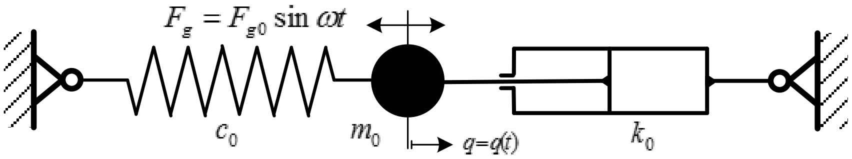
9. MECHANIKA-REZGÉSTAN GYAKORLAT

(kidolgozta: Fehér Lajos, tsz. mérnök.; Tarnai Gábor, mérnök tanár;
Molnár Zoltán, egy. adj., Dr. Nagy Zoltán, egy. adj.)

Egy szabadságfokú rezgőrendszer mozgásegyenletének felírása

9.1. Példa: Gerjesztett, csillapított rezgőrendszer



Adott:

$m_0 = 20\,kg,\quad c_0 = 2\cdot 10^{-2}\,mm/N,\quad k_0 = 600\,Ns/m,\quad F_{g0} = 300\,N,\quad \omega = 100\,rad/s.$

Feladat:

a) A rezgőrendszer mozgásegyenletének felírása.
b) A mozgásegyenlet általános megoldásának előállítása.
c) A rezgőrendszer komplex ellenállásának meghatározása.
d) A rezgőrendszer vektorábrájának megrajzolása.
e) A rezgőrendszer rezonanciagörbéjének megrajzolása.
f) A gerjesztett rezgés legnagyobb kitérítésének meghatározása.

Kidolgozás:

a) A rezgőrendszer mozgásegyenletének felírása:

A mozgásegyenlet: $m_0\ddot{z} + k_0\dot{z} + \dfrac{1}{c_0}z = F_{g0}e^{i\omega t}$.

A komplex kitérés: $z(t) = x(t) + iy(t)$

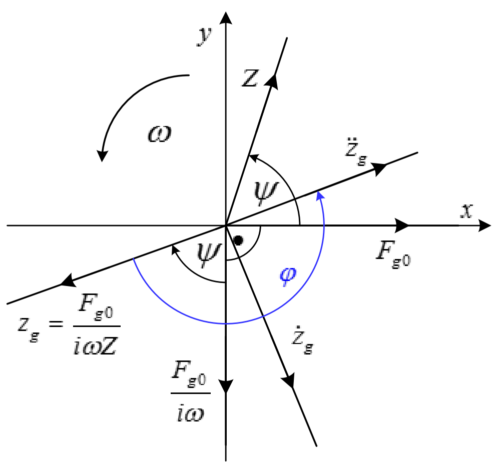
b) A mozgásegyenlet általános megoldásának előállítása:

$$z(t) = z_h(t) + z_g(t) = \underbrace{Ae^{-\beta t}e^{i\nu t}}_{\substack{lecseng\H{o}\\ r\acute{e}sz}} + \frac{F_{g0}}{i\omega Z}e^{i\omega t}.$$

c) A rezgőrendszer komplex ellenállásának meghatározása:

$$Z = k_0 + i(\omega m_0 - \frac{1}{c_0\omega}) = 600 + i(100\cdot 20 - \frac{1}{2\cdot 100}) = 600 + i1500\left[\frac{Ns}{m}\right].$$

d) A rezgőrendszer vektorábrájának megrajzolása:



$$z_g(t=0) = \frac{F_{g0}}{i\omega Z},$$
$$\dot{z}_g(t=0) = i\omega z_g(t=0),$$
$$\dot{z}_g(t=0) = i\omega z_g(t=0),$$
$$tg\psi = \frac{\omega m_0 - \dfrac{1}{c_0\omega}}{k_0} = \frac{1500}{600} = 2,5,$$
$$\psi = 68,2^0,\quad \varphi = \frac{\pi}{2} + \psi = 158,2^0.$$

e) A rezgőrendszer rezonanciagörbéjének megrajzolása.

