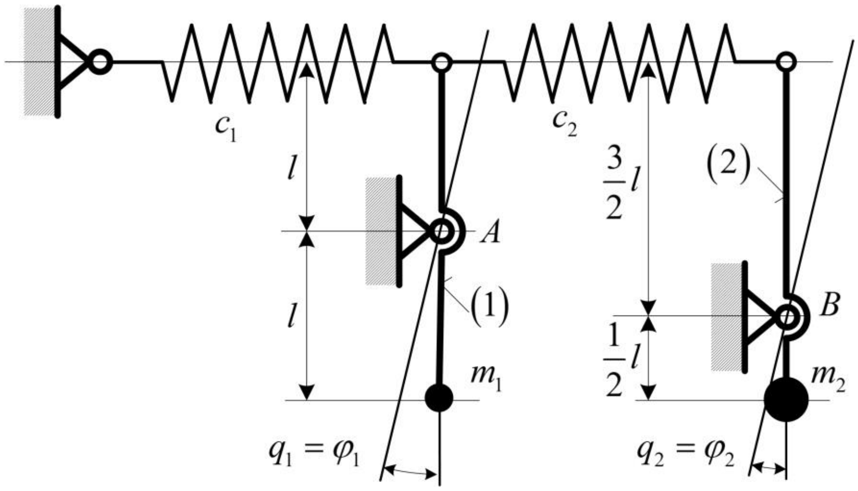
SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM **ALKALMAZOTT MECHANIKA TANSZÉK**

8. MECHANIKA-REZGÉSTAN GYAKORLAT
(kidolgozta: Fehér Lajos, tsz. mérnök; Tarnai Gábor, mérnök tanár; Molnár Zoltán, egy. adj., Dr. Nagy Zoltán, egy. adj.)
Több szabadságfokú rezgőrendszer mozgásegyenletének felírása

10.1. Példa: Két szabadságfokú szabad, csillapítatlan rezgőrendszer



Adott: az A és B pontban csapágyazott, szabad rezgést végző rendszer, amely 2 tömegpontot, 2 súlytalan (elhanyagolható tömegű) rudat és 2 rugót tartalmaz. Adott továbbá $m_1 = 60$ kg, $m_2 = 120$ kg, $l = 1$ m, $c_1 = c_2 = 4 \cdot 10^{-4}$ m/N.

Feladat:
a) A rezgőrendszer mozgás egyenletrendszerének felírása kis szögelfordulások esetén mátrixos formában, számszerű adatokkal.

Az általános koordináták legyenek a 2l hosszúságú, súlytalan rudak szögelfordulásai:

Általános koordináták:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \varphi_1, & q_2 &= \varphi_2, \\ \dot{q}_1 &= \dot{\varphi}_1, & \dot{q}_2 &= \dot{\varphi}_2, \\ \ddot{q}_1 &= \ddot{\varphi}_1 & \ddot{q}_2 &= \ddot{\varphi}_2 \end{aligned}\right\} \qquad \underline{\underline{q}} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\ddot{q}}} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix}$$

A Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenlet

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} = Q_{ci} \qquad i = 1, 2$$

A rendszer kinetikai energiája:

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 (l\omega_1)^2 = \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{l}{2}\omega_2\right)^2 = \frac{1}{2} m_1 l^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \frac{l^2}{4} \dot{\varphi}_2^2,$$

ahol $\frac{l}{2}$ és l a tömegek csapágyazási ponttól mért távolsága.

A rugókban felhalmozódott alakváltozási energia:

$$U=U_1+U_2=\frac{1}{2}\frac{\left(lq_1\right)^2}{c_1}+\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{3}{2}lq_2-lq_1\right)^2}{c_2}=\frac{1}{2}\frac{\left(l\varphi_1\right)^2}{c_1}+\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{3}{2}l\varphi_2-l\varphi_1\right)^2}{c_2}=\frac{1}{2}\frac{l^2\varphi_1^{\,2}}{c_1}+\frac{1}{2}\frac{l^2\left(\frac{3}{2}\varphi_2-\varphi_1\right)^2}{c_2}$$

