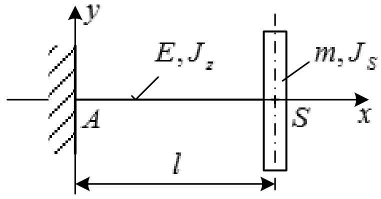
SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM — **ALKALMAZOTT MECHANIKA TANSZÉK**

12. MECHANIKA-REZGÉSTAN GYAKORLAT
(kidolgozta: Fehér Lajos, tsz. mérnök; Tarnai Gábor, mérnök tanár;
Molnár Zoltán, egy. adj., Dr. Nagy Zoltán, egy. adj.)
Hajtómű tengely hajlító rezgései

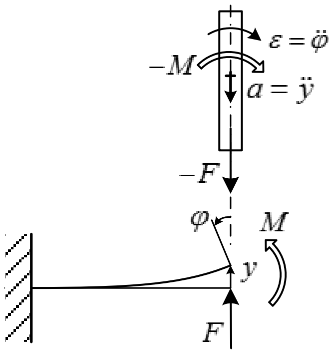
12.1. Példa: Maxwell-féle hatásszámok



Adott: az ábrán látható rugalmas tengely a rá ékelt merev fogaskerékkel, melyek együtt hajlító szabad rezgést végeznek.
Ismert: m, J_S, E, J_z, l.

Feladat:
Írja fel a hajlító rezgéseket végző rezgőrendszer mozgásegyenletét, és határozza meg a Maxwell-féle hatásszámait.

Kidolgozás:
Hajlító szabad rezgés során a rúdra merőleges $y(x)$ irányú elmozdulások jönnek létre.
Ha a fogaskereket, mint tárcsát vesszük figyelembe, akkor a z tengely körüli $\varphi(x)$ szögelfordulással is számolnunk kell. Az általános koordináták tehát: y *és* φ.



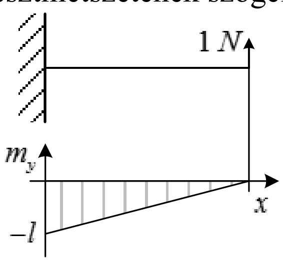
Ahol:
F : a fogaskerékről a tengelyre ható erő;
M : a fogaskerékről a tengelyre ható nyomaték;
$-F$: a tengelyről a fogaskerékre ható erő;
$-M$: a tengelyről a fogaskerékre ható nyomaték;

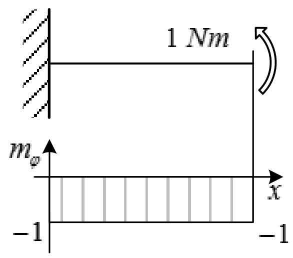
Newton II. törvénye ill. a perdülettétel a tárcsára:
$-F = m\ddot{y} \quad ill. \quad -M = J_S\ddot{\varphi}$

A tengely középvonalának elmozdulásai és keresztmetszetének szögelfordulásai:

$$\left.\begin{aligned} y &= \delta F + \mu M \\ \varphi &= \chi F + \kappa M \end{aligned}\right\}$$

$$M_{hz}(x) = Fm_y(x) + Mm_\varphi(x)$$





a *Maxwell hatásszámok*:
$\delta -$ a rúd középvonalának $y(x)$ elmozdulása egységnyi erő hatására,
$\mu -$ a rúd középvonalának $y(x)$ elmozdulása egységnyi nyomaték hatására,
$\chi -$ a rúd keresztmetszetének $\varphi(x)$ szögelfordulása egységnyi erő hatására,
$\kappa -$ a rúd keresztmetszetének $\varphi(x)$ szögelfordulása egységnyi nyomaték hatására.

