6. MECHANIKA-VÉGESELEM MÓDSZER ELŐADÁS
(kidolgozta: Szüle Veronika, egy. ts.)

VI. előadás

3. Lokális approximáció elve, végeselem diszkretizáció egydimenziós feladatra

3.3. Csomóponti elmozdulások meghatározása

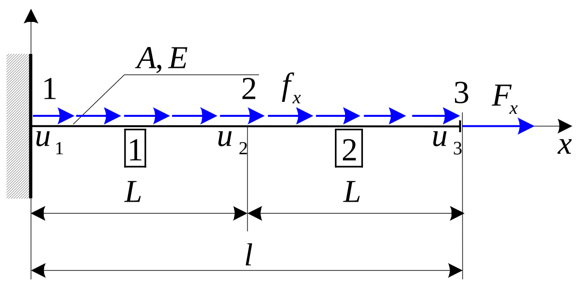
A szerkezet teljes potenciális energiája

$$\Pi_p(u_2,u_3)=\frac{1}{2}\underbrace{\begin{bmatrix}u_2 & u_3\end{bmatrix}}_{\underline{\underline{q}}^T}\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{2AE}{L} & -\frac{AE}{L}\\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L}\end{bmatrix}}_{\underline{\underline{K}}}\underbrace{\begin{bmatrix}u_2\\ u_3\end{bmatrix}}_{\underline{\underline{q}}}-\underbrace{\begin{bmatrix}u_2 & u_3\end{bmatrix}}_{\underline{\underline{q}}^T}\underbrace{\begin{bmatrix}f_xL\\ \frac{f_xL}{2}+F_x\end{bmatrix}}_{\underline{\underline{f}}}$$

azaz

$$\Pi_p\left(\underline{\underline{q}}\right)=\frac{1}{2}\underline{\underline{q}}^T\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{q}}-\underline{\underline{q}}^T\underline{\underline{f}}$$

a csomóponti elmozdulási paraméterek kétváltozós függvénye. A potenciális energia minimum elv értelmében keressük ennek a többváltozós függvénynek a minimumát. A minimum létezésének szükséges feltétele a Ritz-módszernél is bemutatott (azaz kétváltozós függvény szélsőértékét keressük):



1

. ábra: Húzott-nyomott rúdfeladat

Azaz akkor lesz a potenciális energiának szélsőértéke, ha

$$\min \Pi_p(u_2,u_3) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \Pi_p(u_2,u_3)}{\partial u_2}=0, \qquad \frac{\partial \Pi_p(u_2,u_3)}{\partial u_3}=0$$

Tömörebb felírással:

$$\min \Pi_p\left(\underline{\underline{q}}\right) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{0}} = \frac{\partial \Pi_p\left(\underline{\underline{q}}\right)}{\partial \underline{\underline{q}}}.$$

Részletesebb felírással:

a kijelölt szorzásokat elvégezve:

$$\Pi_p\left(u_2,u_3\right) = \frac{1}{2}\frac{AE}{L}\left[2\left(u_2\right)^2 - 2u_2u_3 + \left(u_3\right)^2\right] - u_2 f_x L - u_3\left(\frac{f_x L}{2} + F_x\right)$$

$$0 = \frac{\partial \Pi_p\left(u_2,u_3\right)}{\partial u_2} = \frac{\partial\left\{\frac{1}{2}\frac{AE}{L}\left[2\left(u_2\right)^2 - 2u_2u_3 + \left(u_3\right)^2\right] - u_2 f_x L - u_3\left(\frac{f_x L}{2} + F_x\right)\right\}}{\partial u_2} =$$

$= \frac{1}{2}\frac{AE}{L}\left[4\left(u_2\right) - 2u_3\right] - f_x L = \frac{AE}{L}\left[2\left(u_2\right) - 2u_3\right] - f_x L$, ahol a kapott eredmény azt mutatja,

hogy visszakaptuk $\frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x L \\ \frac{f_x L}{2} + F_x \end{bmatrix}$ első sorát.

