SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM | **ALKALMAZOTT MECHANIKA TANSZÉK**

1. MECHANIKA-REZGÉSTAN GYAKORLAT
(kidolgozta: Fehér Lajos, tansz. m.; Tarnai Gábor, mérnök tanár; Molnár Zoltán, egy. adj.)
Komplex mennyiségek, Mátrix- és Vektoralgebra, Differenciálegyenletek

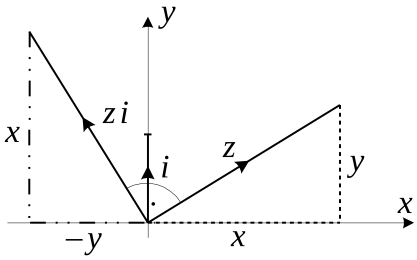
Komplex mennyiségek tulajdonságai, műveletei

Komplex mennyiség $\equiv$ komplex szám $\equiv$ komplex vektor.

a) <u>Komplex mennyiség algebrai alakja:</u>

$z = x + iy$,

x - a z komplex szám valós (reális) része,
y - a z komplex szám képzetes (imaginárius) része,
i - a képzetes (imaginárius) egységvektor



A képzetes egységvektor tulajdonságai:

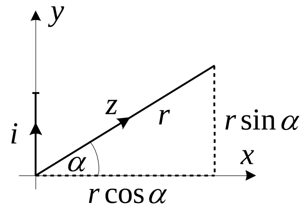
- $|i| = 1$, abszolút értéke egy,
- $i\,i = -1$, önmagával vett szorzata mínusz egy.

A z komplex szám i-vel történő szorzása a z vektor 90°-os elforgatását eredményezi az óramutató forgásával ellentétes irányban: $z\,i = (x+iy)\,i = i\,x - y = -y + i\,x$.

b) <u>Komplex mennyiség trigonometrikus alakja:</u>

$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$,

$r = |z|$ - a z komplex szám abszolút értéke (nagysága),
α - a z komplex szám x tengellyel bezárt szöge,
$x = \mathrm{Re}(z) = r\cos\alpha$ - a z komplex szám valós (reális) része,
$y = \mathrm{Im}(z) = r\sin\alpha$ - a z komplex szám képzetes (imaginárius) része.



c) <u>Komplex mennyiség exponenciális alakja:</u>

$z = r\,e^{i\alpha}$, ahol $e \approx 2,718281$ a természetes szám és r a komplex szám abszolút értéke (nagysága).

Megjegyzés:

- Az exponenciális alak az $e^{x} = e^{i\alpha}$ függvény sorfejtésével vezethető be.

- A trigonometrikus és az exponenciális alak egybevetéséből következik, hogy a $z = e^{i\alpha}$ komplex mennyiség az x tengellyel α szöget bezáró komplex egységvektor: $\left|e^{i\alpha}\right| = 1$.

d) Komplex mennyiség abszolút értéke:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2 \underbrace{\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right)}_{=1}} = r\,.$$

Az abszolút érték tulajdonságai:

- $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$,
- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$,
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ a $z_2 \neq 0$ esetben.

e) Komplex mennyiség konjugáltja:

A $z = x + iy = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = re^{i\alpha}$ komplex szám konjugáltja: $\bar{z} = x - iy = r(\cos\alpha - i\sin\alpha) = re^{-i\alpha}$.

Műveletek a konjugálttal:

- $z + \bar{z} = (x+iy) + (x-iy) = 2x$,
- $z - \bar{z} = (x+iy) - (x-iy) = 2iy$,
- $z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 - ixy + iyx = x^2 + y^2 = |z|^2 = r^2$,
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(x_1 + iy_1) + (x_1 + iy_1)} = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$,
- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\,\bar{z}_2$.

f) Komplex mennyiségek szorzása:

- Szorzás algebrai alak esetén:

$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)\,.$$

- Szorzás trigonometrikus alak esetén:

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)\, r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2) =$$
$$= r_1 r_2 \left[\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2)\right].$$

- Szorzás exponenciális alak esetén:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i\alpha_1} e^{i\alpha_2} = r_1 r_2 e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)}\,.$$

Megjegyzés: - Az $e^{i\alpha_1}$, $e^{i\alpha_2}$ és $e^{i(\alpha_1+\alpha_2)}$ az *x* tengellyel α_1, α_1 és $(\alpha_1 + \alpha_2)$ szöget bezáró egységvektorok: $\left|e^{i\alpha_1}\right| = \left|e^{i\alpha_2}\right| = \left|e^{i(\alpha_1+\alpha_2)}\right| = 1$.

- A szorzás $z = z_1 z_2$ komplex eredményvektora a z_1 komplex vektorhoz képest α_2 szöggel el van forgatva az óramutató járásával ellentétes irányban.

g) Komplex mennyiségek osztása:

- Osztás algebrai alak esetén:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)} = \frac{a_1 \bar{z}_2}{(a_2 + ib_2)\bar{z}_2} + \frac{ib_1 \bar{z}_2}{(a_2 + ib_2)\bar{z}_2} =$$
$$= \frac{a_1(a_2 - ib_2)}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{ib_1(a_2 - ib_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\,\frac{b_1 a_2 - b_2 a_1}{a_2^2 + b_2^2}\,.$$

- Osztás trigonometrikus alak esetén:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)}{r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\right]$$

- Osztás exponenciális alak esetén:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\alpha_1}}{r_2 e^{i\alpha_2}} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)} .$$

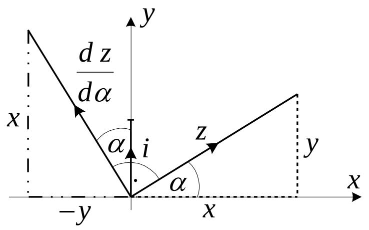
Megjegyzés: - Az $e^{i\alpha_1}$, $e^{i\alpha_2}$ és $e^{i(\alpha_1+\alpha_2)}$ az *x* tengellyel α_1, α_1 és $(\alpha_1+\alpha_2)$ szöget bezáró egységvektorok: $\left|e^{i\alpha_1}\right| = \left|e^{i\alpha_2}\right| = \left|e^{i(\alpha_1+\alpha_2)}\right| = 1$.

