{\frac{f_x^2}{2AE}\left(\frac{l^3}{24} + \frac{l^3}{24}\right)} = \sqrt{\frac{f_x^2 l^3}{24AE}}$$

A végeselem programok a megoldás hibáját szintén energia normában adják meg. Felvetődik a kérdés, hogy hogyan változik a megoldás pontossága az approximáció fokszámának növelésekor? A következő példában az elmozdulást kvadratikus függvénnyel közelítjük.

2.4.2. Kvadratikus approximáció

Tekintsük ismét a húzott-nyomott rúd feladatot, és keressük a feladat közelítő megoldását az alábbi alakban:

$u^*(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2$. Ellenőrizzük, hogy ezen $u^*(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2$ feltételezett megoldás kinematikailag lehetséges-e.

A kinematikai peremfeltétel:

$u^*(0) = 0 = C_0 + C_1 0 + C_2 0^2 \;\;\Rightarrow\;\; C_0 = 0$ csak akkor teljesül, ha $C_0 = 0$, azaz

$u^*(x) = C_1 x + C_2 x^2$.

A deriválhatóság feltétele

$\varepsilon_x^* = \dfrac{du^*}{dx} = C_1 + 2C_2 x$ is teljesül, tehát az elmozdulás $u^*(x) = C_1 x + C_2 x^2$ alakja kinematikailag lehetséges.

$$\left.\begin{aligned} u^*(x) &= C_1 x + C_2 x^2 \\ \varepsilon_x^* &= \frac{du^*}{dx} = C_1 + 2C_2 x \end{aligned}\right\}$$

képleteket behelyettesítve az

$$\Pi_p\left[u(x)\right] = \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^l AE\left(\frac{du^*(x)}{dx}\right)^2 dx}_{\text{alakváltozási energia}} \qquad \underbrace{-\int_0^l u^* f_x dx - F_x u_l^*}_{\text{külső erők virtuális munkája}} \qquad \text{funkcionálba,}$$

a $\Pi_p^*\left[u^*(x)\right] = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^l AE\left(C_1 + 2C_2 x\right)^2 dx - \int_0^l \left(C_1 x + C_2 x^2\right) f_x dx - F_x\left(C_1 l + C_2 l^2\right) = \Pi_p^*\left(C_1, C_2\right)$

kifejezést kapjuk.

Kétváltozós függvény szélsőértéke:

Minimum feltételei:

$\Pi_p^*\left(C_1, C_2\right) = \min.$, ha $\dfrac{\partial \Pi_p^*}{\partial C_1} = 0$, $\dfrac{\partial \Pi_p^*}{\partial C_2} = 0$

$$\frac{\partial \Pi_p^*}{\partial C_1} = 0 = \frac{1}{2}\int_0^l 2AE\left(C_1 + 2C_2 x\right)1 dx - \int_0^l x\, f_x dx - F_x l$$

$$\frac{\partial \Pi_p^*}{\partial C_2} = 0 = \frac{1}{2}\int_0^l 2AE\left(C_1 + 2C_2 x\right)2x dx - \int_0^l x^2\, f_x dx - F_x l^2$$

A kijelölt integrálásokat elvégezve:

$$\left.\begin{aligned} AEC_1\int_0^l dx + AE2C_2\int_0^l x dx - f_x\int_0^l x\, dx - F_x l = 0 \\ 2AEC_1\int_0^l x\, dx + 4AEC_2\int_0^l x^2 dx - f_x\int_0^l x^2\, dx - F_x l^2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

Átalakításokat végezve,

$$AElC_1 + AEl^2C_2 - f_x\frac{l^2}{2} - F_x l = 0 \qquad /:l$$

$$AEl^2C_1 + \frac{4}{3}AEl^3C_2 - \frac{f_x l^3}{3} - F_x l^2 = 0 \qquad /:l^2$$

valamint az ismeretlen paramétereket kifejezve:

$$\left.\begin{aligned} AEC_1 + AElC_2 - f_x\frac{l}{2} - F_x = 0 \\ AEC_1 + \frac{4}{3}AElC_2 - \frac{f_x l}{3} - F_x = 0 \end{aligned}\right\} \text{az 1. egyenletből kivonva a 2. egyenletet.}$$