Behelyettesítés, és átrendezés után:

$$\left.\begin{aligned}\delta m\ddot{y}+\mu J_s\ddot{\varphi}+y=0\\ \chi m\ddot{y}+\kappa J_s\ddot{\varphi}+\varphi=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} m\delta & J_s\mu \\ m\chi & J_s\kappa \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{y}\\ \ddot{\varphi}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\ \varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

, azaz a mozgásegyenlet

$$\begin{bmatrix}\delta & \mu\\ \chi & \kappa\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m & 0\\ 0 & J_s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{y}\\ \ddot{\varphi}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\ \varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{q}}+\underline{\underline{E}}\,\underline{q}=\underline{0}.$$

$\underline{\underline{M}}$ a tömegmátrix, $\underline{\underline{D}}$ a Maxwell-féle hatásszámokból képzett mátrix.

A Maxwell-féle hatásszámok meghatározása a Castigliano tétel alkalmazásával:

$$y=\frac{\partial U}{\partial F} \quad \text{és} \quad \varphi=\frac{\partial U}{\partial M}, \text{ ahol} \qquad U=\int_{(l)}\frac{M_{hz}^2(x)}{2J_zE}dx=\frac{1}{2J_zE}\int_{(l)}\left[F\cdot m_y(x)+M\cdot m_\varphi(x)\right]^2dx.$$

$$y=\frac{\partial U}{\partial F}=\frac{1}{J_zE}\left[F\int_{(l)}m_y^2dx+M\int_{(l)}m_ym_\varphi dx\right]=F\underbrace{\frac{1}{J_zE}\int_{(l)}m_y^2dx}_{\delta}+M\underbrace{\frac{1}{J_zE}\int_{(l)}m_ym_\varphi dx}_{\mu},$$

$$\varphi=\frac{\partial U}{\partial M}=\frac{1}{J_zE}\left[F\int_{(l)}m_ym_\varphi dx+M\int_{(l)}m_\varphi^2dx\right]=F\underbrace{\frac{1}{J_zE}\int_{(l)}m_ym_\varphi dx}_{\chi}+M\underbrace{\frac{1}{J_zE}\int_{(l)}m_\varphi^2dx}_{\kappa}.$$

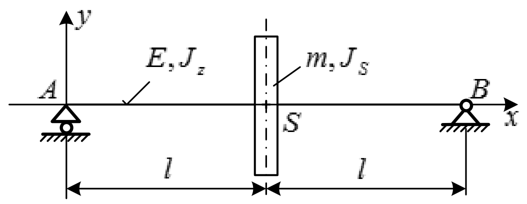
$$\int_{(l)}m_y^2dx=\frac{l}{6}\left(l^2+4\frac{l^2}{4}+0\right)=\frac{l^3}{3}, \qquad \Rightarrow \quad \delta=\frac{l^3}{3J_zE};$$

$$\int_{(l)}m_ym_\varphi dx=\frac{l}{6}\left(l+4\frac{l}{2}+0\right)=\frac{l^2}{2}, \qquad \Rightarrow \quad \mu=\chi=\frac{l^2}{2J_zE};$$

$$\int_{(l)}m_\varphi^2dx=\frac{l}{6}(1+4+1)=l, \qquad \Rightarrow \quad \kappa=\frac{l}{J_zE}.$$

$$\underline{\underline{D}}=\begin{bmatrix}\dfrac{l^3}{3J_zE} & \dfrac{l^2}{2J_zE}\\ \dfrac{l^2}{2J_zE} & \dfrac{l}{J_zE}\end{bmatrix}.$$

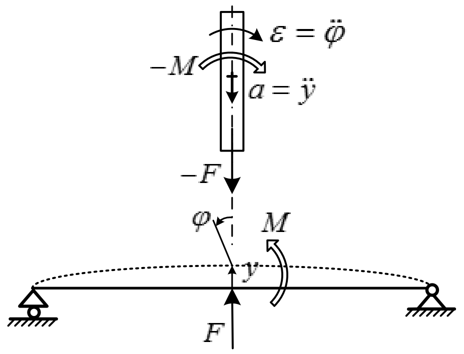
12.2. Példa: Maxwell-féle hatásszámok



Adott: az ábrán látható rugalmas tengely a rá ékelt merev fogaskerékkel, melyek együtt hajlító szabad rezgést végeznek.
Ismert: m, J_S, E, J_z, l.