Továbbá

$$0 = \frac{\partial \Pi_p\left(u_2,u_3\right)}{\partial u_3} = \frac{\partial\left\{\frac{1}{2}\frac{AE}{L}\left[2\left(u_2\right)^2 - 2u_2u_3 + \left(u_3\right)^2\right] - u_2 f_x L - u_3\left(\frac{f_x L}{2} + F_x\right)\right\}}{\partial u_3} =$$

$= \frac{1}{2}\frac{AE}{L}\left[-2u_2 + 2u_3\right] - \left(\frac{f_x L}{2} + F_x\right) = \frac{AE}{L}\left[-u_2 + u_3\right] - \left(\frac{f_x L}{2} + F_x\right)$, ahol a kapott eredmény azt

mutatja, hogy visszakaptuk $\frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x L \\ \frac{f_x L}{2} + F_x \end{bmatrix}$ második sorát.

A műveleteket elvégezve

$$\underline{\underline{0}} = \frac{\partial \Pi_p\left(\underline{\underline{q}}\right)}{\partial \underline{\underline{q}}} = \frac{\partial\left(\frac{1}{2}\underline{\underline{q}}^T \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{q}} - \underline{\underline{q}}^T \underline{\underline{f}}\right)}{\partial \underline{\underline{q}}} = \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{q}} - \underline{\underline{f}}$$

összefüggést kapjuk, ami átrendezés után egy lineáris algebrai egyenletrendszer:

$$\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{f}}$$

azaz

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{2AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{K}}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{q}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_x L \\ \frac{f_x L}{2} + F_x \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{f}}}$$

$$\frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x L \\ \frac{f_x L}{2} + F_x \end{bmatrix}$$

A lineáris algebrai egyenletrendszer két egyenletet és két ismeretlent tartalmaz. Mivel az együtthatók mátrix determinánsa nyilvánvalóan nem nulla biztos, hogy megoldható a csomóponti elmozdulás paraméterekre.

Balról szorozzuk meg az egyenletet $\underline{\underline{K}}^{-1}$-nel.

$$\underline{\underline{K}}^{-1} / \quad \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{f}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\underbrace{\underline{\underline{K}}^{-1}\underline{\underline{K}}}_{\underline{\underline{T}}}\,\underline{\underline{q}}}_{\underline{\underline{q}}} = \underline{\underline{K}}^{-1}\underline{\underline{f}}$$

$$\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{K}}^{-1}\underline{\underline{f}},$$

ahol

$$\underline{\underline{K}}^{-1} = \frac{\left(adj\left(\underline{\underline{K}}\right)\right)^T}{\det\left(\underline{\underline{K}}\right)}$$ inverz mátrix,

$\det\left(\underline{\underline{K}}\right) = 2 - 1 = 1$ (a főátlók szorzatát kivonjuk egymásból),

adjungált mátrix: a mátrix elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokból képzett mátrix

$$adj\left(\underline{\underline{K}}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Így $\underline{\underline{K}}^{-1} = \frac{\left(adj\left(\underline{\underline{K}}\right)\right)^T}{\det\left(\underline{\underline{K}}\right)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \frac{L}{AE}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_x L \\ \frac{f_x L}{2} + F_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f_x L^2}{AE} + \frac{f_x L^2}{2AE} + \frac{F_x L}{AE} \\ \frac{f_x L^2}{AE} + \frac{f_x L^2}{AE} + \frac{2F_x L}{AE} \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{3}{2}\frac{f_x L^2}{AE} + \frac{F_x L}{AE}$$