$-\frac{1}{3}AElC_2 \; -\frac{1}{6}f_x l = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{1}{2}\frac{f_x}{AE}$ Visszahelyettesítve az 1. egyenletbe.

$$C_1 = \frac{\frac{f_x l + f_x l}{2} + F_x}{AE} = \frac{f_x l + F_x}{AE}.$$

A közelítő megoldás:

Az elmozdulás: $u^*\left(x\right) = -\frac{f_x}{2AE}x^2 + \frac{f_x l + F_x}{AE}x$

A rúderő: $N^*\left(x\right) = F_x + f_x l - f_x x$

Ha összevetjük ezen közelítő megoldásokat az egzakt megoldásokkal,akkor látható,

$$u\left(x\right) = -\frac{f_x}{2A\cdot E}x^2 + \left(\frac{F_x + f\left(x\right)l}{AE}\right)x + 0,$$

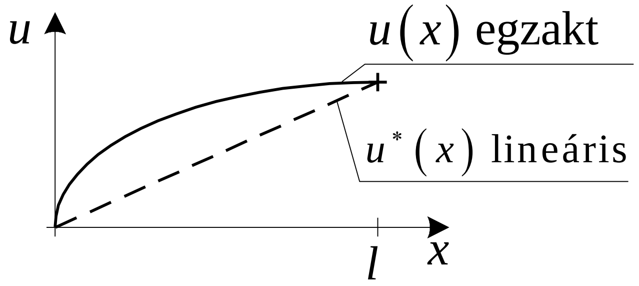
$$N\left(x\right) = A\cdot E\cdot\frac{du\left(x\right)}{dx} = AE\left(-\frac{f_x}{A\cdot E}x + \frac{F_x + f_x l}{AE}\right) = -f_x\cdot x + F_x + f_x\cdot l,$$

hogy megegyeznek.

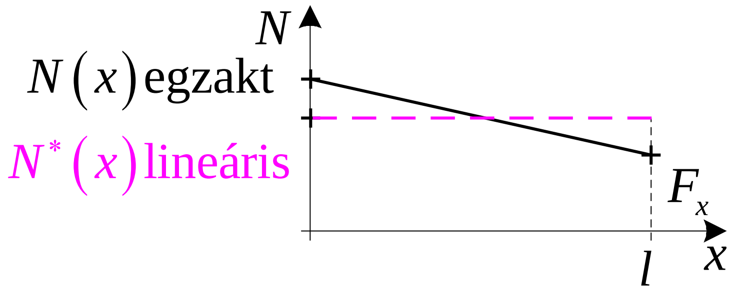
Amint azt a két különböző approximáció alkalmazásánál láttuk (lásd következő ábrák) a közelítő megoldás pontossága növelésének egyik lehetséges útja az approximáció fokának növelése. A továbbiakban egy másik utat tanulmányozunk, amikor is a tartományt résztartományokra bontjuk, és ezeken a résztartományokon az ismeretlen elmozdulás mezőt külön-külön lokálisan közelítjük. Ezt abban a reményben tesszük, hogy a számítás pontossága a résztartományok számának növelésével szintén növelhető. A résztartományokat véges méretű elemeknek, tömören végeselemeknek fogjuk nevezni. A résztartományok (elemek) határain pedig csomópontokat jelölünk ki és az approximációt a közelítendő mező csomóponti értékein keresztül fejezzük ki.

A javasolt módszer előnye, hogy könnyen programozható és így bonyolult szerkezetek nagypontosságú elemzésére nyílik lehetőség.