Az első mozgásegyenlet előállítása (i=1):
A mozgásegyenlet bal oldalán álló mennyiségek:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1}=\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_1}=\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}m_1 l^2\dot{\varphi}_1=m_1 l^2\dot{\varphi}_1,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_1}\right)=m_1 l^2\ddot{\varphi}_1,$$

$$\frac{\partial E}{\partial q_1}=\frac{\partial E}{\partial \varphi_1}=0$$

Az általános visszatérítő erő:

$$Q_{c1}=-\frac{dU}{dq_1}=-\frac{dU}{d\varphi_1}=-\frac{d}{d\varphi_1}\left(\frac{1}{2}\frac{l^2\varphi_1^{\,2}}{c_1}+\frac{1}{2}\frac{l^2\left(\frac{3}{2}\varphi_2-\varphi_1\right)^2}{c_2}\right)=-\left(\frac{1}{2}2\frac{l^2\varphi_1}{c_1}+\frac{1}{2}2\frac{l^2\left(\frac{3}{2}\varphi_2-\varphi_1\right)}{c_2}\left(-1\right)\right)=$$

$$=-\left(\frac{l^2\varphi_1}{c_1}-\frac{3}{2}\frac{l^2}{c_2}\varphi_2+\frac{l^2}{c_2}\varphi_1\right)=-\left(\left(\frac{l^2}{c_2}+\frac{l^2}{c_1}\right)\varphi_1-\frac{3}{2}\frac{l^2}{c_2}\varphi_2\right)$$

Az második mozgásegyenlet előállítása (i=2):
A mozgásegyenlet bal oldalán álló mennyiségek:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2}=\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_2}=\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}m_2\frac{l^2}{4}\dot{\varphi}_2=m_2\frac{l^2}{4}\dot{\varphi}_2,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_2}\right)=m_2\frac{l^2}{4}\ddot{\varphi}_2,$$

$$\frac{\partial E}{\partial q_2}=\frac{\partial E}{\partial \varphi_2}=0$$

Az általános visszatérítő erő:

$$Q_{c2}=-\frac{dU}{dq_2}=-\frac{dU}{d\varphi_2}=-\frac{d}{d\varphi_2}\left(\frac{1}{2}\frac{l^2\varphi_1^{\,2}}{c_1}+\frac{1}{2}\frac{l^2\left(\frac{3}{2}\varphi_2-\varphi_1\right)^2}{c_2}\right)=-\left(\frac{1}{2}2\frac{l^2\left(\frac{3}{2}\varphi_2-\varphi_1\right)}{c_2}\frac{3}{2}\right)=$$

$$=-\left(\frac{l^2}{c_2}\left(\frac{9}{4}\varphi_2-\frac{3}{2}\varphi_1\right)\right)=-\left(-\frac{3}{2}\frac{l^2}{c_2}\varphi_1+\frac{9}{4}\frac{l^2}{c_2}\varphi_2\right)$$

A 2 szabadságfokú rezgőrendszer mozgásegyenlet-rendszere:

$$\left.\begin{aligned}&m_1 l^2\ddot{\varphi}_1+\left(\frac{l^2}{c_2}+\frac{l^2}{c_1}\right)\varphi_1-\frac{3}{2}\frac{l^2}{c_2}\varphi_2=0\\&m_2\frac{l^2}{4}\ddot{\varphi}_2-\frac{3}{2}\frac{l^2}{c_2}\varphi_1+\frac{9}{4}\frac{l^2}{c_2}\varphi_2=0\end{aligned}\right\}$$

A mozgásegyenlet-rendszer mátrixos alakban felírva:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 l^2 & 0 \\ 0 & m_2 \dfrac{l^2}{4} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{M}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix}}_{\underline{\ddot{\varphi}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{l^2}{c_2}+\dfrac{l^2}{c_1} & -\dfrac{3}{2}\dfrac{l^2}{c_2} \\ -\dfrac{3}{2}\dfrac{l^2}{c_2} & \dfrac{9}{4}\dfrac{l^2}{c_2} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{C}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}}_{\underline{\varphi}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{\varphi}} + \underline{\underline{C}}\,\underline{\varphi} = \underline{0},$

ahol a tömegmátrix:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} m_1 l^2 & 0 \\ 0 & m_2 \dfrac{l^2}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \cdot 1^2 & 0 \\ 0 & 120 \cdot \dfrac{1^2}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix} \frac{kgm^2}{rad}$$

