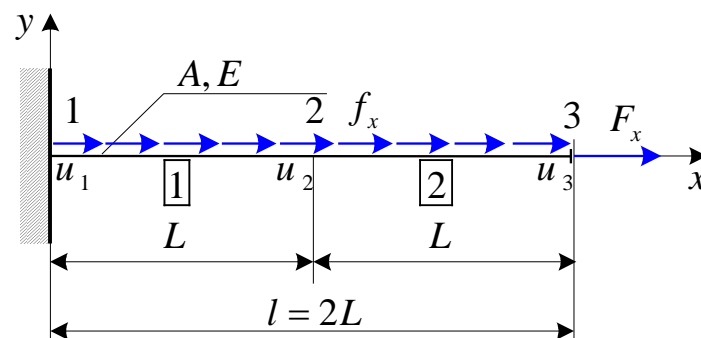


### 3. Lokális approximáció elve, végeelem diszkretizáció egydimenziós feladatra

Amint azt a két különböző approximáció alkalmazásánál láttuk a közelítő megoldás pontossága növelésének egyik lehetséges útja az approximáció fokának növelése. A továbbiakban egy másik utat tanulmányozunk, amikor is a tartományt résztartományokra bontjuk, és ezeken a résztartományokon az ismeretlen elmozdulás mezőt külön-külön lokálisan közelítjük. Ezt abban a reményben tesszük, hogy a számítás pontossága a résztartományok számának növelésével szintén növelhető. A résztartományokat véges méretű elemeknek, tömören végeelemeknek fogjuk nevezni. A résztartományok (elemek) határain pedig csomópontokat jelölünk ki és az approximációt a közelítendő mező csomóponti értékein keresztül fejezzük ki.

A javasolt módszer előnye, hogy könnyen programozható és így bonyolult szerkezetek nagy pontosságú elemzésére nyílik lehetőség.

#### Lokális approximáció elve, végeelem diszkretizáció egydimenziós feladatra

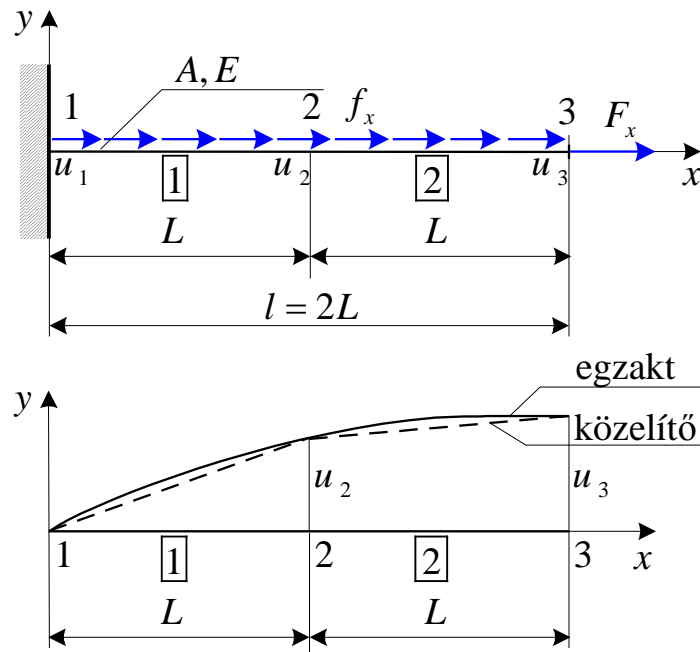


1. ábra: Kételemes felosztás

Vizsgálatainkat továbbra is az első előadás során vázolt peremérték feladatra végezzük. A végeelem diszkretizáció jelentése végeelemes felosztás, a tartomány résztartományokra, azaz elemekre osztása.

Az 1. ábrán vázolt tartományt két egyenlő hosszúságú résztartományra azaz végeelemre bontjuk és az elmozdulás mezőt az elemeken külön-külön közelítjük. Az elemek sorszámát bekereteztük, az elemek végein fel

tüntetett számok jelölik az elemek csomóponti sorszámait. Az ismeretlen elmozdulás mezőt elemenként külön-külön lineárisan közelítjük és gondoskodunk azok illesztéséről is. az illesztés azt jelenti, hogy az elemhatáron közös 2. csomópontban az  $u_2$  elmozdulás megegyezik mindkét elemen. A 2. b) ábrán folytonos vonal jelöli az egzakt megoldást és szaggatott a közelítést.