Feladat:
Írja fel a hajlító rezgéseket végző rezgőrendszer mozgásegyenletét, és határozza meg a Maxwell-féle hatásszámait.

Kidolgozás:
Hajlító szabad rezgés során a rúdra merőleges $y(x)$ irányú elmozdulások jönnek létre.
Ha a fogaskereket, mint tárcsát vesszük figyelembe, akkor a z tengely körüli $\varphi(x)$ szögelfordulással is számolnunk kell. Az általános koordináták tehát: y *és* φ.



Ahol:
F : a fogaskerékről a tengelyre ható erő;
M : a fogaskerékről a tengelyre ható nyomaték;
$-F$: a tengelyről a fogaskerékre ható erő;
$-M$: a tengelyről a fogaskerékre ható nyomaték;

Newton II. törvénye ill. a perdülettétel a tárcsára:
$-F = m\ddot{y} \quad ill. \quad -M = J_S\ddot{\varphi}$

A tengely középvonalának elmozdulásai és keresztmetszetének szögelfordulásai:

$$\left.\begin{aligned} y &= \delta F + \mu M \\ \varphi &= \chi F + \kappa M \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \delta m\ddot{y} + \mu J_s\ddot{\varphi} + y &= 0 \\ \chi m\ddot{y} + \kappa J_s\ddot{\varphi} + \varphi &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} m\delta & J_s\mu \\ m\chi & J_s\kappa \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ azaz a mozgásegyenlet}$$

$$\begin{bmatrix} \delta & \mu \\ \chi & \kappa \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{q}} + \underline{\underline{E}}\,\underline{q} = \underline{0}.$$

$\underline{\underline{M}}$ a tömegmátrix, $\underline{\underline{D}}$ a Maxwell-féle hatásszámokból képzett mátrix.

A Maxwell-féle hatásszámok meghatározása a Castigliano tétel alkalmazásával:

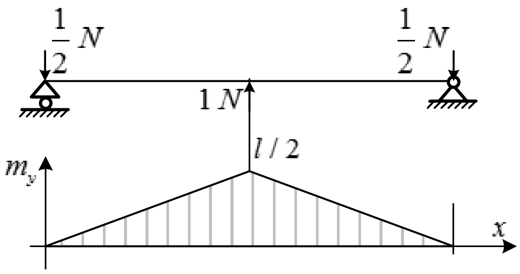
$$M_{hz}(x) = Fm_y(x) + Mm_\varphi(x)$$

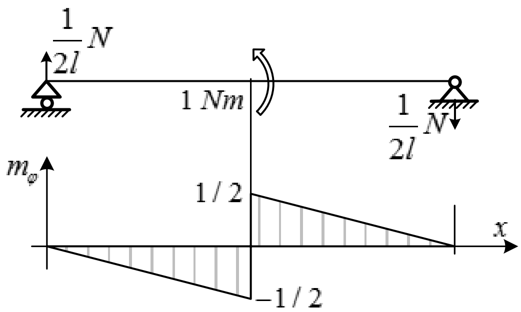
$$U = \int_{(l)} \frac{M_{hz}^2(x)}{2J_zE}dx = \frac{1}{2J_zE}\int_{(l)} \left[F \cdot m_y(x) + M \cdot m_\varphi(x)\right]^2 dx.$$

$$y = \frac{\partial U}{\partial F} \quad \textit{és} \quad \varphi = \frac{\partial U}{\partial M},$$

$$y=\frac{\partial U}{\partial F}=\frac{1}{J_zE}\left[F\int\limits_{(l)} m_y^2dx+M\int\limits_{(l)} m_y m_\varphi dx\right]=F\underbrace{\frac{1}{J_zE}\int\limits_{(l)} m_y^2dx}_{\delta}+M\underbrace{\frac{1}{J_zE}\int\limits_{(l)} m_y m_\varphi dx}_{\mu},$$

$$\varphi=\frac{\partial U}{\partial M}=\frac{1}{J_zE}\left[F\int\limits_{(l)} m_y m_\varphi dx+M\int\limits_{(l)} m_\varphi^2dx\right]=F\underbrace{\frac{1}{J_zE}\int\limits_{(l)} m_y m_\varphi dx}_{\chi}+M\underbrace{\frac{1}{J_zE}\int\limits_{(l)} m_\varphi^2dx}_{\kappa}.$$