$$\frac{y_{\max}}{y_{st}}=\frac{1}{\sqrt{(1-\xi^2)^2+4\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}\xi^2}},\qquad \xi=\frac{\omega}{\alpha},$$

$$\alpha^2=\frac{1}{m_0c_0}=\frac{1}{2\cdot 10^{-5}\cdot 20}=\frac{10^4}{4}=2500\,\frac{rad^2}{s^2},\quad\Rightarrow\quad \alpha=50\,\frac{rad}{s},$$

$$\beta=\frac{k_0}{2m_0}=\frac{600}{40}=15\frac{1}{s}.$$

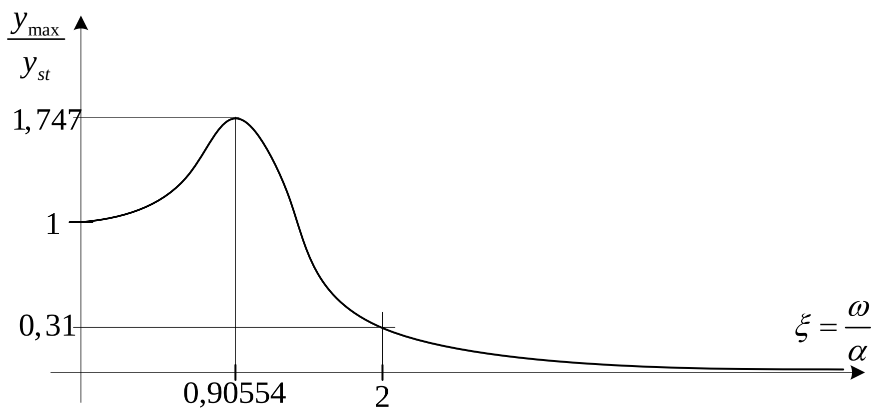
Rezonancia (a gyökjel alatti rész minimuma):

$$\xi_{rez}=\sqrt{1-2\frac{\beta^2}{\alpha^2}}=\sqrt{1-2\frac{15^2}{50^2}}=\sqrt{1-0{,}18}=0{,}90554$$

$$\frac{y_{\max}}{y_{st}}(\xi=0{,}90554)=\frac{1}{\sqrt{(1-0{,}90554^2)^2+4\dfrac{15^2}{50^2}0{,}90554^2}}=\frac{1}{\sqrt{0{,}032399+0{,}295201}}=$$

$$=\frac{1}{0{,}572364}=1{,}747.$$

$$\frac{y_{\max}}{y_{st}}(\xi=1)=\frac{1}{\sqrt{4\dfrac{15^2}{50^2}}}=\frac{50}{2\cdot 15}=\frac{5}{3}=1{,}67.$$



f) A gerjesztett rezgés legnagyobb kitérítésének meghatározása.

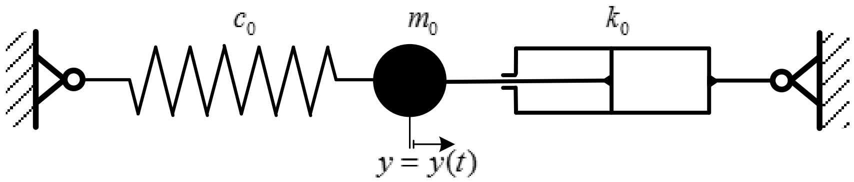
$$\xi_0=\frac{\omega}{\alpha}=\frac{100}{50}=2,$$

$$y_{st}=c_0F_{g0}=2\cdot 10^{-5}\cdot 300=6\cdot 10^{-3}\,m=6\,mm,$$

$$y_{\max}=\frac{y_{st}}{\sqrt{(1-\xi_0^{\,2})^2+4\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}\xi_0^{\,2}}}=\frac{6}{\sqrt{(1-2^2)^2+4\dfrac{15^2}{50^2}2^2}}=\frac{6}{\sqrt{10{,}54}}=1{,}857\,mm.$$

$$\frac{y_{\max}}{y_{st}}(\xi_0=2)=\frac{1{,}857}{6}=0{,}31.$$

9.2. Példa: Szabad, csillapított rezgőrendszer



Adott:

$m_0 = 4\,kg, \quad c_0 = 10^{-4}\,m/N, \quad k_0 = 320\,Ns/m, \quad y_0 = 4\,mm, \quad v_0 = 40\,mm/s.$

Feladat:

a) A rezgőrendszer körfrekvenciájának meghatározása.
b) Kialakul-e rezgés?
c) A mozgásegyenlet megoldásának előállítása.
d) A logaritmikus dekrementum meghatározása.
e) A kitérés és a sebesség közötti fázisszög meghatározása.

Kidolgozás:

a) A rezgőrendszer körfrekvenciájának meghatározása:

$$\alpha^2 = \frac{1}{m_0 c_0} = \frac{1}{10^{-4}\cdot 4} = \frac{10^4}{4} = 2500\,\frac{rad^2}{s^2}, \quad \Rightarrow \quad \alpha = 50\,\frac{rad}{s},$$

$$\beta = \frac{k_0}{2m_0} = \frac{320}{8} = 40\,\frac{1}{s}\left[=\frac{Ns}{mkg}\right],$$

$$\nu = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{2500 - 1600} = 30\,rad/s.$$

b) Kialakul-e rezgés?