2. ábra: Kételemes felosztás, approximáció elemenként

Vesszük a 2. b) ábra esetén az egzakt megoldás  $L$  és  $2L$  helyen levő elmozdulás értékeit, majd ezeket összekötjük egy egyenessel, figyelembe véve, hogy  $u_1 = 0$ .

Ezen közelítés felépíthető csomópontokhoz rendelt approximációs függvények segítségével is, amint az a 3. ábrán látható. Egy-egy közelítő függvény az egész ( $2L$ ) tartományon folytonos, de csak lokálisan a megfelelő csomóponthoz tartozó elemek felett különbözik nullától. Ezen függvények Ritz-féle bázisfüggvényeknek is tekinthetők.

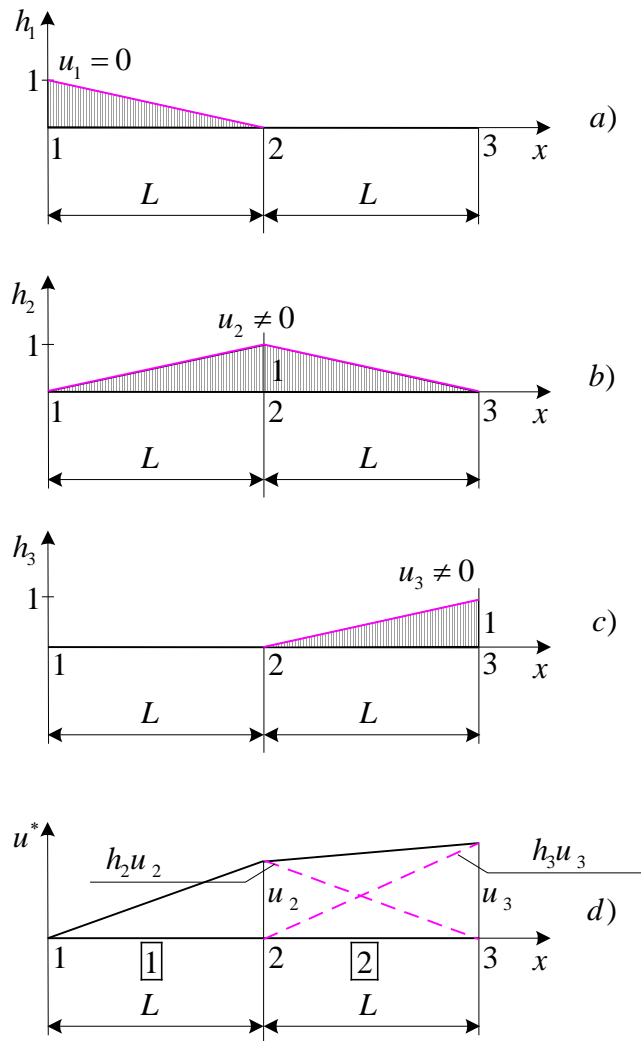
A 3. d) ábrán vázolt közelítő függvény (folytonos vonal) felépíthető a csomópontokhoz rendelt  $h_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) alakfüggvények lineáris kombinációjaként is.

$u^*(x) = \sum_{i=1}^3 h_i(x)u_i$ , ahol az egyes mennyiségek bal alsó indexei a megfelelő csomóponti sorszámokat jelölik, valamint megjegyezzük, hogy  $u_1 = 0$ .

(Az első  $h_1(x)$  függvény értéke a befogásnál legyen 1, a többi helyen nulla. A második függvény értéke  $L$  helyen legyen, a harmadik függvény értéke  $2L$  helyen legyen 1.)

$$u^*(x) = h_1(x)u_1 + h_2(x)u_2 + h_3(x)u_3$$

=0



3. ábra: Csomópontokhoz rendelt lokális approximáció függvények

Ahhoz, hogy a közelítő mező kinematikailag lehetséges legyen, az  $u_1 = 0$  kinematikai peremfeltételt elő kell írunk, vagyis a 3. a) ábrán látható függvény nem játszik szerepet az approximációban.