- Az osztás $z = z_1 / z_2$ komplex eredményvektora a z_1 komplex vektorhoz képest α_2 szöggel el van forgatva az óramutató járásával megegyező irányban.

h) Komplex mennyiségek α szög szerinti differenciálása:

- Differenciálás exponenciális alak esetén:

$$\frac{dz}{d\alpha} = \frac{d(r\,e^{i\alpha})}{d\alpha} = r\,e^{i\alpha} i = z\,i\,.$$



Az α szög szerinti differenciálás a *z* komplex mennyiséget 90^o-kal elforgatja az óramutató járásával ellentétes irányban

- Differenciálás trigonometrikus alak esetén:

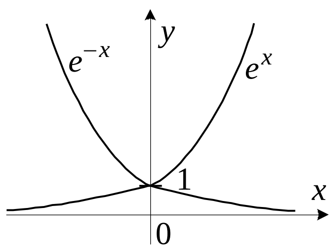
$$\frac{dz}{d\alpha} = \frac{d\left[r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\right]}{d\alpha} = r(-\sin\alpha + i\cos\alpha) = i\,z\,.$$

Hiperbolikus és a Krülov függvények

a) Az exponenciális függvény:

Értelmezése:

$$y = e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$



Kiejtés: *y* egyenlő é ad *x*.

A faktoriális (*n* faktoriális):

$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \;\ldots\; \cdot n$.

A természetes szám: $e^1 = e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \approx 2{,}718281\ldots$.

b) A hiperbolikus függvények:

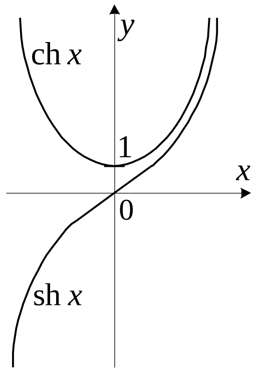
Értelmezések:

$$y = \mathrm{sh}\, x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}.$$

Kiejtés: *y* egyenlő szinusz hiperbolikusz *x*.

$$y = \mathrm{ch}\, x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}.$$

Kiejtés: *y* egyenlő koszinusz hiperbolikusz *x*.



c) A Krülov-függvények:

Értelmezés: a Krülov függvényeket hiperbolikus és trigonometrikus függvények lineáris kombinációja szolgáltatja:

$$S(kx) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{ch}\, kx + \cos kx\right), \quad T(kx) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{sh}\, kx + \sin kx\right),$$

$$U(kx) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{ch}\, kx - \cos kx\right), \quad V(kx) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{sh}\, kx - \sin kx\right),$$

ahol k valós állandó.

A függvények *x* szerinti első deriváltjai:

$$\frac{dS}{dx} = k\frac{1}{2}\left(\mathrm{sh}\, kx - \sin kx\right) = kV(kx), \quad \frac{dT}{dx} = k\frac{1}{2}\left(\mathrm{ch}\, kx + \cos kx\right) = kS(kx),$$

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{sh}\, kx + \sin kx\right) = kT(kx), \quad \frac{dV}{dx} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{ch}\, kx - \cos kx\right) = kU(kx).$$

A függvények második és harmadik deriváltjai:

$$\frac{d^2S}{dx^2} = k^2U(kx), \quad \frac{d^2T}{dx^2} = k^2V(kx), \quad \frac{d^2U}{dx^2} = k^2S(kx), \quad \frac{d^2V}{dx^2} = k^2T(kx).$$

$$\frac{d^3S}{dx^3} = k^3T(kx), \quad \frac{d^3T}{dx^3} = k^3U(kx), \quad \frac{d^3U}{dx^3} = k^3V(kx), \quad \frac{d^3V}{dx^3} = k^3S(kx).$$

Mátrixalgebrai összefoglaló

a) Mátrix értelmezése, jelölése:

Mátrix: Skaláris mennyiségeknek, számoknak megadott szabály szerint táblázatba rendezett halmaza.

Mátrix jelölése: $\left[\underline{\underline{A}}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}.$

A mátrixokat kétszer aláhúzott betűvel, a mátrixok elemeit (koordinátáit) alsó indexes betűvel jelöljük. Pl. $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{a}}$ és a_{13}, a_2 stb.

Az a_{13} mátrixelem az $\underline{\underline{A}}$ mátrix első sorában és harmadik oszlopában áll.

Mátrix mérete: Például a fenti (2x3)-as méretű $\left[\underline{\underline{A}}\right]$ mátrixnak két sora és három oszlopa van.

Az a_{13} mátrix elem jelölés kiejtése (kiolvasása): á egy három.

Oszlopmátrix: $\left[\underline{\underline{a}}\right]=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, sormátrix: $\left[\underline{\underline{a}}^T\right]=\left[a_1 \quad a_2 \quad a_3\right]$.

Az oszlopmátrixnak egy oszlopa, a sormátrixnak egy sora van.
A sormátrix ugyanannak az oszlopmátrixnak a transzponáltja. A sormátrixot a mátrix betűjelének felső indexébe írt T betű jelöli.

b) Mátrixműveletek:

A műveleteket (2×2)-es, (2x1)-es és (1x2)-es mátrixokra mutatjuk be.