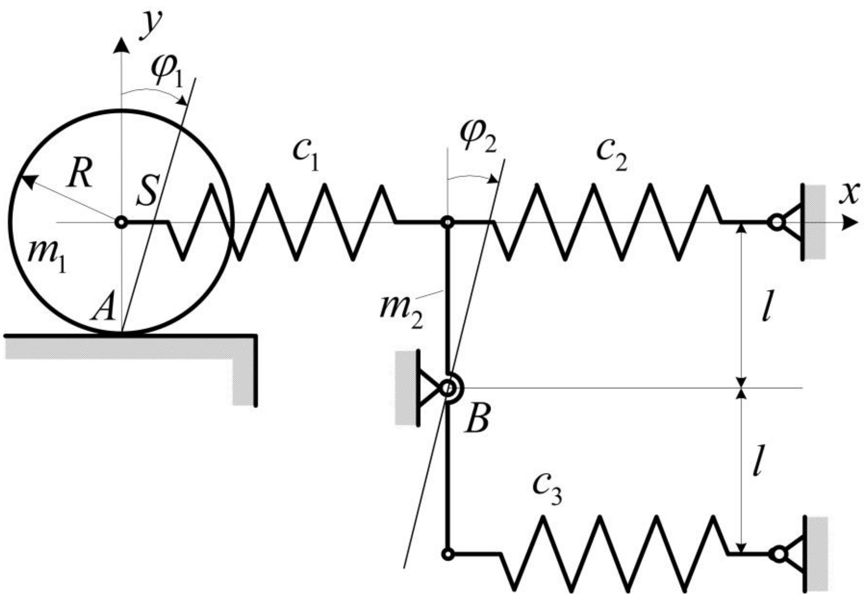
a rugómátrix:

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} \dfrac{l^2}{c_2}+\dfrac{l^2}{c_1} & -\dfrac{3}{2}\dfrac{l^2}{c_2} \\ -\dfrac{3}{2}\dfrac{l^2}{c_2} & \dfrac{9}{4}\dfrac{l^2}{c_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1^2}{4\cdot 10^{-4}}+\dfrac{1^2}{4\cdot 10^{-4}} & -\dfrac{3}{2}\dfrac{1^2}{4\cdot 10^{-4}} \\ -\dfrac{3}{2}\dfrac{1^2}{4\cdot 10^{-4}} & \dfrac{9}{4}\dfrac{1^2}{4\cdot 10^{-4}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5000 & -3750 \\ -3750 & 5625 \end{bmatrix} \frac{Nm}{rad}$$

A rezgőrendszer mozgásegyenlet-rendszere:

$$\begin{bmatrix} 60 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5000 & -3750 \\ -3750 & 5625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

10.2. Példa: Két szabadságfokú szabad, csillapítatlan rezgőrendszer



Adott: az m_1 tömegű csúszásmentesen gördülő korongból és a B pontban csapágyazott, m_2 tömegű rúdból álló szabad rezgést végző rendszer. Adott továbbá

$m_1 = 60$ kg, $m_2 = 120$ kg, $l = 1$ m, $R = 0,25$ m, $c_1 = c_2 = 4 \cdot 10^{-4}$ m/N.

Feladat:

a) Határozza meg az ábrán láthat rezgőrendszer mozgásegyenlet-rendszerét kis szöglefordulások esetén mátrixos formában, számszerű adatokkal.

A rezgőrendszer szabadságfoka 2.

