SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM

ALKALMAZOTT MECHANIKA TANSZÉK

8. MECHANIKA-VÉGESELEM MÓDSZER ELŐADÁS

(kidolgozta: Szüle Veronika, egy. ts.)

VIII. előadás

4. Izoparametrikus elemcsalád

A kereskedelmi szoftverekben leggyakrabban ún. izoparametrikus elemeket alkalmaznak.
Az izoparametrikus jelző azt jelenti, hogy a geometria leképezésére alkalmazott (csomóponti) paraméterek száma azonos az ismeretlen mező közelítésére felvett paraméterek számával. Ez azt is jelenti, hogy ugyanazon alakfüggvényeket alkalmazzuk a geometria leképezésére, mint az ismeretlen mező közelítésére. Az elem típus széleskörű elterjedése elsősorban annak köszönhető, hogy az elem merevségi mátrixának és tehervektorának előállításakor az integrálás könnyen elvégezhető. Egyaránt alkalmazható egy-, két-, és háromdimenziós feladatokra.
A valóságban jelentkező mechanikai feladatok általában térbeli jellegűek, azonban a mechanikai problémák egy része bizonyos feltételek esetén visszavezethetőek egy dimenziós (1D-s) illetve síkbeli 2D-s feladatokra. A 2D-s feladatok közül az alábbi három formalizmusát tekintve hasonlóan tárgyalható:

- általánosított síkfeszültségi állapotú feladat, vagyis tárcsafeladat,
- síkalakváltozási feladat,
- tengelyszimmetrikus feladat.

Ezen fejezetben az 1D-s és 2D-s elemekkel foglalkozunk, a 3D-s elemek származtatása az előzőekhez nagyon hasonlóan történik.

4.1.Elemek csoportosítása

a) Kiterjedésük szerint

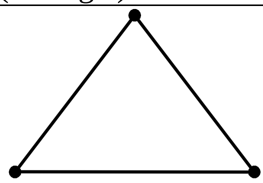
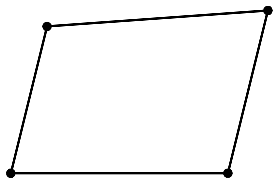
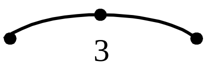
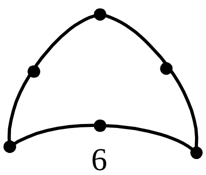
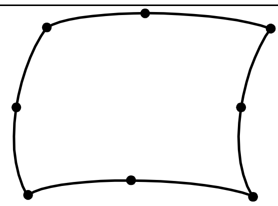
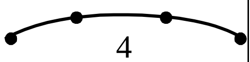
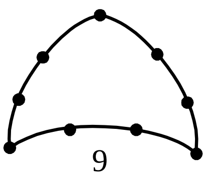
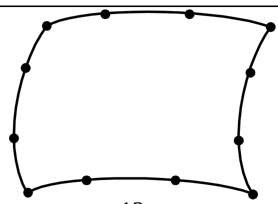
A korábban említettek szerint -bizonyos feltételek teljesülése esetén- lehetőség van a 3D-s esetek síkbeli (síkfeszültség, síkalakváltozás és tengelyszimmetrikus) vizsgálatára, vagy egyszerűsített térbeli, ugyanakkor 1 vagy 2 dimenziós topológiával rendelkező (rúd, héj, stb.) modellek használatára. Mivel az 1D-s, illetve 2D-s modellek elemszáma jóval kisebb, mint ugyanazon szerkezet 3D-s modelljének, ezért a feladat megoldási ideje sokkal kevesebb, valamint a szimuláció beállítása is egyszerűbb. Az analízis során használt elemek a geometriától függően kiterjedésük szerint a következők lehetnek: dimenzió nélküli pont, 2D-s felületi vagy 3D-s térfogati elemek.

- A pont elemeket (point element) egy csomópont (node) definiál (például, mint tömegpont vagy csomópont-felület kontaktelem).