- Mátrix transzponáltja (tükrözés a főátlóra):

A mátrix főátlóját az azonos indexű elemek alkotják.

$$\left[\underline{\underline{A}}\right]=\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{(2\times 2)} \quad\Rightarrow\quad \left[\underline{\underline{A}}^T\right]=\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}}_{(2\times 2)}.$$

A transzponálási művelet jele: T (a mátrix felső indexében).

A transzponálás oszlopmátrixból sormátrixot, sormátrixból pedig oszlopmátrixot hoz létre.

Az $\underline{\underline{A}}^T$ jelölés kiejtése (kiolvasása): á transzponált.

- Mátrixok összeadása, kivonása:

Csak azonos méretű mátrixok adhatók össze, vonhatók ki egymásból.

$\underline{\underline{A}}\pm\underline{\underline{B}}=\underline{\underline{C}}$,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{(2\times 2)}\pm\underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}}_{(2\times 2)}=\underbrace{\begin{bmatrix} (a_{11}\pm b_{11}) & (a_{12}\pm b_{12}) \\ (a_{21}\pm b_{21}) & (a_{22}\pm b_{22}) \end{bmatrix}}_{(2\times 2)}=\underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}}_{(2\times 2)}.$$

- Mátrixszorzás (sor-oszlop kombináció):

Csak olyan mátrixok szorozhatók össze, amelyek teljesítik azt a feltételt, hogy az első szorzótényező oszlopainak száma megegyezik a második szorzótényező sorainak számával.

$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}=\underline{\underline{C}}$,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{(2\times 2)}\underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}}_{(2\times 2)}=\underbrace{\begin{bmatrix} (a_{11}\,b_{11}+a_{12}\,b_{21}) & (a_{11}\,b_{12}+a_{12}\,b_{22}) \\ (a_{21}\,b_{11}+a_{22}\,b_{21}) & (a_{21}\,b_{12}+a_{22}\,b_{22}) \end{bmatrix}}_{(2\times 2)}.$$

$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{b}}=\underline{\underline{c}}$,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{(2\times 2)}\underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_{(2\times 1)}=\underbrace{\begin{bmatrix} (a_{11}\,b_1+a_{12}\,b_2) \\ (a_{21}\,b_1+a_{22}\,b_2) \end{bmatrix}}_{(2\times 1)}=\underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{(2\times 1)}.$$

$\underline{\underline{a}}^T\,\underline{\underline{B}}=\underline{\underline{d}}^T$,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}}_{(1\times 2)}\underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}}_{(2\times 2)}=\underbrace{\left[(a_1\,b_{11}+a_2\,b_{21}) \quad (a_1\,b_{12}+a_2\,b_{22})\right]}_{(1\times 2)}=\underbrace{\begin{bmatrix} d_1 & d_2 \end{bmatrix}}_{(1\times 2)}.$$

c) Különleges mátrixok:

- *Egységmátrix:* $\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tulajdonsága: $\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{A}}$.

Az egységmátrix a főátlójában 1-es koordinátákat, a főátlóján kívül 0 elemeket tartalmaz. Az egységmátrixszal történő szorzás nem változtatja meg a megszorzott mátrixot.

- Inverz mátrix (reciprok mátrix): $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$.

Az $\underline{\underline{A}}^{-1}$ mátrix az $\underline{\underline{A}}$ mátrix inverze, vagy reciproka.

Csak négyzetes mátrixnak létezik inverze (reciproka) abban az esetben, ha az $\underline{\underline{A}}$ mátrix elemeiből képezett determináns nem nulla.

- Szimmetrikus mátrix: $\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}$

A mátrix elemei megegyeznek a főátlóra vett tükörképükkel.

Például $\left[\underline{\underline{A}}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ szimmetrikus mátrix.

- Ferdeszimmetrikus mátrix: $\underline{\underline{A}}^T = -\underline{\underline{A}}$.

A mátrix bármelyik eleme megegyezik a főátlóra vett tükörképének mínusz egyszeresével. Ebből az következik, hogy a főátlóban csak zérus elemek lehetnek.

Például $\left[\underline{\underline{A}}\right] = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ferdeszimmetrikus mátrix.

- Inverz mátrix (reciprok mátrix): $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$.

Az $\underline{\underline{A}}^{-1}$ mátrix az $\underline{\underline{A}}$ mátrix inverze, vagy más néven reciproka.

Csak négyzetes mátrixnak létezik inverze (reciproka) abban az esetben, ha az $\underline{\underline{A}}$ mátrix elemeiből képezett determináns nem nulla.

Az inverz mátrix kiszámítása: $\underline{\underline{A}}^{-1} = \left[a_{ij}^{-1}\right] = \dfrac{\operatorname{adj} a_{ji}}{\det\left|a_{ij}\right|} = \dfrac{A_{ji}}{\det\left|\underline{\underline{A}}\right|}$.

Mátrix sajátértékei és sajátvektorai

- A sajátérték feladat kitűzése:

Létezik-e olyan $\underline{\underline{n}}$ oszlopmátrix, amellyel az $\underline{\underline{A}}$ négyzetes mátrixot megszorozva, az $\underline{\underline{n}}$ oszlopmátrix valahányszorosát kapjuk: $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{n}} = \lambda\,\underline{\underline{n}}$, ahol a λ skaláris mennyiség?

Ha létezik ilyen $\underline{\underline{n}}$ oszlopmátrix, akkor ezt az $\underline{\underline{A}}$ négyzetes mátrix sajátvektorának, a λ skaláris mennyiséget pedig az $\underline{\underline{A}}$ mátrix sajátértékének nevezzük.