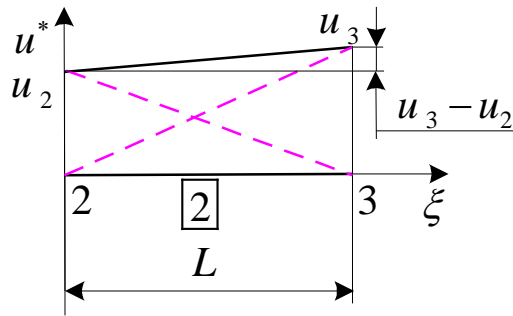
### 3.1. Húzott-nyomott rúdelem

A Ritz-módszer alkalmazásakor láthattuk, hogy a közelítő megoldás keresése során a szerkezet teljes potenciális energiáját kellett felírni. Hasonlóan járunk el, amikor a vizsgált tartományt résztartományokra, végelemekre bontjuk. A szerkezet teljes potenciális energiája az egyes elemeken számolt potenciális energiák összegeként állítható elő a koncentrált erő munkájával együtt.

$$\Pi_p = \sum_{e=1}^2 \Pi_p^e - F_x u_3,$$

ahol az  $e$  index a végelemek sorszámát jelöli. Megjegyezzük, hogy a koncentrált erő munkáját nem szokás valamely elem teljes potenciális energiájához rendelni, csupán a szerkezet teljes potenciális energiájához.

Vizsgáljuk meg a 3. d) ábrán és a 4. ábrán is vázolt 2-es számú végelemen az elmozdulás approximációját.



4. ábra: Approximáció a 2. elemen

A 4. ábrán az elemhez kötötten bevezetésre kerül egy új  $\xi$  elmozdulás koordináta oly módon, hogy az origója egybeesik az elem az elem bal oldali végpontjával és iránya megegyezik az eredeti  $x$  iránnyal. Írjuk fel a  $\xi$  koordináta és az  $u_i$  csomóponti elmozdulás koordináták segítségével kifejezve az elmozdulás mezőt az elem mentén

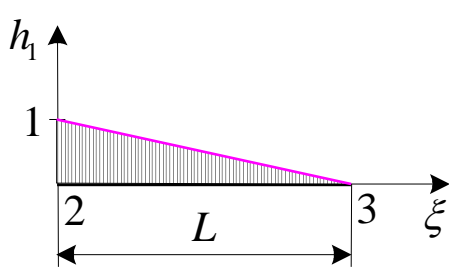
$$u^2(\xi) = u_2 + \frac{u_3 - u_2}{L} \xi$$

(egyenes egyenlete  $y(x) = ax + b$ ,  
meredekség szorozva a változóval az a pont, ahol az egyenes metszi a függőleges tengelyt)

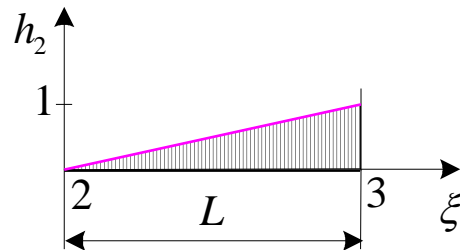
ahol az  $u(\xi)$  jobb felső indexében a 2-es szám az elem sorszámára utal. Rendezzük át az utóbbi összefüggést a csomóponti elmozdulások szerint, majd sor és oszlop mátrixokkal is kifejezve az összefüggés az alábbi módon írható fel:

$$u^2(\xi) = u_2 + \frac{u_3 - u_2}{L} \xi = \left(1 - \frac{\xi}{L}\right) u_2 + \frac{\xi}{L} u_3 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\xi}{L} & \frac{\xi}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = [u_2 \quad u_3] \begin{bmatrix} 1 - \frac{\xi}{L} \\ \frac{\xi}{L} \end{bmatrix},$$

ahol az  $L$  hosszúságú húzott-nyomott végelem lineáris approximációs függvényei:



$$A_1(\xi) = 1 - \frac{\xi}{L}$$



$$A_2(\xi) = \frac{\xi}{L}$$

A 2-s elem approximációja alapján felírhatjuk egy általános  $e$  sorszámú és  $i, j$  csomópontú elem közelítését is.