Általános koordináták:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \varphi_1, & q_2 &= \varphi_2, \\ \dot{q}_1 &= \dot{\varphi}_1, & \dot{q}_2 &= \dot{\varphi}_2, \\ \ddot{q}_1 &= \ddot{\varphi}_1 & \ddot{q}_2 &= \ddot{\varphi}_2 \end{aligned}\right\} \qquad \underline{\underline{q}} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\ddot{q}}} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix}$$

A Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenlet

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} = Q_{ci} \qquad i = 1, 2$$

A rendszer kinetikai energiája:

$$E = \frac{1}{2} J_a \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_b \omega_2^2 = \frac{1}{2} J_a \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J_b \dot{\varphi}_2^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} m_1 R^2\right)\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m_2 (2l)^2\right)\dot{\varphi}_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} m_1 R^2\right)\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} m_2 l^2\right)\dot{\varphi}_2^2$$

A rugókban felhalmozódott alakváltozási energia:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{1}{2}\frac{(l\varphi_2 - R\varphi_1)^2}{c_1} + \frac{1}{2}\frac{(l\varphi_2)^2}{c_2} + \frac{1}{2}\frac{(l\varphi_2)^2}{c_3} = \frac{1}{2}\frac{(l\varphi_2 - R\varphi_1)^2}{c_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{l^2}{c_2} + \frac{l^2}{c_3}\right)\varphi_2^2$$

Az első mozgásegyenlet előállítása (i=1):

A mozgásegyenlet bal oldalán álló mennyiségek:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_1} = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\frac{3}{2} m_1 R^2 \dot{\varphi}_1 = \frac{3}{2} m_1 R^2 \dot{\varphi}_1,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) = \frac{3}{2} m_1 R^2 \ddot{\varphi}_1,$$

$$\frac{\partial E}{\partial q_1} = \frac{\partial E}{\partial \varphi_1} = 0$$

Az általános visszatérítő erő:

$$Q_{c1} = -\frac{dU}{dq_1} = -\frac{dU}{d\varphi_1} = -\frac{d}{d\varphi_1}\left(\frac{1}{2}\frac{(l\varphi_2 - R\varphi_1)^2}{c_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{l^2}{c_2} + \frac{l^2}{c_3}\right)\varphi_2^2\right) = -\left(\frac{1}{2} 2 \frac{(l\varphi_2 - R\varphi_1)}{c_1}(-R)\right) =$$

$$= -\left(\frac{R^2}{c_1}\varphi_1 - \frac{Rl}{c_1}\varphi_2\right)$$

Az második mozgásegyenlet előállítása (i=2):

A mozgásegyenlet bal oldalán álló mennyiségek:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_2} = \frac{1}{3} m_2 l^2 \dot{\varphi}_2,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) = \frac{1}{3} m_2 l^2 \ddot{\varphi}_2,$$

$$\frac{\partial E}{\partial q_2} = \frac{\partial E}{\partial \varphi_2} = 0$$

Az általános visszatérítő erő:

$$Q_{c2}=-\frac{dU}{dq_2}=-\frac{dU}{d\varphi_2}=-\frac{d}{d\varphi_2}\left(\frac{1}{2}\frac{\left(l\varphi_2-R\varphi_1\right)^2}{c_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{l^2}{c_2}+\frac{l^2}{c_3}\right){\varphi_2}^2\right)=-\left(\frac{1}{2}2\frac{\left(l\varphi_2-R\varphi_1\right)}{c_1}l+\frac{1}{2}2\left(\frac{l^2}{c_2}+\frac{l^2}{c_3}\right)\varphi_2\right)=$$

$$=-\left(\frac{l^2}{c_1}\varphi_2-\frac{Rl}{c_1}\varphi_1+\left(\frac{l^2}{c_2}+\frac{l^2}{c_3}\right)\varphi_2\right)=-\left(-\frac{Rl}{c_1}\varphi_1+\left(\frac{l^2}{c_1}+\frac{l^2}{c_2}+\frac{l^2}{c_3}\right)\varphi_2\right)$$

A 2 szabadságfokú rezgőrendszer mozgásegyenlet-rendszere:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{3}{2}m_1R^2\ddot{\varphi}_1+\frac{R^2}{c_1}\varphi_1-\frac{Rl}{c_1}\varphi_2=0\\&\frac{1}{3}m_2l^2\ddot{\varphi}_2-\frac{Rl}{c_1}\varphi_1+\left(\frac{l^2}{c_1}+\frac{l^2}{c_2}+\frac{l^2}{c_3}\right)\varphi_2=0\end{aligned}\right\}$$