- A sajátérték feladat megoldása:

A sajátérték feladat megoldását egy (2x2)-es mátrixon mutatjuk be.
Az előző egyenletet részletesen kiírva és bal oldalra rendezve:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

és a szorzásokat elvégezve, az n_x, n_y ismeretlenre homogén lineáris algebrai egyenletrendszert kapunk:

$(a_{11}-\lambda)\,n_x + a_{12}\,n_y = 0,$

$a_{21}\,n_x + (a_{11}-\lambda)\,n_y = 0.$

Az egyenletrendszer nemtriviális (nullától különböző) megoldásának feltétele az, hogy a rendszer mátrixából képezett determinánsnak el kell tűnnie:

$$\begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{11}-\lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

A determinánst kifejtve kapjuk a *karakterisztikus egyenletet*:

$\lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$.

A karakterisztikus egyenlet megoldásai a mátrix sajátértékei:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a_{11}+a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2}.$$

A homogén lineáris algebrai egyenletrendszernek csak $\lambda = \lambda_1$ és $\lambda = \lambda_2$ esetén van nemtriviális megoldása.

A mátrix sajátértékeit növekvő sorrendben szokás sorszámozni.

Ha az egyes λ_i (i=1,2) sajátértékeket behelyettesítjük a homogén lineáris algebrai egyenletrendszerbe, akkor az egyenletrendszer megoldható az n_{ix}, n_{iy} ismeretlenre:

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-\lambda_i)\,n_{ix} + a_{12}\,n_{iy} &= 0 \\ a_{21}\,n_{ix} + (a_{11}-\lambda_i)\,n_{iy} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} n_{ix} &= \dots \\ n_{iy} &= \dots \end{aligned} \quad (i=1,2).$$

Az λ_i (i=1,2) sajátértékek behelyettesítése esetén azonban az egyenletrendszer egyenletei egymástól nem lineárisan függetlenek, ezért az egyik egyenletet el lehet hagyni és a másik egyenletből csak az n_{ix}/n_{iy}, vagy n_{iy}/n_{ix} (*i*=1,2) hányados határozható meg.

Az n_{ix} és n_{iy} értékét akkor kapjuk meg egyértelműen, ha az $\underline{\underline{n}}_i^T = \begin{bmatrix} n_{ix} & n_{iy} \end{bmatrix}$ sajátvektoroktól megköveteljük, hogy egységvektorok legyenek: $\sqrt{n_{ix}^2 + n_{iy}^2} = 1$, *i*=1,2.

Vektorok skaláris szorzata

A skaláris szorzás értelmezése: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$. ($\alpha$ a vektorok között bezárt szög, $\alpha \le \pi$.)

Az $\vec{a}\cdot\vec{b}$ művelet kiolvasása: *á* skalárisan szorozva *bével*, vagy *á* skalár *bé*.

A skaláris szorzás kiszámítása mátrixszorzással:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Az első szorzó tényező koordinátáit sormátrixba, a második szorzó tényező koordinátáit oszlopmátrixba rendezzük és a szorzást a mátrixszorzás szabályai szerint (sor-oszlop kombináció) végezzük el.

A szorzás eredménye egy skaláris mennyiség.

<u>1.1. Példa</u> (Mátrix műveletek)

Adott: $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$, $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$.

Feladat:

a) Az $\underline{\underline{A}}^T$ és $\underline{\underline{B}}^T$ transzponált mátrixok meghatározása.

b) Az $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$ összegmátrix és az $\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}}$ különbségmátrix meghatározása.

c) Az $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ szorzatmátrix meghatározása.

Kidolgozás:

a) Az $\underline{\underline{A}}^T$ és $\underline{\underline{B}}^T$ transzponált mátrixok meghatározása:

$$\underline{\underline{A}}^T = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, \ \underline{\underline{B}}^T = \begin{bmatrix} -12 & -6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

b) Az $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$ összegmátrix és az $\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}}$ különbségmátrix meghatározása:

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 1 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -8 \\ 13 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) Az $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ szorzatmátrix meghatározása.

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2(-12) + (-4)(-6) & 2 \cdot 4 + (-4)3 \\ 7(-12) + 3(-6) & 7 \cdot 4 + 3 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -48 & -4 \\ -102 & 37 \end{bmatrix}.$$

<u>1.2. Példa</u> (Skaláris és mátrix szorzás gyakorlása)

Adott: $\vec{a} = \left(4\,\vec{i} + 6\vec{j} - \vec{k}\right)$m, $\vec{b} = \left(-3\,\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right)$ m.

Feladat: Az $\vec{a} \cdot \vec{b}$ skaláris szorzat meghatározása.

Kidolgozás:

Az $\vec{a}\cdot\vec{b}$ szorzat meghatározása:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{bmatrix}4 & 6 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\ 1\\ -1\end{bmatrix}=4\,(-3)+6\cdot 1+(-1)\,(-1)=-5\ \mathrm{m}^2\,.$$

<u>1.3. Példa</u> (Mátrix inverzének előállítása)

Adott: $\underline{\underline{A}}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 3 & 3 & 1\\ -2 & 2 & -1\end{bmatrix}.$

Feladat: Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix inverzének meghatározása.