Az egzakt, kvadratikus elmozdulást és a lineáris közelítő elmozdulást, valamint a megfelelő rúderő megoldásokat a következő ábrák szemléltetik.

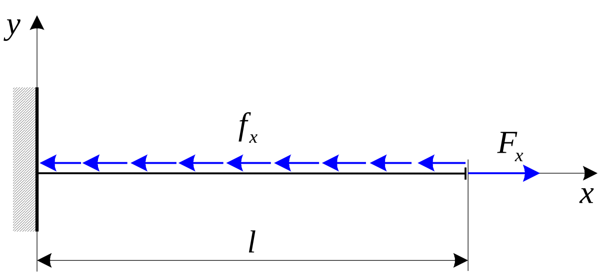
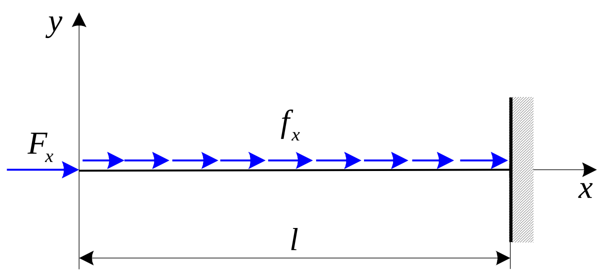
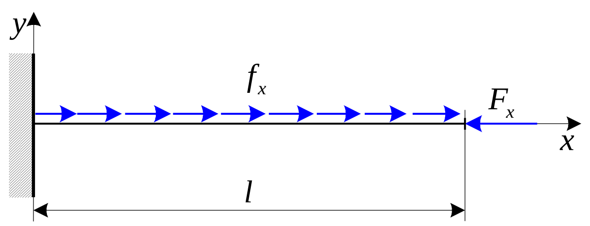
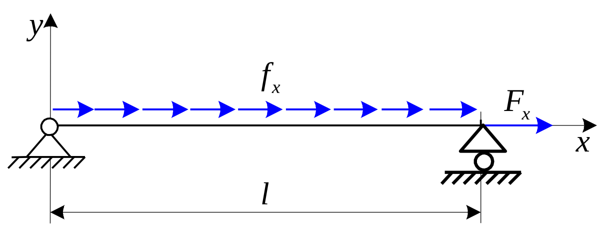


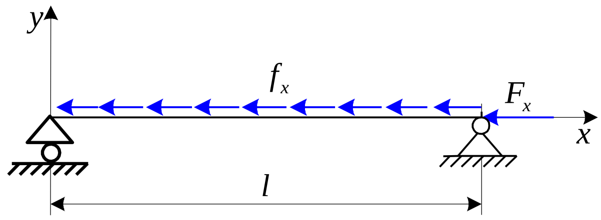
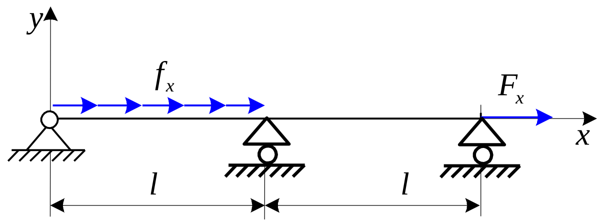
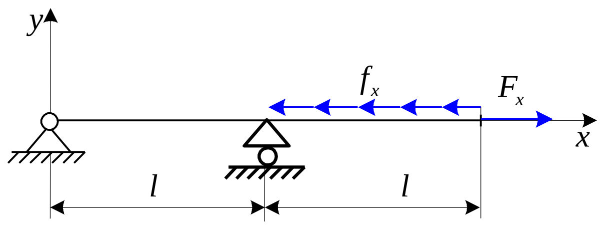
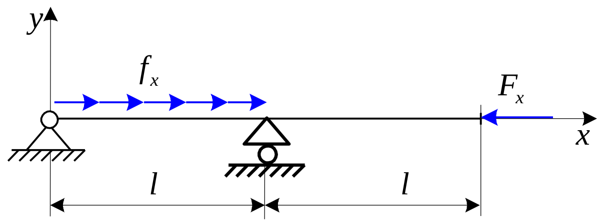
. ábra: Elmozdulások