A mozgásegyenlet-rendszer mátrixos alakban felírva:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{3}{2}m_1R^2\ddot{\varphi}_1 & 0\\ 0 & \frac{1}{3}m_2l^2\ddot{\varphi}_2\end{bmatrix}}_{\underline{\underline{M}}}\underbrace{\begin{bmatrix}\ddot{\varphi}_1\\ \ddot{\varphi}_2\end{bmatrix}}_{\underline{\ddot{\varphi}}}+\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{R^2}{c_1} & -\frac{Rl}{c_1}\\ -\frac{Rl}{c_1} & \frac{l^2}{c_1}+\frac{l^2}{c_2}+\frac{l^2}{c_3}\end{bmatrix}}_{\underline{\underline{C}}}\underbrace{\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix}}_{\underline{\varphi}}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{\varphi}}+\underline{\underline{C}}\,\underline{\varphi}=\underline{0},$$

ahol a tömegmátrix:

$$\underline{\underline{M}}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}m_1R^2 & 0\\ 0 & \frac{1}{3}m_2l^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\cdot 60\cdot 0,25^2 & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\cdot 120\cdot 1^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5,625 & 0\\ 0 & 40\end{bmatrix}\frac{kgm^2}{rad}$$

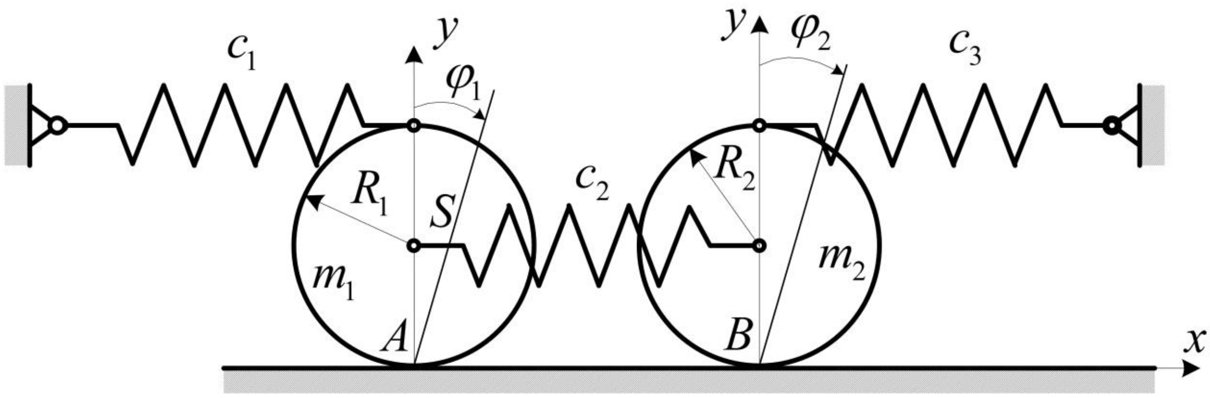
a rugómátrix:

$$\underline{\underline{C}}=\begin{bmatrix}\frac{R^2}{c_1} & -\frac{Rl}{c_1}\\ -\frac{Rl}{c_1} & \left(\frac{l^2}{c_1}+\frac{l^2}{c_2}+\frac{l^2}{c_3}\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{0,25^2}{4\cdot 10^{-4}} & -\frac{0,25\cdot 1}{4\cdot 10^{-4}}\\ -\frac{0,25\cdot 1}{4\cdot 10^{-4}} & \frac{1^2+1^2+1^2}{4\cdot 10^{-4}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}156,25 & -625\\ -625 & 7500\end{bmatrix}\frac{Nm}{rad}$$

A rezgőrendszer mozgásegyenlet-rendszere:

$$\begin{bmatrix}5,625 & 0\\ 0 & 40\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\varphi}_1\\ \ddot{\varphi}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}156,25 & -625\\ -625 & 7500\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

10.3. Példa: Két szabadságfokú szabad, csillapítatlan rezgőrendszer



Adott: az m_1 tömegű és m_2 tömegű csúszásmentesen gördülő hengerekből álló szabad rezgést végző rendszer. Adott továbbá

$m_1 = m_2 = 60$ kg, $R_1 = R_2 = 0,25$ m, $c_1 = c_2 = 4 \cdot 10^{-4}$ m/N.