Kidolgozás:

- A mátrix determinánsa: $\det\left|\underline{\underline{A}}\right|=2(-3-2)-1(-3+2)+2(6+6)=15\,.$

- Az adjungált mátrix elemei:

$\mathrm{adj}\,a_{11}=-3-2=-5,\quad \mathrm{adj}\,a_{12}=-(-3+2)=1,\quad \mathrm{adj}\,a_{13}=6+6=12,$

$\mathrm{adj}\,a_{21}=-(-1+4)=5,\quad \mathrm{adj}\,a_{22}=-2+4=2,\quad \mathrm{adj}\,a_{23}=-(4+2)=-6,$

$\mathrm{adj}\,a_{31}=1-6=-5,\quad \mathrm{adj}\,a_{32}=-(2-6)=4,\quad \mathrm{adj}\,a_{33}=6-3=3.$

- Az adjungált mátrix: $\left[A_{ij}\right]=\left[\mathrm{adj}\,a_{ij}\right]=\begin{bmatrix}-5 & 1 & 12\\ 5 & 2 & -6\\ -5 & 4 & 3\end{bmatrix}.$

- Az inverz (reciprok) mátrix:

$$\underline{\underline{A}}^{-1}=\left[a_{ij}^{-1}\right]=\frac{\mathrm{adj}\,a_{ji}}{\det\left|a_{ij}\right|}=\frac{A_{ji}}{\det\left|\underline{\underline{A}}\right|}=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}-5 & 5 & -5\\ 1 & 2 & 4\\ 12 & -6 & 3\end{bmatrix}$$

- Ellenőrzés: $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 3 & 3 & 1\\ -2 & 2 & -1\end{bmatrix}\frac{1}{15}\begin{bmatrix}-5 & 5 & -5\\ 1 & 2 & 4\\ 12 & -6 & 3\end{bmatrix}=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}15 & 0 & 0\\ 0 & 15 & 0\\ 0 & 0 & 15\end{bmatrix}=\underline{\underline{E}}\,.$

<u>1.3. b) Példa</u> (Mátrix inverzének előállítása)

Adott: $\underline{\underline{A}}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{bmatrix}.$

Feladat: Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix inverzének meghatározása.

Kidolgozás:

- A mátrix determinánsa: $\det\left|\underline{\underline{A}}\right| = 2\cdot(-2) - 1\cdot 3 = -7$.

- Az adjungált mátrix elemei:

$\operatorname{adj} a_{11} = -2$, $\operatorname{adj} a_{12} = -(3) = -3$, ,

$\operatorname{adj} a_{21} = -(1) = -1$, $\operatorname{adj} a_{22} = 2$, ,

- Az adjungált mátrix: $\left[A_{ij}\right] = \left[\operatorname{adj} a_{ij}\right] = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

- Az inverz (reciprok) mátrix:

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \left[a_{ij}^{-1}\right] = \frac{\left(\operatorname{adj} a_{ji}\right)^T}{\det\left|a_{ij}\right|} = \frac{\operatorname{adj} a_{ji}}{\det\left|a_{ij}\right|} = \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2857 & 0,1429 \\ 0,4286 & -0,2857 \end{bmatrix}$$

- Ellenőrzés: $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,2857 & 0,1429 \\ 0,4286 & -0,2857 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{E}}$.

<u>1.4. Példa</u> (Mátrix sajátértékeinek és sajátvektorainak meghatározása)

Adott: $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -30 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & -40 \\ 0 & -40 & 90 \end{bmatrix}$.

Feladat: Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix sajátértékeinek és sajátvektorainak a meghatározása.

Kidolgozás:

- A megoldandó homogén lineáris algebrai egyenletrendszer:

$$\begin{bmatrix} (-30-\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & (30-\lambda) & -40 \\ 0 & -40 & (90-\lambda) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ vagy}$$

$$\left.\begin{aligned} (-30-\lambda)\, n_x &= 0 \\ (30-\lambda)\, n_y - 40\, n_z &= 0 \\ -40\, n_y + (90-\lambda) n_z &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

- A karakterisztikus egyenlet: $\begin{vmatrix} (-30-\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & (30-\lambda) & -40 \\ 0 & -40 & (90-\lambda) \end{vmatrix} = 0, \quad \Rightarrow$

$(-30-\lambda)\left[(30-\lambda)(90-\lambda) - 40\cdot 40\right] = 0$, $(-30-\lambda)(\lambda^2 - 120\lambda + 1100) = 0$.

- A karakterisztikus egyenlet megoldása, a mátrix sajátértékei:

$(-30-\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -30$,

$(\lambda^2 - 120\lambda + 1100) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = 10,\ \lambda_3 = 110$.

A mátrix sajátvektorai, a sajátértékek behelyettesítése a lineáris algebrai egyenletrendszerbe:

A $\lambda_1 = -30$ sajátértékhez tartozó sajátvektor:

$$\left.\begin{aligned} (-30-\lambda_1)\, n_{1x} &= 0 \\ (30-\lambda_1)\, n_{1y} - 40\, n_{1z} &= 0 \\ -40\, n_{1y} + (90-\lambda_1) n_{1z} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} (-30+30)\, n_{1x} &= 0 \\ (30+30)\, n_{1y} - 40\, n_{1z} &= 0 \\ -40\, n_{1y} + (90+30) n_{1z} &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

A 2. és 3. egyenletből: $n_{1y} = n_{1z} = 0$.

Az 1. egyenletből: n_{1x} tetszőleges érték.

Legyen a sajátvektor egységvektor, így: $\left[\underline{\underline{n}}_1\right]^T = \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right]$.

A $\lambda_2 = 10$ sajátértékhez tartozó sajátvektor:

$$\left.\begin{aligned} (-30-\lambda_2)\, n_{2x} &= 0 \\ (30-\lambda_2)\, n_{2y} - 40\, n_{2z} &= 0 \\ -40\, n_{2y} + (90-\lambda_2) n_{2z} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} (-30-10)\, n_{2x} &= 0 \\ (30-10)\, n_{2y} - 40\, n_{2z} &= 0 \\ -40\, n_{2y} + (90-10) n_{2z} &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Az 1. egyenletből: $n_{2x} = 0$.

A 2., vagy 3. egyenletből: $n_{2y} = 2n_{2z}$.

Legyen a sajátvektor egységvektor: $\sqrt{n_{2y}^2 + 4n_{2y}^2} = 1$, $\Rightarrow$ $n_{2y} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Tehát a λ_2-höz tartozó sajátvektor: $\left[\underline{\underline{n}}_2\right]^T = \left[\begin{matrix} 0 & \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{matrix}\right]$.