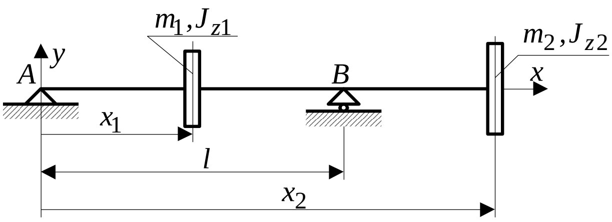
$$\int\limits_{(2l)} m_y^2dx=\frac{2l}{6}\left(0+4\frac{l^2}{4^2}+\frac{l^2}{4}\right)=\frac{l^3}{6},\qquad\Rightarrow\quad \delta=\frac{l^3}{6J_zE};$$

$$\int\limits_{(2l)} m_y m_\varphi dx=0,\qquad\Rightarrow\quad \mu=\chi=0;$$

$$\int\limits_{(2l)} m_\varphi^2dx=\frac{2l}{6}\left(0+4\frac{1}{16}+\frac{1}{4}\right)=\frac{l}{6},\qquad\Rightarrow\quad \kappa=\frac{l}{6J_zE}.$$

$$\underline{\underline{D}}=\begin{bmatrix}\dfrac{l^3}{6J_zE} & 0\\ 0 & \dfrac{l}{6J_zE}\end{bmatrix}.$$

12.3. Példa: Maxwell-féle hatásszámok



Adott:
$m_1, m_2, J_{z1}, J_{z2}, I_z = \text{áll.}, E = \text{áll.},$
$x_1 = 0{,}5l, x_2 = 1{,}5l.$

Feladat:
Írja fel a hajlító rezgéseket végző rezgőrendszer mozgásegyenletét, és határozza meg a Maxwell-féle hatásszámait.

Kidolgozás:

A *Maxwell*-féle hatásmátrix elemeinek meghatározása:
Válasszuk általános koordinátáknak a $y_1, y_2, \varphi_1, \varphi_2$, koordinátákat.

$$m_1\ddot{y}_1 = -F_1,\ m_2\ddot{y}_2 = -F_2,\ J_{z1}\ddot{\varphi}_1 = -M_1,\ J_{z2}\ddot{\varphi}_2 = -M_2;$$

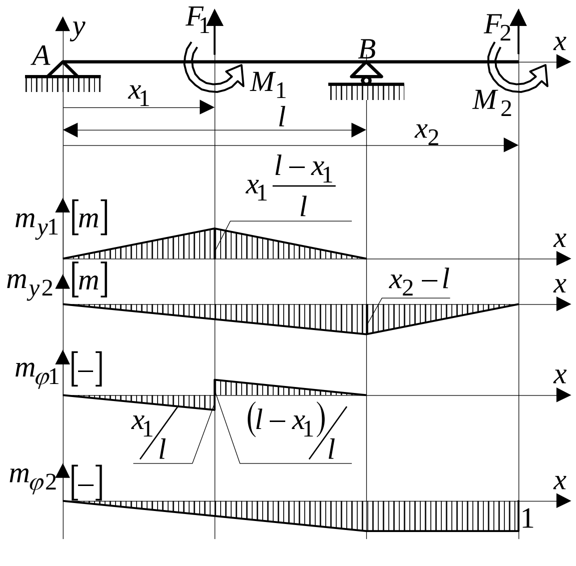
$$y_1 = \delta_{11}F_1 + \delta_{12}F_2 + \mu_{11}M_1 + \mu_{12}M_2,$$