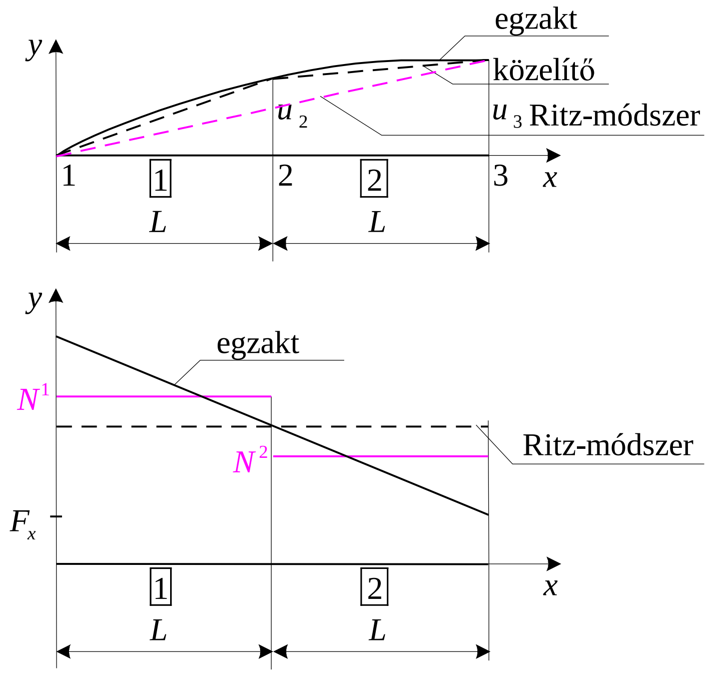
$$u_3 = 2\frac{f_x L^2}{AE} + 2\frac{F_x L}{AE}$$

A rúderők előállítása:

$$N^1(\xi) = AE\frac{du^1(\xi)}{d\xi} = AE\begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = AE\begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2}\frac{f_x L^2}{AE} + \frac{F_x L}{AE} \end{bmatrix} = \frac{3}{2} f_x L + F_x$$

$$N^2(\xi) = AE\frac{du^2(\xi)}{d\xi} = AE\begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = AE\begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{2}\frac{f_x L^2}{AE} + \frac{F_x L}{AE} \\ 2\frac{f_x L^2}{AE} + 2\frac{F_x L}{AE} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} f_x L + F_x$$

Az 1. ábrán vázolt eredmények alapján látható, hogy a rúderő vonatkozásában a rúdelemek felező pontjai optimális kiértékelő helynek bizonyulnak. Ez általában csak akkor áll fenn, ha a tartományt egyenlő hosszúságú elemekre osztjuk.



2. ábra: A rúderő eloszlása a szerkezet mentén

3.4. A végeselem módszer gondolatmenetének összefoglalása:

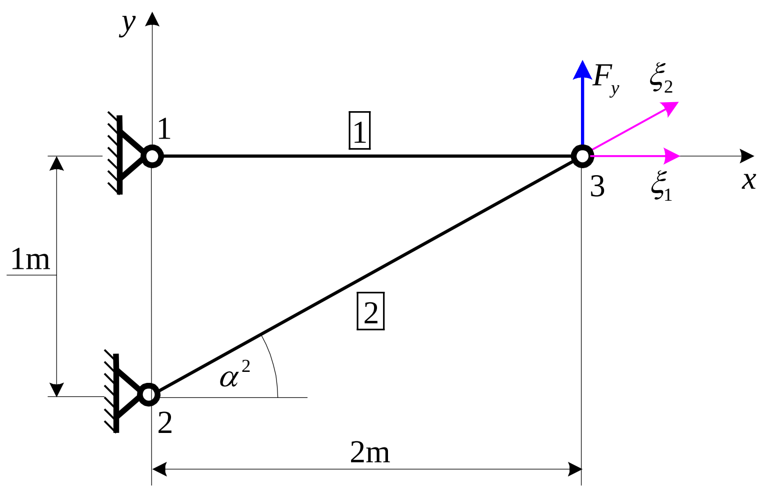
A végeselem módszer lokális approximáció elve (végeselem diszkretizáció egydimenziós feladatra) alapján összefoglaljuk a legfontosabb lépéseket, amelyek egy álatlános térbeli rugalmas feladatra is fennállnak.