$$u^e(\xi) = \left(1 - \frac{\xi}{L^e}\right)u_i + \frac{\xi}{L^e}u_j = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{\xi}{L^e}\right) & \frac{\xi}{L^e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i^e & u_j^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{\xi}{L^e}\right) \\ \frac{\xi}{L^e} \end{bmatrix}$$

Ez utóbbi képlet alkalmas az  $e=1$  sorszámú elem elmozdulásának leírására is a megfelelő  $i=1$  és  $j=2$  csomóponti elmozdulás behelyettesítésével.

Az  $u^e(\xi)$  elmozdulás mező ismeretében az  $\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx}$  egyenlet segítségével számolhatjuk az alakváltozást (a deriválást értelemszerűen  $\xi$  szerint hajtjuk végre):

$$\varepsilon_x^e(\xi) = \frac{du^e(\xi)}{d\xi} = \frac{u_j^e - u_i^e}{L^e} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L^e} & \frac{1}{L^e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i^e & u_j^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L^e} \\ \frac{1}{L^e} \end{bmatrix}$$

Alkalmazva az anyagtörvényt, meghatározható az elemen a rúderő is:

$$N^e(\xi) = AE \frac{du^e(\xi)}{d\xi} = AE \begin{bmatrix} -\frac{1}{L^e} & \frac{1}{L^e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i^e & u_j^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L^e} \\ \frac{1}{L^e} \end{bmatrix} AE$$

Ezek után felírhatjuk az  $e$ -dik elem potenciális energiáját (az  $F_x$  koncentrált erőt csak a teljes szerkezet potenciális energiájára vonatkozóan vesszük figyelembe):

$$\Pi_p^e(u_i^e, u_j^e) = \frac{1}{2} \int_0^{L^e} AE \left( \frac{du^e(\xi)}{d\xi} \right)^2 d\xi - \int_0^{L^e} u^e(\xi) f_x d\xi$$

$$\Pi_p^e(u_i^e, u_j^e) = \frac{1}{2} \int_0^{L^e} \underbrace{\begin{bmatrix} u_i^e & u_j^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L^e} \\ \frac{1}{L^e} \end{bmatrix} AE \begin{bmatrix} -\frac{1}{L^e} & \frac{1}{L^e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \end{bmatrix}}_{U^e \text{ elem alakváltozási energiája}} d\xi - \int_0^{L^e} \underbrace{\begin{bmatrix} u_i^e & u_j^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{\xi}{L^e} \\ \frac{\xi}{L^e} \end{bmatrix} f_x}_{\text{megoszló ER W}^e \text{ munkája}} d\xi$$

A csomóponti paraméterek az integrálás szempontjából konstansnak tekinthetők ezért kiemelhetjük az integrál jel elé:

$$U^e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_i^e & u_j^e \end{bmatrix} \int_0^{L^e} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L^e} \\ \frac{1}{L^e} \end{bmatrix} AE \begin{bmatrix} -\frac{1}{L^e} & \frac{1}{L^e} \end{bmatrix} d\xi \begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_i^e & u_j^e \end{bmatrix} \int_0^{L^e} \begin{bmatrix} \frac{AE}{L^2} & -\frac{AE}{L^2} \\ -\frac{AE}{L^2} & \frac{AE}{L^2} \end{bmatrix} d\xi \begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \end{bmatrix}$$

Az utóbbi alakváltozási energiában levő mátrix egy elemének integrálja:

$$\int_0^{L^e} \frac{AE}{L^2} d\xi = \frac{AE}{L^2} \xi \Big|_0^{L^e} = \frac{AE}{L}$$

Ezt visszahelyettesítve az alakváltozási energiába:

$$U^e = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} u_i^e & u_j^e \end{bmatrix}}_{\underline{q}^{eT}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix}}_{\underline{K}^e} \underbrace{\begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \end{bmatrix}}_{\underline{q}^e} = \frac{1}{2} \underline{q}^{eT} \underline{K}^e \underline{q}^e,$$

ahol a  $2 \times 2$ -s mátrixot az  $e$  elem merevségi mátrixának nevezzük és  $\underline{K}^e$ -vel jelöljük, a függőleges  $2 \times 1$ -s oszlopvektort és a vízszintes  $1 \times 2$ -s sorvektort az  $e$  elem csomóponti elmozdulás vektorának nevezzük és  $\underline{q}^{eT}, \underline{q}^e$ -vel jelöljük, ahol T a transzponálás jele.