Feladat:
a) Határozza meg az ábrán láthat rezgőrendszer mozgásegyenlet-rendszerét kis szögelefordulások esetén mátrixos formában, számszerű adatokkal.

A rezgőrendszer szabadságfoka 2.

Általános koordináták:

$$\left.\begin{array}{ll} q_1 = \varphi_1, & q_2 = \varphi_2, \\ \dot{q}_1 = \dot{\varphi}_1, & \dot{q}_2 = \dot{\varphi}_2, \\ \ddot{q}_1 = \ddot{\varphi}_1 & \ddot{q}_2 = \ddot{\varphi}_2 \end{array}\right\} \qquad \underline{\underline{q}} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\ddot{q}}} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix}$$

A Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenlet

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} = Q_{ci} \qquad i = 1,2$$

A rendszer kinetikai energiája:

$$E = \frac{1}{2} J_a \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_b \omega_2^2 = \frac{1}{2} J_a \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J_b \dot{\varphi}_2^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} m_1 R_1^2\right)\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} m_2 R_2^2\right)\dot{\varphi}_2^2$$

A rugókban felhalmozódott alakváltozási energia:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{1}{2}\frac{\left(2R_1\varphi_1\right)^2}{c_1} + \frac{1}{2}\frac{\left(R_2\varphi_2 - R_1\varphi_1\right)^2}{c_2} + \frac{1}{2}\frac{\left(2R_2\varphi_2\right)^2}{c_3}$$

Az első mozgásegyenlet előállítása (i=1):
A mozgásegyenlet bal oldalán álló mennyiségek:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_1} = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2} \frac{3}{2} m_1 R_1^2 \dot{\varphi}_1 = \frac{3}{2} m_1 R_1^2 \dot{\varphi}_1,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) = \frac{3}{2} m_1 R_1^2 \ddot{\varphi}_1,$$

$$\frac{\partial E}{\partial q_1} = \frac{\partial E}{\partial \varphi_1} = 0$$

Az általános visszatérítő erő:

$$Q_{c1}=-\frac{dU}{dq_1}=-\frac{dU}{d\varphi_1}=-\frac{d}{d\varphi_1}\left[\frac{1}{2}\frac{\left(2R_1\varphi_1\right)^2}{c_1}+\frac{1}{2}\frac{\left(R_2\varphi_2-R_1\varphi_1\right)^2}{c_2}+\frac{1}{2}\frac{\left(2R_2\varphi_2\right)^2}{c_3}\right]=$$

$$=-\left[\frac{1}{2}2\frac{\left(2R_1\varphi_1\right)}{c_1}2R_1+\frac{1}{2}2\frac{\left(R_2\varphi_2-R_1\varphi_1\right)}{c_2}\left(-R\right)\right]=-\left[\frac{4R_1^{\,2}}{c_1}\varphi_1+\frac{R_1}{c_2}\varphi_1-\frac{R_1R_2}{c_2}\varphi_2\right]=$$

$$=-\left[\left(\frac{4R_1^{\,2}}{c_1}+\frac{R_1}{c_2}\right)\varphi_1-\frac{R_1R_2}{c_2}\varphi_2\right]$$

Az második mozgásegyenlet előállítása (i=2):
A mozgásegyenlet bal oldalán álló mennyiségek:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2}=\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_2}=\frac{3}{2}m_2R_2^{\,2}\dot{\varphi}_2,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_2}\right)=\frac{3}{2}m_2R_2^{\,2}\ddot{\varphi}_2,$$

$$\frac{\partial E}{\partial q_2}=\frac{\partial E}{\partial \varphi_2}=0$$

Az általános visszatérítő erő:

$$Q_{c2}=-\frac{dU}{dq_2}=-\frac{dU}{d\varphi_2}=-\frac{d}{d\varphi_2}\left[\frac{1}{2}\frac{\left(2R_1\varphi_1\right)^2}{c_1}+\frac{1}{2}\frac{\left(R_2\varphi_2-R_1\varphi_1\right)^2}{c_2}+\frac{1}{2}\frac{\left(2R_2\varphi_2\right)^2}{c_3}\right]=$$