- ❖ A vonal elemeket (line element) két vgy három csomópontot összekötő egyenes, vagy ív definiál. A vonalelem lehet rúd (trust), gerenda (beam), cső (pipe) és tengelyszimmetrikus héj (axisymmetric shell).
- ❖ A felületelemek háromszög (triangular), vagy négyszög (quadrilateral) alakúak, illetve 2D-s sík modell (2D síkfeszültség, síkalakváltozás és tengelyszimmetrikus), vagy héj (shell) elemek lehetnek.
- ❖ A térfogati elemek tetraéder (tetrahedral), gúla (piramid), prizma (wedge) vagy tégla (brick, hexahedron) alakú, 3D-s szilárd test (3D-s solid) elemek lehetnek.
- ❖ A peremfeltételek definiálására (kontaktok, rugó elemek, tömegpont, stb.) speciális tulajdonságokkal rendelkező elemeket használunk.

  Az 1D-s elemekkel természetesen síkbeli és térbeli szerkezetek is vizsgálhatók, ugyanúgy, ahogy a a 2D-s elemek lehetnek héjelemek is, amelyek alkalmasak térbeli lemez-, illetve héjszerkezetek vizsgálatára is. a tetrahedron és hexahedron görög kifejezések rendre a megfelelő geometriai alakzat oldallapjainak számát jelentik, azaz tetra=4 és hexa=6.

A következő táblázatok a leggyakrabban használt izoparametrikus elemeket foglalják össze tekintettel a bemutatott csoportosítási lehetőségekre.

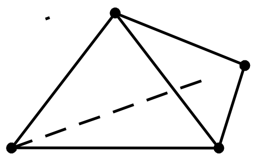
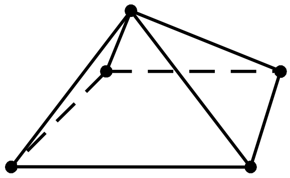
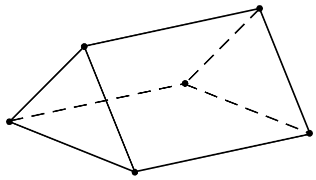
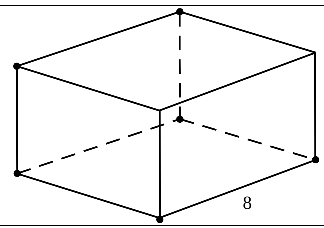
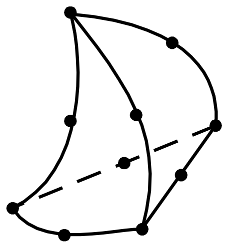
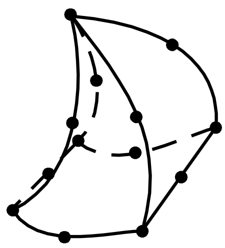
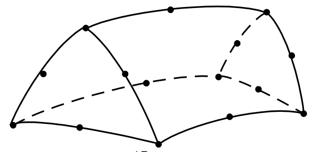
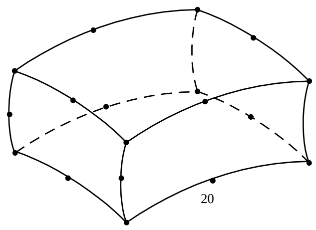
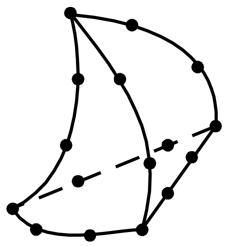
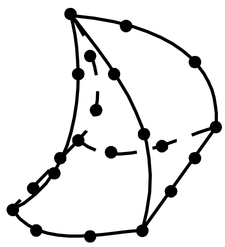
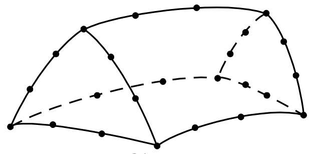
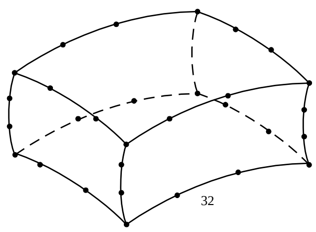
	1D (vonal)	2D (felület)	2 DOF/Node
	Vonal (Line)	Háromszög (Triangle)	Négyszög (Quadrilateral)
Lineáris (Linear)	2	 3	 4
Másodfokú (Quadratic)	 3	 6	 8
Harmadfokú (Cubic)	 4	 9	 12