A megoszló erőrendszer munkája az  $e$  elemen:

$$W^e = \begin{bmatrix} u_i^e & u_j^e \end{bmatrix} \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{\xi}{L^e} \\ \frac{\xi}{L^e} \end{bmatrix} f_x d\xi,$$

ahol az oszlopvektor elemeinek integrálása után

$$\left. \begin{aligned} \int_0^L \left(1 - \frac{\xi}{L^e}\right) f_x d\xi &= \left(\xi - \frac{\xi^2}{L^e 2}\right) f_x \Big|_0^L = \frac{f_x L^e}{2} \\ \int_0^L \frac{\xi}{L^e} f_x d\xi &= \frac{\xi^2}{L^e 2} f_x \Big|_0^L = \frac{f_x L^e}{2} \end{aligned} \right\} \text{visszahelyettesítve } W^e \text{-be:}$$

$$W^e = \begin{bmatrix} u_i^e & u_j^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{f_x L^e}{2} \\ \frac{f_x L^e}{2} \end{bmatrix} = \underline{q}^{eT} \underline{f}^e,$$

ahol a  $2 \times 1$ -s oszlopvektor az elem tehervektora és  $\underline{f}^e$ -vel jelöljük.

Az  $e$  jelű elem potenciális energiája:

$$\Pi_p^e(u_i^e, u_j^e) = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} u_i^e & u_j^e \end{bmatrix}}_{\underline{q}^{eT}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix}}_{\underline{K}^e} \underbrace{\begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \end{bmatrix}}_{\underline{q}^e} - \begin{bmatrix} u_i^e & u_j^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{f_x L^e}{2} \\ \frac{f_x L^e}{2} \end{bmatrix}$$

### 3.2. Szerkezeti mátrixok

Az elemek potenciális energiájának ismeretében felírhatjuk a szerkezet teljes potenciális energiáját:

$$\Pi_p = \sum_{e=1}^2 \Pi_p^e - F_x u_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{K^e}}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{f_x L^1}{2} \\ \frac{f_x L^1}{2} \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_2 & u_3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{AE}{L^2} & -\frac{AE}{L^2} \\ -\frac{AE}{L^2} & \frac{AE}{L^2} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{K^e}}} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{f_x L^2}{2} \\ \frac{f_x L^2}{2} \end{bmatrix} - F_x u_3$$

A szerkezet teljes potenciális energiája tömörebben is felírható, mivel a szomszédos elemek közös csomópontjában az elmozdulás megegyezik-jelen esetben  $u_2$  - így értelemszerűen csak egyszer szerepeltetjük a kifejezésben, ezáltal biztosítjuk az elemek illesztését, azaz  $u_2^1 = u_2^2$ .

$$\Pi_p(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} & 0 \\ -\frac{AE}{L} & AE\left(\frac{1}{L^1} + \frac{1}{L^2}\right) & -\frac{AE}{L^2} \\ 0 & -\frac{AE}{L^2} & \frac{AE}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{f_x L^1}{2} \\ \frac{f_x L^1}{2} + \frac{f_x L^2}{2} \\ \frac{f_x L^2}{2} + F_x \end{bmatrix}$$

Az elemek illesztésén túl van egy másik fontos feltétel, amit még teljesítenünk kell, a kinematikai peremfeltétel. Ez azt jelenti, hogy a befalazásnál levő csomópontban gondoskodnunk kell arról, hogy  $u_1 = 0$  legyen

$$\Pi_p(u_2, u_3) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} & 0 \\ -\frac{AE}{L} & AE\left(\frac{1}{L^1} + \frac{1}{L^2}\right) & -\frac{AE}{L^2} \\ 0 & -\frac{AE}{L^2} & \frac{AE}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{f_x L^1}{2} \\ \frac{f_x L^1}{2} + \frac{f_x L^2}{2} \\ \frac{f_x L^2}{2} + F_x \end{bmatrix}$$