A $\lambda_3 = 110$ sajátértékhez tartozó sajátvektor:

$$\left.\begin{aligned} (-30-\lambda_3)\, n_{3x} &= 0 \\ (30-\lambda_3)\, n_{3y} - 40\, n_{3z} &= 0 \\ -40\, n_{3y} + (90-\lambda_3) n_{3z} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} (-30-110)\, n_{3x} &= 0 \\ (30-110)\, n_{3y} - 40\, n_{3z} &= 0 \\ -40\, n_{3y} + (90-110) n_{3z} &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

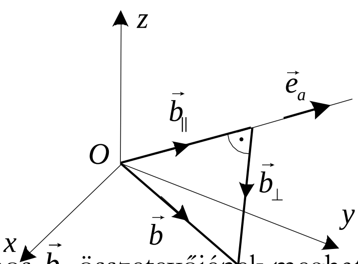
Az 1. egyenletből: $n_{3x} = 0$.

A 2., vagy 3. egyenletből: $n_{3y} = -2n_{3z}$.

Legyen a sajátvektor egységvektor: $\sqrt{n_{3y}^2 + 4n_{3y}^2} = 1$, $\Rightarrow$ $n_{3y} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Tehát a λ_3-hoz tartozó sajátvektor: $\left[\underline{\underline{n}}_3\right]^T = \left[\begin{matrix} 0 & \dfrac{1}{\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{matrix}\right]$.

<u>1.5. Példa</u> (Vektor adott iránnyal párhuzamos összetevőjének meghatározása)



Adott: $\vec{b} = (20\vec{i} + 40\vec{j} - 30\vec{k})$ m,

$\vec{e}_a = (0,8\vec{j} - 0,6\vec{k})$.

Feladat:

A $\vec{b}$ vektor $\vec{e}_a$ egységvektorral párhuzamos $\vec{b}_\parallel$ összetevőjének meghatározása.

Kidolgozás:

A $\vec{b}_{\|}$ párhuzamos összetevő meghatározása:

$$\vec{b}_{\|} = (\vec{e}_a \cdot \vec{b})\,\vec{e}_a = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0,8 & -0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 40 \\ -30 \end{bmatrix} \right) \vec{e}_a = (32+18)\,\vec{e}_a = 50\,\vec{e}_a$$

$\vec{b}_{\|} = 50\,\vec{e}_a = 50(0,8\vec{j} - 0,6\vec{k}) = (40\,j - 30\vec{k})$ m.

Differenciál egyenletek

(rövid áttekintés)

Differenciálegyenlet: olyan matematikai egyenlet, amely egy vagy több változós ismeretlen függvény és deriváltjai közötti kapcsolatot írja le.

Fontosabb típusok: közönséges differenciálegyenletek, parciális differenciálegyenletek, (sztochasztikus differenciálegyenletek, késleltetett differenciálegyenletek)

Közönséges differenciálegyenlet: olyan matematikai egyenlet, amely egy független változójú függvény és deriváltjai közötti összefüggést adja meg.

Pl. $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F$, ahol $x = x(t)$ (Newton II. törvénye)

Parciális differenciálegyenlet: olyan matematikai egyenlet, amely az ismeretlen többváltozós függvény és a parciális deriváltjai közötti kapcsolatot írja le.

Pl. $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 0;$ és a megoldás $u(x,y) = f(y)$.

Speciális eset: **Lineáris állandó együtthatós közönséges inhomogén differenciálegyenlet**

$$A_n \frac{d^n y}{dx^n} + A_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + A_0 y = r(x), \qquad \text{ahol } r(x) \text{ a zavaró függvény.}$$

Megoldás: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$,

ahol $y_h(x)$ a $A_n \dfrac{d^n y_h}{dx^n} + A_{n-1}\dfrac{d^{n-1}y_h}{dx^{n-1}} + \cdots + A_0 y_h = 0$ homogén differenciálegyenlet általános megoldása,

$y_p(x)$ az $A_n \dfrac{d^n y_p}{dx^n} + A_{n-1}\dfrac{d^{n-1}y_p}{dx^{n-1}} + \cdots + A_0 y_p = r(x)$ inhomogén differenciál-egyenlet egy partikuláris megoldása.

A homogén differenciálegyenlet **általános megoldása**:

$$A_n \frac{d^n y_h}{dx^n} + A_{n-1}\frac{d^{n-1}y_h}{dx^{n-1}} + \cdots + A_0 y_h = 0$$

Megoldást $y_h = e^{\lambda x}$ alakban keressük

$$\underbrace{\left(A_n \lambda^n + A_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + A_0\right)}_{=0} \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} = 0$$

Karakterisztikus egyenlet:

$A_n \lambda^n + A_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + A_0 = 0$ (*n*-ed rendű polinom)

Megoldása: *n* számú gyök: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

A differenciálegyenletnek *n* számú alapmegoldása van:

$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$.

Az alapmegoldások lineáris kombinációja is megoldása differenciál-egyenletnek: $y_h(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} +, \ldots, + C_n e^{\lambda_n x}$

Az ismeretlen $C_i \left(i = 1, 2, \ldots, n\right)$ konstansok a perem-, illetve kezdeti feltételekből meghatározhatóak.

Az inhomogén differenciálegyenlet egy **partikuláris megoldása**:

$$A_n \frac{d^n y_p}{dx^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} y_p}{dx^{n-1}} + \cdots + A_0 y_p = r(x)$$

A megoldást célszerű a zavaró vagy más néven forrás függvény alakjában keresni, mert ez többnyire eredményre vezet:

$$y_p(x) = C\, r(x) .$$

Behelyettesítés után a *C* konstans meghatározható.