A végeselem módszer lépései:

- ❖ A vizsgált szerkezetet véges számú részre, elemekre bontjuk.
- ❖ A keresett megoldást elemenként külön-külön közelítjük.
- ❖ Az elemek valóságos kapcsolódásának megfelelően az elemeket egymáshoz illesztjük, amire az elemek határain kijelölt kapcsolódási pontok, csomópontok, illetve azok elmozdulásai szolgálnak. Így a teljes szerkezetre érvényes közelítést nyerünk, ami már csak a csomópontok jellemző elmozdulásait foglalja magába.
- ❖ A teljes szerkezetre ismert közelítés alapján felírható a szerkezet alakváltozási energiája és a külső erők munkája (azaz a teljes potenciális energia) a csomóponti elmozdulások függvényében.

- A szerkezet mozgását korlátozó kényszereket is csomópontokra vonatkozó kinematikai előírásokkal vesszük figyelembe. ez többnyire azt jelenti, hogy a megfelelő csomópont minden-, vagy adott irányú elmozdulását meggátoljuk.
- Energetikai megfontolásokból (a teljes potenciális energia minimum elve) származtatható a közelítésben felvett összes csomóponti paraméter (elmozdulási koordináták) kiszámítására szolgáló egyenletrendszer. Lineárisan rugalmas szerkezet statikus terhelése mellett ez gyakran nagyméretű lineáris algebrai egyenletrendszer. Az egyenletrendszer a szerkezet egyensúlyát fejezi ki.
- Az egyenletrendszer megoldása után a csomóponti paraméterek ismeretében, meghatározható bármelyik szerkezeti elem szilárdságtani állapota, azaz tetszőleges pontban megkaphatjuk az elmozdulási, alakváltozási és feszültségi állapot jellemzőit.

3.5. Rácsos szerkezet vizsgálata húzott-nyomott rúdelemekkel:



3. ábra: Rácsos szerkezet

Az eddigi végeselemes számításnál kihasználtuk, hogy az x és ξ koordináta tengelyek egyirányúak. A továbbiakban olyan szerkezetet vizsgálunk, ahol a rúdelemek szöget zárnak be egymással.

Adott: a 2. ábrán látható rácsos szerkezet geometriája, terhelése a végeselemes felosztással.

Az adatok számszerű értékei:

A rúdhosszak: $L_1 = 2m$, $L_2 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}m$, $A_1 = 10^{-4}m^2, A_2 = 2 \cdot 10^{-4}m^2$, $\alpha_1 = 0^\circ$,

$\sin\alpha_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}, \cos\alpha_2 = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$,

Anyagjellemzők $E = E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^5 \,\text{MPa}$,

Terhelés: $F_y = 100\,N$

A megoldás során jelölje rendre U, V az x, y irányú elmozdulást.

Kinematikai peremfeltételek: $U_1 = 0, V_1 = 0, U_2 = 0, V_2 = 0$

Feladat: U_3, V_3 meghatározása (3-s csomópont x és y irányú elmozdulásai).

Megoldás: a korábbiaknak megfelelően a szerkezet teljes potenciális energiáját írjuk fel:

$$\Pi_p = \sum_{e=1}^{2} \Pi_p^e - F_y V_3$$

az elemeken megoszló erő nem működik, ezért az egyes elemek potenciális energiája egyenlő a megfelelő alakváltozási energiával. Felhasználva a lokális koordinátarendszerben felírt (még az előző feladatra vonatkozó) kifejezést:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} AE\left(\frac{1}{L^1}+\frac{1}{L^2}\right) & -\frac{AE}{L^2} \\ -\frac{AE}{L^2} & \frac{AE}{L^2} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{K}}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}}_{\underline{q}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{f_x L^1}{2} + \frac{f_x L^2}{2} \\ \frac{f_x L^2}{2} + F_x \end{bmatrix}}_{\underline{f}}$$