$$=-\left[\frac{1}{2}2\frac{\left(R_2\varphi_2-R_1\varphi_1\right)}{c_2}R_2+\frac{1}{2}2\frac{\left(2R_2\varphi_2\right)}{c_3}2R_2\right]=-\left[\frac{R_2^{\,2}}{c_2}\varphi_2-\frac{R_1R_2}{c_2}\varphi_1+\frac{4R_2^{\,2}}{c_3}\varphi_2\right]=$$

$$=-\left[-\frac{R_1R_2}{c_2}\varphi_1+\left(\frac{R_2^{\,2}}{c_2}+\frac{4R_2^{\,2}}{c_3}\right)\varphi_2\right]$$

A 2 szabadságfokú rezgőrendszer mozgásegyenlet-rendszere:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{3}{2}m_1R_1^{\,2}\ddot{\varphi}_1+\left(\frac{4R_1^{\,2}}{c_1}+\frac{R_1}{c_2}\right)\varphi_1-\frac{R_1R_2}{c_2}\varphi_2=0\\&\frac{3}{2}m_2R_2^{\,2}\ddot{\varphi}_2-\frac{R_1R_2}{c_2}\varphi_1+\left(\frac{R_2^{\,2}}{c_2}+\frac{4R_2^{\,2}}{c_3}\right)\varphi_2=0\end{aligned}\right\}$$

A mozgásegyenlet-rendszer mátrixos alakban felírva:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{3}{2}m_1R_1^{\,2} & 0\\ 0 & \frac{3}{2}m_2R_2^{\,2}\end{bmatrix}}_{\underline{\underline{M}}}\underbrace{\begin{bmatrix}\ddot{\varphi}_1\\ \ddot{\varphi}_2\end{bmatrix}}_{\underline{\ddot{\varphi}}}+\underbrace{\begin{bmatrix}\left(\frac{4R_1^{\,2}}{c_1}+\frac{R_1}{c_2}\right) & -\frac{R_1R_2}{c_2}\\ -\frac{R_1R_2}{c_2} & \left(\frac{R_2^{\,2}}{c_2}+\frac{4R_2^{\,2}}{c_3}\right)\end{bmatrix}}_{\underline{\underline{C}}}\underbrace{\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix}}_{\underline{\varphi}}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{\varphi}}+\underline{\underline{C}}\,\underline{\varphi}=\underline{0},$$

ahol a tömegmátrix:

$$\underline{\underline{M}}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}m_1R^2 & 0\\ 0 & \frac{3}{2}m_2R_2^{\,2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\cdot 120\cdot 0,25^2 & 0\\ 0 & \frac{3}{2}\cdot 120\cdot 0,25^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11,25 & 0\\ 0 & 11,25\end{bmatrix}\frac{kgm^2}{rad}$$

a rugómátrix:

$$\underline{\underline{C}}=\begin{bmatrix}\left(\dfrac{4R_1^{\,2}}{c_1}+\dfrac{R_1}{c_2}\right) & -\dfrac{R_1R_2}{c_2}\\ -\dfrac{R_1R_2}{c_2} & \left(\dfrac{R_2^{\,2}}{c_2}+\dfrac{4R_2^{\,2}}{c_3}\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{4\cdot 0,25^2}{4\cdot 10^{-4}}+\dfrac{0,25^2}{4\cdot 10^{-4}} & -\dfrac{0,25\cdot 0,25}{4\cdot 10^{-4}}\\ -\dfrac{0,25\cdot 0,25}{4\cdot 10^{-4}} & \dfrac{0,25^2+4\cdot 0,25^2}{4\cdot 10^{-4}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}781,25 & -156,25\\ -156,25 & 781,25\end{bmatrix}\frac{Nm}{rad}$$

A rezgőrendszer mozgásegyenlet-rendszere:

$$\begin{bmatrix}11,25 & 0\\ 0 & 11,25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\varphi}_1\\ \ddot{\varphi}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}781,25 & -156,25\\ -156,25 & 781,25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$