Deriváltak jelölése: $\frac{dy}{dx} = y'$, $\frac{d^2 y}{dx^2} = y''$,…, stb. (hely szerinti deriváltak)

$\frac{dy}{dt} = \dot{y}$,, $\frac{d^2 y}{dt^2} = \ddot{y}$,…, stb. (idő szerinti deriváltak)

1.6. Példa

Adott egy másodrendű állandó együtthatós közönséges lineáris differenciálegyenlet valamint az $x = 0$ peremen a függvény és deriváltjának értéke:

$$y'' - 4y = 3x, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4 .$$

Feladat a differenciál egyenlet megoldásának előállítása.

Megoldás: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

Homogén megoldás:

homogén de. $y_p'' - 4 y_p = 0$, megoldás keresése $y_h = e^{\lambda x}$

$$\underbrace{\left(\lambda^2 - 4\right)}_{=0} \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} = 0$$

karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 - 4 = 0$; $\lambda^2 = 4$; $\lambda_{1,2} = \pm 2$

homogén ált megoldás: $y_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$

Az alapmegoldások (bázisok) tetszőleges lineáris kombinációja is megoldás

$$y_h(x) = A_1 \underbrace{\left(\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}\right)}_{ch(2x)} + A_2 \underbrace{\left(\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}\right)}_{sh(2x)}$$

azaz $y_h(x) = A_1 ch(2x) + A_2 sh(2x)$.

Partikuláris megoldás: $y_p(x) = C\,x$ (a zavaró függvény alakjában keressük)

$y_p'' - 4y = 3x$ behelyettesítés után $-4Cx = 3x \Rightarrow C = -\frac{3}{4}$

$$y_p(x) = -\frac{3}{4}x$$

Peremfeltételek figyelembevétele: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

$y(0) = 1$

$$y(0) = 1 = A_1 \underbrace{ch(2\cdot 0)}_{1} + A_2 \underbrace{sh(2\cdot 0)}_{0} - \frac{3}{4}0$$

$$1 = A_1 \underbrace{ch(2\cdot 0)}_{1} \quad \Rightarrow A_1 = 1$$

$y'(0) = 4$

$$y'(0) = 4 = A_1 \underbrace{2sh(2\cdot 0)}_{0} + A_2 \underbrace{2ch(2\cdot 0)}_{2} - \frac{3}{4}$$

$$4 = A_2 \underbrace{2ch(2\cdot 0)}_{2} - \frac{3}{4} \quad \Rightarrow A_2 = 2 + \frac{3}{8} = \frac{19}{8}$$

Végül: $$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ch(2x) + \frac{19}{8} sh(2x) - \frac{3}{4}x.$$

1.7. Példa

Adott egy másodrendű állandó együtthatós közönséges lineáris differenciálegyenlet valamint az $x = 0$ peremen a függvény és deriváltjának értéke:

$$y'' + 4y = 3x, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4.$$

Feladat a differenciálegyenlet megoldásának előállítása.

Megoldás: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

Homogén megoldás:

homogén de. $y_h''+4y_h=0$, megoldás keresése $y_h=e^{\lambda x}$

$$\underbrace{\left(\lambda^2+4\right)}_{=0}\underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0}=0$$

karakterisztikus egyenlet $\lambda^2+4=0$; $\lambda^2=-4$; $\lambda_{1,2}=\pm 2i$

homogén általános megoldás $y_h(x)=C_1e^{i2x}+C_2e^{-i2x}$,

ahol $e^{i2x}=cos(2x)+i\,sin(2x)$;

$e^{-i2x}=cos(2x)-i\,sin(2x)$

azaz

$$y_h(x)=C_1\left(cos(2x)+i\,sin(2x)\right)+C_2\left(cos(2x)-i\,sin(2x)\right)$$

Az alapmegoldások (bázisok) tetszőleges lineáris kombináció is megoldás

$$y_h(x)=A_1\underbrace{\left(\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{2}\right)}_{cos(2x)}+A_2\underbrace{\left(\frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2\,i}\right)}_{sin(2x)}.$$

Behelyettesítés után: $y_h(x)=A_1\,cos(2x)+A_2\,sin(2x)$

Partikuláris megoldás: $y_p''+4y_p=3x$; $y_p(x)=C\,x$ (alakban keressük)

behelyettesítés után $4Cx=3x \Rightarrow C=\frac{3}{4}$; $y_p(x)=\frac{3}{4}x$

Peremfeltételek figyelembevétele: $y(x)=y_h(x)+y_p(x)$

$y(0)=1$

$$y(0)=1=A_1\underbrace{cos(2\cdot 0)}_{1}+A_2\underbrace{sin(2\cdot 0)}_{0}+\frac{3}{4}0$$

$$1=A_1\underbrace{cos(2\cdot 0)}_{1} \qquad \Rightarrow A_1=1$$

$y'(0)=4$

$$y'(0)=4=-A_1\underbrace{2\,sin(2\cdot 0)}_{0}+A_2\underbrace{2\,cos(2\cdot 0)}_{2}+\frac{3}{4}$$

$$4=A_2\underbrace{2\,cos(2\cdot 0)}_{2}+\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow A_2=2+\frac{3}{4}=\frac{13}{8}$$

Végül: $$y(x)=y_h(x)+y_p(x)=cos(2x)+\frac{13}{8}sin(2x)+\frac{3}{4}x.$$

1.8. Példa

Adott egy kezdeti érték feladat differenciálegyenlete és a $t=0$ időpontban a függvényérték és első deriváltja:

$$\ddot{y}+9y=3\cos 2t \qquad \text{és} \qquad y(0)=-2; \qquad \dot{y}(0)=3\,.$$

Feladat az adott kezdeti érték feladat megoldásának előállítása.