. ábra: Rúderők

2.4.3. Példák virtuális munka meghatározására az $u(x)$ elmozdulás mező függvényében

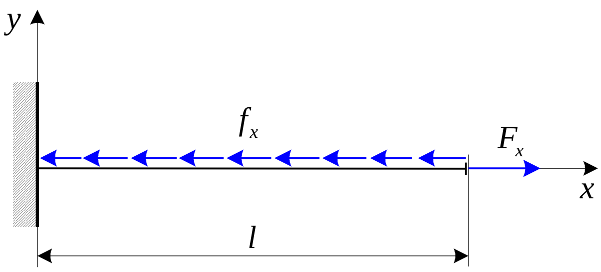
	$W_k = \int_0^l -f_x u(x)\,dx + F_x u(l)$
	$W_k = \int_0^l f_x u(x)\,dx + F_x u(0)$
	$W_k = \int_0^l f_x u(x)\,dx - F_x u(l)$
	$W_k = \int_0^l f_x u(x)\,dx + F_x u(l)$

	$W_k=\int_0^l -f_x u(x)\,dx-F_x u(l)$
	$W_k=\int_0^l f_x u(x)\,dx+F_x u(2l)$
	$W_k=\int_l^{2l} -f_x u(x)\,dx+F_x u(2l)$
	$W_k=\int_0^l f_x u(x)\,dx-F_x u(2l)$

2.4.4. Példák Ritz-módszer és lineáris, majd kvadratikus approximáció alkalmazására, valamint az elsőfokú közelítéshez tartozó hiba energianormájának számítására

1. példa:

Megoldás lineáris approximációval:



Tekintsük ismét a húzott-nyomott rúd feladatot, és keressük a feladat közelítő megoldását az alábbi alakban:

$u^*(x)=C_0+C_1x$. Ellenőrizzük, hogy ezen $u^*(x)=C_0+C_1x$ feltételezett megoldás kinematikailag lehetséges-e.

A kinematikai peremfeltétel: $u^*(x=0)=0$, azaz $C_0+C_1 0=0 \quad \Rightarrow \quad C_0=0$. Azaz az $u^*(0)=0=C_0+C_1 0$ egyenlet csak akkor teljesül, ha $C_0=0$, azaz a kinematikailag lehetséges elmozdulás a következő alakú:

$u^*(x)=C_1 x$.

A deriválhatóság feltétele $\varepsilon^*(x)=\dfrac{du^*}{dx}=C_1$ is teljesül, tehát megállapíthatjuk, hogy az $u^*(x)=C_1 x$ alakú közelítő elmozdulás kinematikailag lehetséges.

Az $\left.\begin{aligned} u^*(x)&=C_1 x \\ \varepsilon^*(x)&=\frac{du^*}{dx}=C_1 \end{aligned}\right\}$ képleteket behelyettesítve az

$$\Pi_p\left[u(x)\right]=\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^l AE\left(\frac{du(x)}{dx}\right)^2 dx}_{\text{alakváltozási energia}} \qquad \underbrace{-\int_0^l u\, f_x dx-F_x u_l}_{\text{külső erők virtuális munkája}}$$ funkcionálba,

a $\Pi_p^*\left[u^*(x)\right]=\Pi_p^*(C_1)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^l AE\left(C_1\right)^2 dx+\int_0^l C_1 x\, f_x dx-F_x C_1 l$ kifejezést kapjuk.