1. táblázat: 1D-s, 2D-s elemek

b) Fokszámuk szerint

A végeselem szimuláció során alkalmazott elemek geometriájuk és interpolációs függvényük fokszáma szerint lineárisak (linear, first-order), másodfokúek (second-order, quadratic, parabolic) vagy harmadfokúak (third-order, cubic) lehetnek. Azaz egy lineáris háromszög elem (triangle) 3 csomóponttal és 3 egyenes éllel definiált. A magasabb rendű háromszög elem esetén a 3 csúcsnál levő csomóponton felül a görbe vonalú éleken köztes csomópontok is találhatóak.

Lineáris vagy magasabb rendű elemek választásakor a következőkre kell ügyelni: azonos hálósűrűség mellett a magasabb rendű elemek adnak pontosabb eredményt, mivel jobb matematikai közelítést használnak, és az íves élekkel/felületekkel határolt geometriát pontosabban követik, ugyanakkor nagyobb teljesítményt, több számolási időt igényelnek.

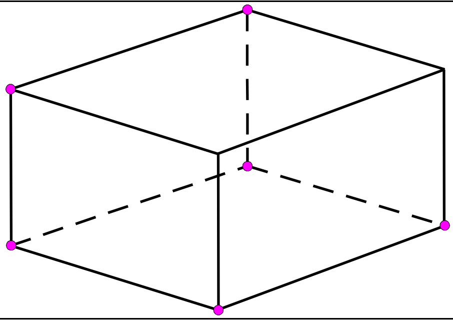
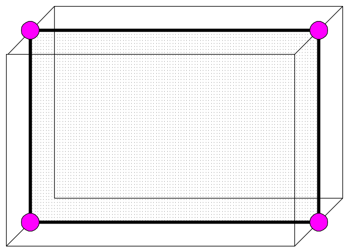
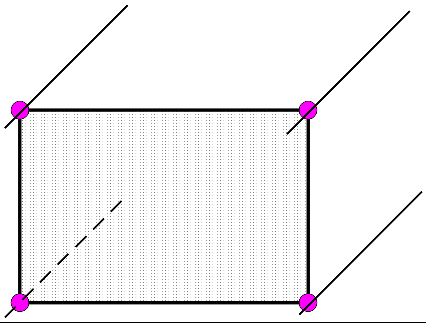
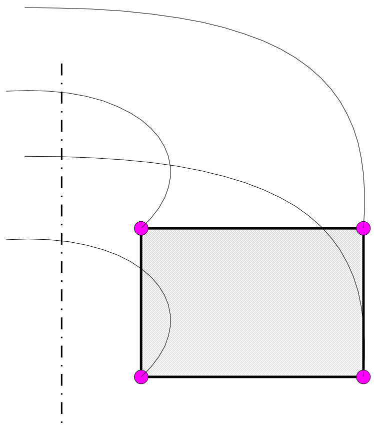
	3D (térfogat) 3 DOF/Node			
	Tetraéder (Tetrahedron)	Gúla (Piramid)	Prizma(Pentahedral, Prism, Wedge)	Tégla (Hexahedron)
Lineáris (Linear)	 4	 5	 6	 8
Másodfokú (Quadratic)	 10	 13	 15	 20
Harmadfokú (Cubic)	 16	 21	 24	 32

2. táblázat: 3D-s elemek

c) Szabadságfokuk szerint

Az elemek szabadságfoka határozza meg, hogy melyik elem milyen típusú analízisre alkalmas (pl.: szerkezeti, hő, áramlástani, elektromos, mágneses analízisre). Egy térbeli szerkezeti analízisben használt elem csomópontjainak 3 szabadságfoka van $\left(u_x, u_y, u_z\right)$, viszont egy hőtani szimulációban csak egy, a hőmérséklet. A megfelelő szabadságfokú elemtípus választása jellemzi a modell válaszát. Az elemek fölösleges szabadságfoka növeli a szimuláció memóriafoglalását és futási idejét. Hasonlóan a szükségtelen elemtulajdonságokkal rendelkező elem (pl.: plasztikus tulajdonságok egy rugalmas szimulációban) alkalmazása szintén növeli a futásidőt.