Nullával szorozzuk végig a merevségi mátrix első sorát és oszlopát, a teher vektor vonatkozásában az első elemet. Ezért az első sor és az első oszlop a szerkezeti mátrixból és a szerkezeti vektorból elhagyható

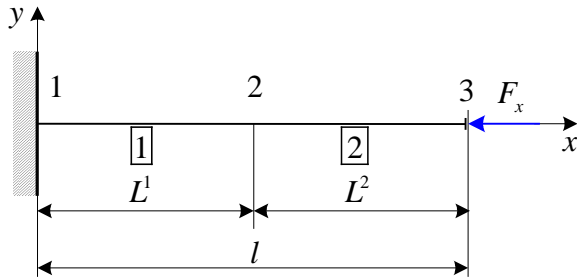
$$\Pi_p(u_2, u_3) = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} u_2 & u_3 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{q^T}}} \underbrace{\begin{bmatrix} AE\left(\frac{1}{L^1} + \frac{1}{L^2}\right) & -\frac{AE}{L^2} \\ -\frac{AE}{L^2} & \frac{AE}{L^2} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{K}}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{q}}} - \underbrace{\begin{bmatrix} u_2 & u_3 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{q^T}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{f_x L^1}{2} + \frac{f_x L^2}{2} \\ \frac{f_x L^2}{2} + F_x \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{f}}}$$

ahol a jobb oldal első tagjában a  $2 \times 2$ -s mátrixot szerkezeti merevségi mátrixának nevezzük és  $\underline{\underline{K}}$ -val jelöljük, a csomóponti elmozdulásokat tartalmazó függőleges  $2 \times 1$ -s oszlopvektort és a vízszintes  $1 \times 2$ -s sorvektort szerkezeti csomóponti elmozdulás vektornak nevezzük és  $\underline{\underline{q, q^T}}$ -vel jelöljük, ahol T a transzponálás jele. Végül a  $2 \times 1$ -s oszlopvektort, amely a szerkezet terhelését tartalmazza szerkezeti tehervektornak nevezzük és  $\underline{\underline{f}}$ -vel jelöljük.

### 3.3. Példák szerkezet potenciális energiájának meghatározására

Írja fel a rúdszerkezet  $\Pi_p^*$  kinematikailag lehetséges potenciális energiáját úgy, hogy az elmozdulás mező közelítése végeelemenként lineáris függvénnyel történjen! Avégelemek nem egyforma hosszúak!

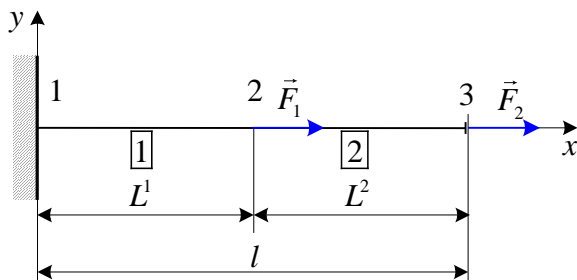
1.



A szerkezet teljes potenciális energiája:

$$\Pi_p = \sum_{e=1}^2 \Pi_p^e + F_x u_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1^1 & u_2^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{AE}{L^1} & -\frac{AE}{L^1} \\ -\frac{AE}{L^1} & \frac{AE}{L^1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_2^2 & u_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{AE}{L^2} & -\frac{AE}{L^2} \\ -\frac{AE}{L^2} & \frac{AE}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2^2 \\ u_3^2 \end{bmatrix} + F_x u_3$$

2.



$$\Pi_p = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1^1 & u_2^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{AE}{L^1} & -\frac{AE}{L^1} \\ -\frac{AE}{L^1} & \frac{AE}{L^1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{bmatrix} - F_1 u_2^1 + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_2^2 & u_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{AE}{L^2} & -\frac{AE}{L^2} \\ -\frac{AE}{L^2} & \frac{AE}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2^2 \\ u_3^2 \end{bmatrix} - F_2 u_3^2$$