Egyváltozós függvény szélsőértéke:
Szükséges feltétel: a függvény első deriváltja az adott helyen nulla legyen.
Azaz akkor lesz a potenciális energiának szélsőértéke, ha

$$\min \Pi_p^*(C_1) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\,\Pi_p^*}{dC_1}=0=\int_0^l AEC_1 dx+\int_0^l x\, f_x dx-F_x l$$

A kijelölt integrálást elvégezve és az ismeretlen paramétert kifejezve:

$$0=AEC_1\underbrace{\int_0^l dx}_{l}+f_x\underbrace{\int_0^l x\,dx}_{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^l}-F_x l$$

$$0=AEC_1 l+f_x\frac{l^2}{2}-F_x l \qquad /:l\ /:AE$$

$$C_1=-\frac{f_x l}{2AE}+\frac{F_x}{AE}=\frac{-f_x l+2F_x}{2AE}=\frac{1}{AE}\left(F_x-\frac{f_x l}{2}\right)x$$

$$u^*(x)=C_1 x=\frac{1}{AE}\left(F_x-\frac{f_x l}{2}\right)x$$

$$N^*(x)=AE\frac{du^*}{dx}=F_x-\frac{f_x l}{2}$$

Egzakt megoldás (I. előadás anyag alapján):

$u(x)=\dfrac{f_x}{2A\cdot E}x^2+C_1 x+C_2$ (behelyettesítve)

$u(x)=\dfrac{f_x}{2A\cdot E}x^2+\left(\dfrac{F_x-f_x l}{AE}\right)x+0$, valamint:

$$N(x)=A\cdot E\cdot\frac{du(x)}{dx}=AE\left(\frac{f_x}{A\cdot E}x+C_1\right)\text{(behelyettesítve)}$$

$$N(x)=A\cdot E\cdot\frac{du(l)}{dx}=AE\left(\frac{f_x}{AE}x+\frac{F_x-f_xl}{AE}\right)=f_x\cdot x+F_x-f_x\cdot l$$

Ha összevetjük a közelítő megoldásokat a megfelelő egzakt megoldásokkal akkor valóban mind a két esetben lényeges eltérés mutatkozik.

A hiba lineáris approximáció esetén:

$$e(x)\overset{def}{=}u_{egzakt}(x)-u^*(x)=$$

$$e(x)=\left(\frac{f_x}{2AE}x^2+\frac{F_x-f_xl}{AE}x\right)-\left(\frac{F_x}{AE}-\frac{f_xl}{2AE}\right)x=\frac{f_x}{2AE}x^2+\frac{F_xx}{AE}-\frac{f_xlx}{AE}-\frac{F_xx}{AE}+\frac{f_xlx}{2AE}=\frac{f_x}{2AE}x^2=\frac{1}{2}\frac{f_x}{AE}x^2$$

A hiba függvény deriváltja az alakváltozás hibáját adja:

$$\frac{de}{dx}=\frac{f_xx}{AE}-\frac{f_xl}{2AE}$$

Az energia norma szerint értelmezett hiba:

$$\|e\|_E:=\sqrt{\frac{1}{2}\int_0^l AE\left(\frac{f_xx}{AE}-\frac{f_xl}{2AE}\right)^2dx}=\sqrt{\frac{f_x^2l^3}{24AE}}$$

Megoldás kvadratikus approximáció:

Keressük a feladat közelítő megoldását az alábbi alakban:

$u^*(x)=C_0+C_1x+C_2x^2$. Ellenőrizzük, hogy ezen $u^*(x)=C_0+C_1x+C_2x^2$ feltételezett megoldás kinematikailag lehetséges-e.

A kinematikai peremfeltétel:

$u^*(0)=0=C_0+C_10+C_20^2 \;\Rightarrow\; C_0=0$ csak akkor teljesül, ha $C_0=0$, azaz

$u^*(x)=C_1x+C_2x^2$.