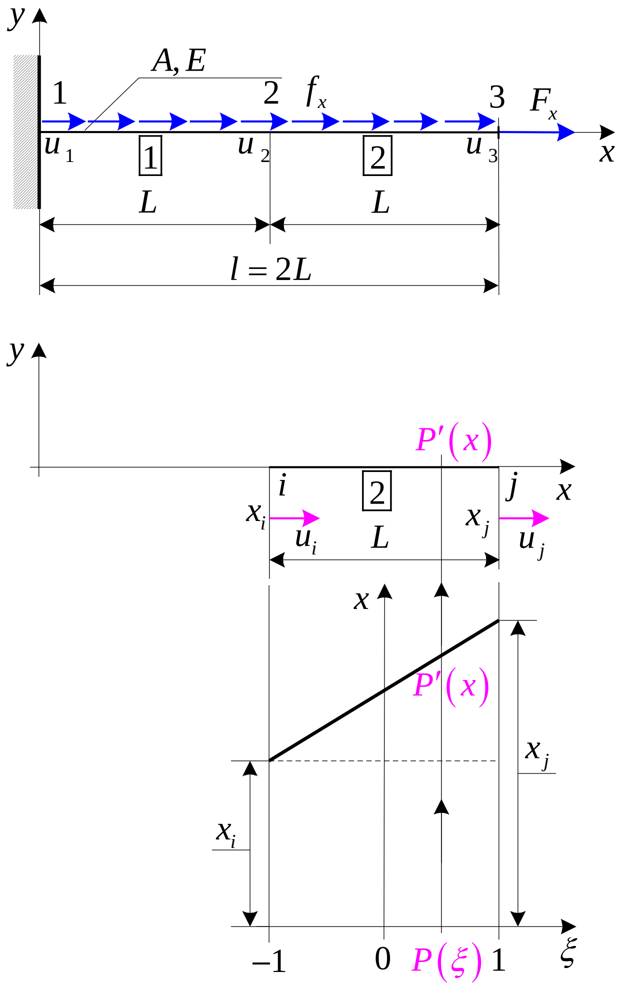
Általános esetben az elemek koordinátarendszereire, bemenő adataira (csomópontok, szabadságfok, anyagtulajdonságok, terhelések, stb..) és a szimuláció eredményeire (a csomópontok elmozdulása, feszültség, reakcióerő, stb.) oszthatók.

3D (Solid) $\left(u_x, u_y, u_z\right)$	
Sík feszültség (Plane Stress) $\left(u_x, u_y\right)$ Általánosított síkfeszültség állapot (ÁSF) vagy tárcsafeladat: Olyan test, amelynek egyik mérete lényegesen nagyobb, mint a másik kettő, értelmezhető középsíkkal rendelkezik, és a terhelés vastagság menti eredője ezen középsíkba esik.	
Sík alakváltozás (Plane Strain) (SA) $\left(u_x, u_y\right)$ Általánosított sík alakváltozási állapot (SA): a vizsgált test rendelkezik egy kitüntetett síkkal, amellyel párhuzamos összes többi sík alakváltozása azonos és a síkok távolsága nem változik.	
Tengelyszimmetrikus (Axisymmetric) $\left(u_x, u_y\right)$ A forgásszimmetrikus test geometriája és terhelési is forgásszimmetrikus, bármelyik meridián metszetében ugyanolyan alakváltozási és feszültségi állapot ébred.	