$$y_2 = \delta_{21}F_1 + \delta_{22}F_2 + \mu_{21}M_1 + \mu_{22}M_2,$$

$$\varphi_1 = \chi_{11}F_1 + \chi_{12}F_2 + \kappa_{11}M_1 + \kappa_{12}M_2,$$

$$\varphi_2 = \chi_{21}F_1 + \chi_{22}F_2 + \kappa_{21}M_1 + \kappa_{22}M_2$$

A nyomatéki ábrák meghatározása:



$$M_{hz} = m_{y1}F_1 + m_{y2}F_2 + m_{\varphi1}M_1 + m_{\varphi2}M_2$$

$$U = \int_{(l)} \frac{M_{hz}^2}{2I_zE}dx = \int_{(l)} \frac{\left(m_{y1}F_1 + m_{y2}F_2 + m_{\varphi1}M_1 + m_{\varphi2}M_2\right)^2}{2I_zE}dx,$$

$$y_1 = \frac{\partial U}{\partial F_1} = \frac{\partial}{\partial F_1} \int_{(l)} \frac{\left(m_{y1}F_1 + m_{y2}F_2 + m_{\varphi 1}M_1 + m_{\varphi 2}M_2\right)^2}{2I_zE} dx =$$

$$= F_1 \int_{(l)} \frac{m_{y1}^2}{I_zE} dx + F_2 \int_{(l)} \frac{m_{y1}m_{y2}}{I_zE} dx +$$

$$+ M_1 \int_{(l)} \frac{m_{y1}m_{\varphi 1}}{I_zE} dx + M_2 \int_{(l)} \frac{m_{y1}m_{\varphi 2}}{I_zE} dx,$$

$$y_2 = \frac{\partial U}{\partial F_2} = \frac{\partial}{\partial F_2} \int_{(l)} \frac{\left(m_{y1}F_1 + m_{y2}F_2 + m_{\varphi 1}M_1 + m_{\varphi 2}M_2\right)^2}{2I_zE} dx =$$

$$= F_1 \int_{(l)} \frac{m_{y1}m_{y2}}{I_zE} dx + F_2 \int_{(l)} \frac{m_{y2}^2}{I_zE} dx +$$

$$+ M_1 \int_{(l)} \frac{m_{y2}m_{\varphi 1}}{I_zE} dx + M_2 \int_{(l)} \frac{m_{y2}m_{\varphi 2}}{I_zE} dx,$$

$$\varphi_1 = \frac{\partial U}{\partial M_1} = \frac{\partial}{\partial M_1} \int_{(l)} \frac{\left(m_{y1}F_1 + m_{y2}F_2 + m_{\varphi 1}M_1 + m_{\varphi 2}M_2\right)^2}{2I_zE} dx =$$

$$= F_1 \int_{(l)} \frac{m_{y1}m_{\varphi 1}}{I_zE} dx + F_2 \int_{(l)} \frac{m_{y2}m_{\varphi 1}}{I_zE} dx +$$

$$+ M_1 \int_{(l)} \frac{m_{\varphi 1}^2}{I_zE} dx + M_2 \int_{(l)} \frac{m_{\varphi 1}m_{\varphi 2}}{I_zE} dx,$$

$$\varphi_2 = \frac{\partial U}{\partial M_2} = \frac{\partial}{\partial M_2} \int_{(l)} \frac{\left(m_{y1}F_1 + m_{y2}F_2 + m_{\varphi 1}M_1 + m_{\varphi 2}M_2\right)^2}{2I_zE} dx =$$

$$= F_1 \int_{(l)} \frac{m_{y1}m_{\varphi 2}}{I_zE} dx + F_2 \int_{(l)} \frac{m_{y2}m_{\varphi 2}}{I_zE} dx +$$

$$+ M_1 \int_{(l)} \frac{m_{\varphi 1}m_{\varphi 2}}{I_zE} dx + M_2 \int_{(l)} \frac{m_{\varphi 2}^2}{I_zE} dx.$$