Megoldás: $y(t)=y_h(t)+y_p(t)$

Homogén megoldás:

homogén de. $\ddot{y}_h+9y_h=0$, megoldás keresése $y_h=e^{\lambda t}$

$$\underbrace{\left(\lambda^2+9\right)}_{=0}\underbrace{e^{\lambda t}}_{\neq 0}=0$$

karakterisztikus egyenlet $\lambda^2+9=0$; $\lambda^2=-9$; $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{-1}\sqrt{9}=\pm i3$

homogén általános megoldás $y_h(t)=C_1e^{i3t}+C_2e^{-i3t}$,

ahol $e^{i3t}=\cos(3t)+i\sin(3t)$;

$e^{-i3t}=\cos(3t)-i\sin(3t)$

azaz $y_h(t)=C_1\left(\cos(3t)+i\sin(3t)\right)+C_2\left(\cos(3t)-i\sin(3t)\right)$

$$e^{i3t}+e^{-i3t}=2\cos(3t) \;\Rightarrow\; \cos(3t)=\frac{e^{i3t}+e^{-i3t}}{2}$$

$$e^{i3t}-e^{-i3t}=2i\sin(3t) \;\Rightarrow\; \sin(3t)=\frac{e^{i3t}-e^{-i3t}}{2\,i}$$

az alapmegoldások (bázisok) tetszőleges lineáris kombináció is megoldás

$$y_h(t)=A_1\underbrace{\left(\frac{e^{i3t}+e^{-i3t}}{2}\right)}_{\cos(3t)}+A_2\underbrace{\left(\frac{e^{i3t}-e^{-i3t}}{2\,i}\right)}_{\sin(3t)}$$

behelyettesítés után $y_h(t)=A_1\cos(3t)+A_2\sin(3t)$

Partikuláris megoldás: $\ddot{y}_p+9y_p=3\cos 2t$; $y_p(t)=C\cos 2t$ (alakban keressük)

a deriváltak: $\dot{y}_p(t)=-C2\sin 2t$; $\ddot{y}_p(t)=-C\,4\cos 2t$ behelyettesítése után

$$-4C\cos 2t+9C\cos 2t=3\cos 2t$$

$$5C=3; \qquad C=\frac{3}{5}; \qquad y_p(t)=\frac{3}{5}\cos 2t$$

Peremfeltételek figyelembevétele: $y(t)=y_h(t)+y_p(t)$

$$y(0)=1 \qquad y(0)=-2=A_1\underbrace{\cos(3\cdot 0)}_{1}+A_2\underbrace{\sin(3\cdot 0)}_{0}+\frac{3}{5}\underbrace{\cos(2\cdot 0)}_{1}$$

$$-2 = A_1 \underbrace{\cos(3\cdot 0)}_{1} + \frac{3}{5} \Rightarrow A_1 = -2 - \frac{3}{5} = -\frac{13}{5}$$

$$\dot{y}(0) = 3$$

$$\dot{y}(0) = 3 = -A_1 \underbrace{3\sin(3\cdot 0)}_{0} + A_2 \underbrace{3\cos(3\cdot 0)}_{2} - 2\frac{3}{5}\cos(2\cdot 0)$$

$$3 = A_2 \underbrace{3\cos(3\cdot 0)}_{3} \qquad \Rightarrow A_2 = 1$$

Végül: $$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = -\frac{13}{5}\cos(3t) + \sin(3t) + \frac{3}{5}\cos 2t\,.$$

Egy rezgéssé alakítások (addiciós tételek):

I. $$y = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t \overset{\text{átalakítás}}{\Leftrightarrow} y = a\cos(\omega t + \varphi)$$

$$y = a\cos(\omega t + \varphi) = \underbrace{a\cos\varphi}_{c_1}\ \cos\omega t \underbrace{-a\sin\varphi}_{c_2}\ \sin\omega t$$

$$(c_1)^2 + (c_2)^2 = a^2(\cos\varphi)^2 + a^2(\sin\varphi)^2 = a^2 \quad\Rightarrow\quad a = \sqrt{(c_1)^2 + (c_2)^2}$$

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{-a\sin\varphi}{a\cos\varphi} = -tg\varphi \quad\Rightarrow\quad \varphi = arctg\left(-\frac{c_2}{c_1}\right)$$

II. $$y = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t \overset{\text{átalakítás}}{\Leftrightarrow} y = a\sin(\omega t + \varphi)$$

$$y = a\sin(\omega t + \varphi) = \underbrace{a\sin\varphi}_{c_1}\ \cos\omega t \underbrace{+a\cos\varphi}_{c_2}\ \sin\omega t$$

$$(c_1)^2 + (c_2)^2 = a^2(\sin\varphi)^2 + a^2(\cos\varphi)^2 = a^2 \quad\Rightarrow\quad a = \sqrt{(c_1)^2 + (c_2)^2}$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{a\sin\varphi}{a\cos\varphi} = tg\varphi \quad\Rightarrow\quad \varphi = arctg\left(\frac{c_1}{c_2}\right)$$

Trigonometrikus azonosságok

$\cos(-x) = \cos(x)$ mert páros függvény.

$\sin(-x) = -\sin(x)$ mert páratlan függvény.

a) $$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

$$e^{i(-x)} = \cos(-x) + i\sin(-x)$$

b) $$e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$$

(a+b) $$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos(x) \quad\Rightarrow\quad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

(a-b) $$e^{ix} - e^{-ix} = 2i\,sin(x) \;\Rightarrow\; sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2\,i}$$

$ch(-x) = ch(x)$ mert páros függvény.

$sh(-x) = -sh(x)$ mert páratlan függvény.

$$ch(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$sh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$ch(i\,x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = cos(x)$$

$$sh(i\,x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = i\,\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = i\,sin(x)$$