3. táblázat: Gyakori mechanikai elemtípusok és a csomópontok szabadságfoka

4.2.1D-s húzott-nyomott rúdelem

A végeselem programokban a húzott-nyomott rúdelemet angolul rod vagy truss elemnek nevezzük.
Tekintsük ismét az V. előadásban bemutatott húzott-nyomott rúdfeladatot.



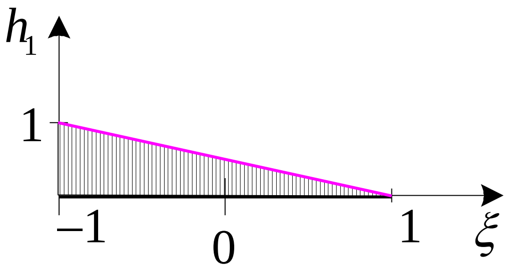
1. ábra: 1D-s elem $\xi \Leftrightarrow x$ leképezése

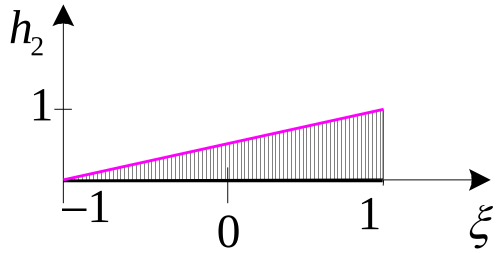
Tekintsük a 2-s végeselemet, amely általános, i, j csomópont párral adott. Az 1. ábrán a rúdelemhez egy lokális ún. természetes ξ koordinátatengelyt kötöttünk. Keressük a természetes ξ koordinátájú pont és a hozzátartozó pont globális x koordinátája közötti kapcsolat, azaz a leképező függvényt. A ξ tengelyre merőlegesen felmérjük a csomópontok x koordinátáit, majd egyenessel összekötve megkapjuk a leképezés függvény képét. A ξ tengelyen egy tetszőleges $P(\xi)$ pontból függőlegesen felvetítve megkapjuk a hozzárendelt $P'(\xi)$ képet vagyis azt az x-t , amely az adott ξ-hez tartozik.
A leképező függvény meredeksége és x tengellyel vett metszéspontja alapján könnyen felírhatjuk az egyenes egyenletét, amelyet utána célszerűen átrendezünk:

$$x(\xi) = \frac{x_j - x_i}{2}\xi + \frac{x_j + x_i}{2} = \frac{1}{2}(1-\xi)x_i + \frac{1}{2}(1+\xi)x_j$$

, ahol a csomóponti koordináták együtthatói a

$$\left.\begin{aligned} h_1(\xi) &= \frac{1}{2}(1-\xi)x_i \\ h_2(\xi) &= \frac{1}{2}(1+\xi)x_i \end{aligned}\right\} \text{ az ún. alakfüggvényeknek.}$$





Az elmozdulás mezőt ezen két alakfüggvény és az u_i, u_j csomóponti elmozdulások segítségével fogjuk közelíteni:

$$u^e(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi)u_i + \frac{1}{2}(1+\xi)u_j = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) & \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \underline{\underline{H}}^e(\xi)\underline{\underline{q}}^e$$

Az elmozdulás ismeretében az alakváltozás előállítható a láncszabály alkalmazásával:

$$\varepsilon_x^e(\xi) = \frac{du^e(\xi)}{dx} = \frac{du^e(\xi)}{d\xi}\frac{d\xi}{dx},$$

ahol az első tag ξ szerinti deriválása

$u^e(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi)u_i + \frac{1}{2}(1+\xi)u_j = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) & \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \underline{\underline{H}}^e(\xi)\underline{\underline{q}}^e$ behelyettesítése után végrehajtható , a második közvetlenül nem, de az inverze