$$\left[\underline{\underline{D}}\right] = \frac{1}{I_zE} \int_{(l)} \begin{bmatrix} m_{y1}^2 & m_{y1}m_{y2} & m_{y1}m_{\varphi 1} & m_{y1}m_{\varphi 2} \\ m_{y1}m_{y2} & m_{y2}^2 & m_{y2}m_{\varphi 1} & m_{y2}m_{\varphi 2} \\ m_{y1}m_{\varphi 1} & m_{y2}m_{\varphi 1} & m_{\varphi 1}^2 & m_{\varphi 1}m_{\varphi 2} \\ m_{y1}m_{\varphi 2} & m_{y2}m_{\varphi 2} & m_{\varphi 1}m_{\varphi 2} & m_{\varphi 2}^2 \end{bmatrix} dx\,,$$

Az integrálok kiszámítása (részletezés nélkül):

$$\int_{(1{,}5l)} m_{y1}^2 dx = \frac{l^3}{48},\quad \int_{(1{,}5l)} m_{y1}m_{y2}dx = -\frac{l^3}{16},\quad \int_{(1{,}5l)} m_{y1}m_{\varphi 1}dx = 0,\quad \int_{(1{,}5l)} m_{y1}m_{\varphi 2}dx = -\frac{l^2}{8},$$

$$\int_{(1{,}5l)} m_{y2}^2 dx = \frac{l^3}{8},\quad \int_{(1{,}5l)} m_{y2}m_{\varphi 1}dx = -\frac{l^2}{16},\quad \int_{(1{,}5l)} m_{y2}m_{\varphi 2}dx = \frac{5l^2}{24},\quad \int_{(1{,}5l)} m_{\varphi 1}^2 dx = \frac{l}{12},$$

$$\int_{(1{,}5l)} m_{\varphi 1}m_{\varphi 2}dx = -\frac{l}{8},\quad \int_{(1{,}5l)} m_{\varphi 2}^2 dx = \frac{5l}{6}$$

$$\left[\underline{\underline{D}}\right] = \frac{1}{I_z E}\begin{bmatrix} \frac{l^3}{48} & -\frac{l^3}{16} & 0 & -\frac{l^2}{8} \\ -\frac{l^3}{16} & \frac{l^3}{8} & -\frac{l^2}{16} & \frac{5l^2}{24} \\ 0 & -\frac{l^2}{16} & \frac{l}{12} & -\frac{l}{8} \\ \frac{l^2}{8} & \frac{5l^2}{24} & -\frac{l}{8} & \frac{5l}{6} \end{bmatrix},$$

$$\left[\underline{\underline{m}}\right] = \frac{1}{I_z E}\begin{bmatrix} \frac{l^3}{48} & -\frac{l^3}{16} & 0 & -\frac{l^2}{8} \\ -\frac{l^3}{16} & \frac{l^3}{8} & -\frac{l^2}{16} & \frac{5l^2}{24} \\ 0 & -\frac{l^2}{16} & \frac{l}{12} & -\frac{l}{8} \\ \frac{l^2}{8} & \frac{5l^2}{24} & -\frac{l}{8} & \frac{5l}{6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{z1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{z2} \end{bmatrix}$$

A mozgás-egyenletrendszer:

$$\frac{1}{I_z E}\begin{bmatrix} \frac{l^3}{48}m_1 & -\frac{l^3}{16}m_2 & 0 & -\frac{l^2}{8}J_{z2} \\ -\frac{l^3}{16}m_1 & \frac{l^3}{8}m_2 & -\frac{l^2}{16}J_{z1} & \frac{5l^2}{24}J_{z2} \\ 0 & -\frac{l^2}{16}m_2 & \frac{l}{12}J_{z1} & -\frac{l}{8}J_{z2} \\ \frac{l^2}{8}m_1 & \frac{5l^2}{24}m_2 & -\frac{l}{8}J_{z1} & \frac{5l}{6}J_{z2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$