A deriválhatóság feltétele

$\varepsilon_x^*=\dfrac{du^*}{dx}=C_1+2C_2x$ is teljesül, tehát az elmozdulás $u^*(x)=C_1x+C_2x^2$ alakja kinematikailag lehetséges.

$$\left.\begin{aligned}u^*(x)&=C_1x+C_2x^2\\ \varepsilon_x^*&=\frac{du^*}{dx}=C_1+2C_2x\end{aligned}\right\}$$

képleteket behelyettesítve az

$$\Pi_p[u(x)]=\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^l AE\left(\frac{du^*(x)}{dx}\right)^2dx}_{\text{alakváltozási energia}}\qquad\underbrace{-\int_0^l u^*f_xdx-F_xu_l^*}_{\text{külső erők virtuális munkája}}$$ funkcionálba,

a $\Pi_p^*\left[u^*(x)\right]=\frac{1}{2}\int_0^l AE\left(C_1+2C_2x\right)^2 dx+\int_0^l\left(C_1x+C_2x^2\right)f_x dx-F_x\left(C_1l+C_2l^2\right)=\Pi_p^*\left(C_1,C_2\right)$

kifejezést kapjuk.

Kétváltozós függvény szélsőértéke:

Minimum feltételei:

$\Pi_p^*\left(C_1,C_2\right)=\min.$, ha $\frac{\partial\Pi_p^*}{\partial C_1}=0$, $\frac{\partial\Pi_p^*}{\partial C_2}=0$

$$\frac{\partial\Pi_p^*}{\partial C_1}=0=\frac{1}{2}\int_0^l 2AE\left(C_1+2C_2x\right)1dx+\int_0^l x\,f_x dx-F_xl$$

$$\frac{\partial\Pi_p^*}{\partial C_2}=0=\frac{1}{2}\int_0^l 2AE\left(C_1+2C_2x\right)2xdx+\int_0^l x^2\,f_x dx-F_xl^2$$

A kijelölt integrálásokat elvégezve:

$$\left.\begin{aligned}&AEC_1\int_0^l dx+AE2C_2\int_0^l xdx+f_x\int_0^l x\,dx-F_xl=0\\&2AEC_1\int_0^l x\,dx+4AEC_2\int_0^l x^2dx+f_x\int_0^l x^2\,dx-F_xl^2=0\end{aligned}\right\}$$

Átalakításokat végezve,

$$AElC_1+AEl^2C_2+f_x\frac{l^2}{2}-F_xl=0 \qquad /:l$$

$$AEl^2C_1+\frac{4}{3}AEl^3C_2+\frac{f_xl^3}{3}-F_xl^2=0 \qquad /:l^2$$

valamint az ismeretlen paramétereket kifejezve:

$$\left.\begin{aligned}&AEC_1+AElC_2+f_x\frac{l}{2}-F_x=0\\&AEC_1+\frac{4}{3}AElC_2+\frac{f_xl}{3}-F_x=0\end{aligned}\right\}\text{az 1. egyenletből kivonva a 2. egyenletet.}$$

$-\frac{1}{3}AElC_2+\frac{1}{6}f_xl=0 \quad\Rightarrow\quad C_2=\frac{1}{2}\frac{f_x}{AE}$ Visszahelyettesítve az 1. egyenletbe.

$C_1=\frac{F_x-f_xl}{AE}$.

A közelítő megoldás:

Az elmozdulás: $u^*(x)=\frac{F_x-f_xl}{AE}x+\frac{f_x}{2AE}x^2$

A rúderő: $N^*(x)=F_x-f_xl+\frac{f_x}{AE}x$

Ha összevetjük ezen közelítő megoldásokat az egzakt megoldásokkal,akkor látható, hogy megegyeznek:

$$u(x)=\frac{f_x}{2A\cdot E}x^2+\left(\frac{F_x-f(x)l}{AE}\right)x+0$$

$$N\left(x\right)=A\cdot E\cdot\frac{du\left(l\right)}{dx}=AE\left(\frac{f_x}{AE}x+\frac{F_x-f_xl}{AE}\right)=f_x\cdot x+F_x-f_x\cdot l$$