$x(\xi) = \frac{x_j - x_i}{2}\xi + \frac{x_j + x_i}{2} = \frac{1}{2}(1-\xi)x_i + \frac{1}{2}(1+\xi)x_j$ ismeretében képezhető:

$$\frac{dx(\xi)}{d\xi} = \frac{x_j - x_i}{2} = \frac{L}{2}.$$

Ezután visszahelyettesítjük

$$u^e(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi)u_i + \frac{1}{2}(1+\xi)u_j = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) & \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \underline{\underline{H}}^e(\xi)\underline{\underline{q}}^e$$

reciprokát

$$\frac{dx(\xi)}{d\xi} = \frac{x_j - x_i}{2} = \frac{L}{2}$$

a következő összefüggésbe: $\varepsilon_x^e(\xi) = \frac{du^e(\xi)}{dx} = \frac{du^e(\xi)}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}$, így

$$\varepsilon_x^e(\xi)=\frac{2}{L}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_i\\ u_j\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{L} & \frac{1}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_i\\ u_j\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_i & u_j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{L}\\ \frac{1}{L}\end{bmatrix}$$

$$\sigma_x^e(\xi)=E\varepsilon_x^e(\xi)=E\begin{bmatrix}-\frac{1}{L} & \frac{1}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_i\\ u_j\end{bmatrix}$$

Célunk, hogy előállítsuk az elem potenciális energiáját

$$\Pi_p^e(u_i,u_j)=\frac{1}{2}\int_0^L\left(\frac{du^e}{dx}\right)AE\left(\frac{du^e}{dx}\right)dx-\int_0^L u^e p_z d\xi\,,$$

ahol az első integrálból származtatható az elem merevségi mátrixa, a másodikból az elem tehervektora. Az integrálást most nem x szerint hanem ξ szerint hajtjuk végre. A dx előállításához felhasználjuk $\frac{dx(\xi)}{d\xi}=\frac{x_j-x_i}{2}=\frac{L}{2}$.

A merevségi mátrix előállítása:

$$\frac{1}{2}\int_0^L\left(\frac{du^e}{dx}\right)AE\left(\frac{du^e}{dx}\right)dx=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}u_i & u_j\end{bmatrix}\underbrace{\int_{\xi=-1}^{1}\begin{bmatrix}\frac{-1}{L}\\ \frac{1}{L}\end{bmatrix}AE\begin{bmatrix}\frac{-1}{L} & \frac{1}{L}\end{bmatrix}\frac{L}{2}d\xi}_{\underline{\underline{K}}^e}\begin{bmatrix}u_i\\ u_j\end{bmatrix},$$

ahol $\underline{\underline{K}}^e=\int_{\xi=-1}^{1}\begin{bmatrix}\frac{AE}{2L} & -\frac{AE}{2L}\\ -\frac{AE}{2L} & \frac{AE}{2L}\end{bmatrix}d\xi=\begin{bmatrix}\frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L}\\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L}\end{bmatrix}$

Konstans megoszló terhelést feltételezve a tehervektor származtatása:

$$\int_0^L u^e f_x dx=\begin{bmatrix}u_i & u_j\end{bmatrix}\underbrace{\int_{\xi=-1}^{1}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(1-\xi)\\ \frac{1}{2}(1+\xi)\end{bmatrix}f_x\frac{L}{2}d\xi}_{\underline{\underline{f}}^e}=\begin{bmatrix}u_i & u_j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{f_xL}{2}\\ \frac{f_xL}{2}\end{bmatrix},$$

ahol az egyes elemek integráljai:

$$\int_{\xi=-1}^{1}\frac{1}{2}(1-\xi)f_x\frac{L}{2}d\xi=\frac{f_xL}{4}\left[\xi-\xi^2\right]_{-1}^{1}=\frac{f_xL}{2}$$

$$\int_{\xi=-1}^{1}\frac{1}{2}(1+\xi)f_x\frac{L}{2}d\xi=\frac{f_xL}{4}\left[\xi+\xi^2\right]_{-1}^{1}=\frac{f_xL}{2}$$

Végül az elem teljes potenciális energiája:

$$\Pi_p^e\left(u_i, u_j\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} u_i & u_j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_i & u_j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{f_x L}{2} \\ \frac{f_x L}{2} \end{bmatrix}.$$

A további lépések azonosan hajthatók végre, mint az V. előadásban.