, a két rúdra (jelen feladat esetén tehát) az

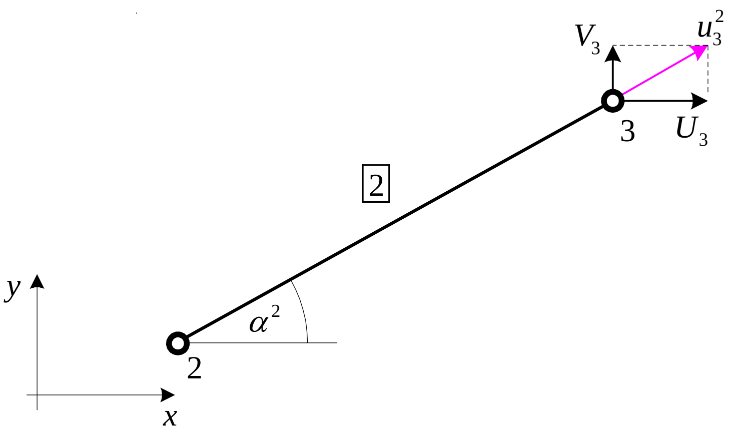
alakváltozási energia:

$$\Pi_p^1 = U^1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} u_1^1 & u_3^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{A_1 E}{L^1} & -\frac{A_1 E}{L^1} \\ -\frac{A_1 E}{L^1} & \frac{A_1 E}{L^1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_3^1 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_p^2 = U^2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} u_2^2 & u_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{A_2 E}{L^2} & -\frac{A_2 E}{L^2} \\ -\frac{A_2 E}{L^2} & \frac{A_2 E}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2^2 \\ u_3^2 \end{bmatrix}$$

, ahol

a két különböző elemen a megfelel lokális koordináta rendszerben (bal felső index jelöli) értelmezett $u_3^1 \neq u_3^2$ elmozdulás nem azonos. Hiszen két különböző irányú ξ_1, ξ_2 tengelyhez tartoznak. Ezen probléma csak úgy oldható meg, ha közös koordinátarendszert alkalmazunk, azaz a globális x,y koordinátarendszert.



4. ábra: Az elmozdulás transzformációja a 2-s végeselem esetén

$$\left.\begin{aligned} U_3 &= u_3^2 \cos\alpha^2 \qquad / \cos\alpha^2 \\ V_3 &= u_3^2 \sin\alpha^2 \qquad / \sin\alpha^2 \end{aligned}\right\} +$$

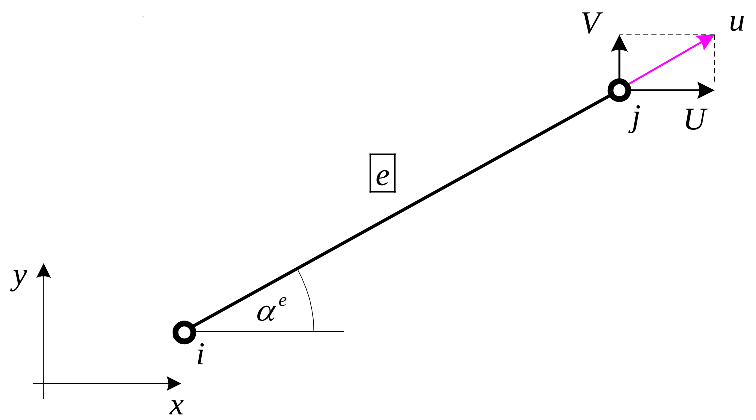
$$U_3 \cos\alpha^2 + V_3 \sin\alpha^2 = u_3^2 \underbrace{\left(\cos^2\alpha^2 + \sin^2\alpha^2\right)}_{1}$$

Tehát a 3. ábrán látható geometriai viszonyok alapján a lokális és globális elmozdulások közötti kapcsolat:

$$u_3^2 = U_3 \cos\alpha^2 + V_3 \sin\alpha^2$$

$$u_3^2 = \begin{bmatrix} \cos\alpha^2 & \sin\alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_3 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

Az e elem helyi és globális koordinátarendszerben vett csomóponti elmozdulásainak transzformációs összefüggése:



5. ábra: Az elmozdulás transzformációja az e-ik végeselem esetén

$$u_i^e = \begin{bmatrix} \cos\alpha^e & \sin\alpha^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\alpha^e & \sin\alpha^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha^e & \sin\alpha^e \end{bmatrix}}_{\text{transzformációs mátrix}} \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{bmatrix}$$

Az e=1 elem elmozdulásának transzformációja $\left(\alpha^1 = 0\right)$:

$$\begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_3^1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{transzformációs mátrix}} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_3 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

Az e=2 elem elmozdulásának transzformációja $\left(\alpha^2 \neq 0\right)$:

$$\begin{bmatrix} u_2^2 \\ u_3^2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}}_{\text{transzformációs mátrix}} \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

Így az alakváltozási energiák a globális elmozdulásokkal kifejezve:

$$\prod_p^1 = U^1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} U_1 & V_1 & U_3 & V_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{A_1E}{L^1} & -\frac{A_1E}{L^1} \\ -\frac{A_1E}{L^1} & \frac{A_1E}{L^1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_3 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

$$\prod_p^2 = U^2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} U_2 & V_2 & U_3 & V_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{A_2E}{L^2} & -\frac{A_2E}{L^2} \\ -\frac{A_2E}{L^2} & \frac{A_2E}{L^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

A kijelölt szorzásokat elvégezve:

$$\prod_p^1 = U^1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} U_1 & V_1 & U_3 & V_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{A_1E}{L^1} & 0 & -\frac{A_1E}{L^1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{A_1E}{L^1} & 0 & \frac{A_1E}{L^1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_3 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

$$\prod_p^2 = U^2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} U_2 & V_2 & U_3 & V_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{4A_2E}{5L^2} & \frac{2A_2E}{5L^2} & -\frac{4A_2E}{5L^2} & -\frac{2A_2E}{5L^2} \\ \frac{2A_2E}{5L^2} & \frac{A_2E}{5L^2} & -\frac{2A_2E}{5L^2} & -\frac{A_2E}{5L^2} \\ -\frac{4A_2E}{5L^2} & -\frac{2A_2E}{5L^2} & \frac{4A_2E}{5L^2} & \frac{2A_2E}{5L^2} \\ -\frac{2A_2E}{5L^2} & -\frac{A_2E}{5L^2} & \frac{2A_2E}{5L^2} & \frac{A_2E}{5L^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

A szerkezet teljes potenciális energiája:

$$\Pi_p = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} U_1 & V_1 & U_2 & V_2 & U_3 & V_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{A_1E}{L^1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{A_1E}{L^1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4A_2E}{5L^2} & \frac{2A_2E}{5L^2} & -\frac{4A_2E}{5L^2} & -\frac{2A_2E}{5L^2} \\ 0 & 0 & \frac{2A_2E}{5L^2} & \frac{A_2E}{5L^2} & -\frac{2A_2E}{5L^2} & -\frac{A_2E}{5L^2} \\ -\frac{A_1E}{L^1} & 0 & -\frac{4A_2E}{5L^2} & -\frac{2A_2E}{5L^2} & \left(\frac{A_1E}{L^1}+\frac{4A_2E}{5L^2}\right) & \frac{2A_2E}{5L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{2A_2E}{5L^2} & -\frac{A_2E}{5L^2} & \frac{2A_2E}{5L^2} & \frac{A_2E}{5L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{bmatrix} - F_y V_3$$

Ha figyelembe vesszük a kinematikai peremfeltételt, hogy $U_1 = 0, V_1 = 0, U_2 = 0, V_2 = 0$, vagyis az első négy sor és oszlop szorzódik nullával, akkor az energia kifejezés lényegesen egyszerűsödik:

$$\Pi_p = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} U_3 & V_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{A_1E}{L^1}+\frac{4A_2E}{5L^2}\right) & \frac{2A_2E}{5L^2} \\ \frac{2A_2E}{5L^2} & \frac{A_2E}{5L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_3 \\ V_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U_3 & V_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_y \\ 0 \end{bmatrix}$$