$\alpha > \beta \quad \Rightarrow$ kialakul a rezgés.

c) A mozgásegyenlet megoldásának előállítása:

$$z(t) = Ae^{(-\beta + i\nu)t} = (a+ib)e^{(-\beta+i\nu)t},$$

$$\dot{z}(t) = A(-\beta + i\nu)e^{(-\beta+i\nu)t} = (a+ib)(-\beta+i\nu)e^{(-\beta+i\nu)t},$$

$$z(t=0) = a + ib,$$

$$\dot{z}(t=0) = (a+ib)(-\beta+i\nu) = -(a\beta + b\nu) + i(a\nu - b\beta),$$

Kezdeti feltételek: $t = 0$

$$\mathrm{Im}\left[z(0)\right] = b = y_0 \quad \Rightarrow b = 4\,mm,$$

$$\mathrm{Im}\left[\dot{z}(0)\right] = (a\nu - b\beta) = v_0 \quad \Rightarrow a = \frac{v_0 + b\beta}{\nu} = \frac{40 + 4\cdot 40}{30} = 6,67\,mm.$$

A mozgásegyenlet:

$$z(t) = Ae^{(-\beta+i\nu)t} = (a+ib)e^{-\beta t}e^{i\nu t} = e^{-\beta t}(a+ib)(\cos\nu t + i\sin\nu t) =$$

$$= e^{-\beta t}\left[(a\cos\nu t - b\sin\nu t) + i(b\cos\nu t + a\sin\nu t)\right],$$

$$y(t) = \mathrm{Im}\,z(t) = e^{-\beta t}(b\cos\nu t + a\sin\nu t),$$

$$y(t) = (4\cos 30t + 6,67\sin 30t)e^{-40t}.$$

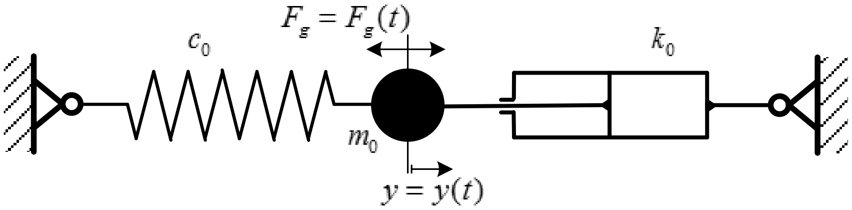
d) A logaritmikus dekrementum meghatározása:

$$\Lambda = \ln\frac{y_1}{y_2} = 2\pi\frac{\beta}{\nu} = 6,28\frac{40}{30} = 8,38.$$

e) A kitérés és a sebesség közötti fázisszög meghatározása:

$$\Phi = \frac{\pi}{2} + \vartheta, \quad tg\vartheta = \frac{\beta}{\nu} = \frac{40}{30} = 1,32, \quad \Rightarrow \quad \vartheta \cong 53,13^0, \quad \Phi = 143,13^0.$$

9.3. Példa: Gerjesztett, csillapított rezgőrendszer



Adott:

$m_0 = 2\ kg, \quad c_0 = 2\cdot 10^{-4}\ m/N, \quad k_0 = 160\ Ns/m, \quad F_{g0} = 10\ N, \quad \omega = 100\ rad/s.$

Feladat:

a) A rezgőrendszer mozgásegyenletének felírása.
b) A mozgásegyenlet általános megoldásának előállítása.
c) A gerjesztett rezgés legnagyobb kitérésének meghatározása.
d) A rezgőrendszer rezonanciagörbéjének megrajzolása.

Kidolgozás:

a) A rezgőrendszer mozgásegyenletének felírása:

A mozgásegyenlet: $m_0\ddot{z} + k_0\dot{z} + \dfrac{1}{c_0} z = F_{g0} e^{i\omega t}$.

A komplex kitérés: $z(t) = x(t) + iy(t)$

b) A mozgásegyenlet általános megoldásának előállítása:

$$z(t) = z_h(t) + z_g(t) = \underbrace{Ae^{-\beta t} e^{i\nu t}}_{\substack{lecseng\H{o}\\ r\acute{e}sz}} + Be^{i\omega t} \approx Be^{i\omega t}, \quad \Rightarrow \dot{z}_g = i\omega z_g, \quad \ddot{z}_g = i\omega \dot{z}_g = -\omega^2 z_g .$$

Behelyettesítve a mozgásegyenletbe:

$$\left(-m_0\omega^2 + i\omega k_r + \frac{1}{c_0}\right) Be^{i\omega t} = F_{g0} e^{i\omega t} \ \Rightarrow\ B = \frac{F_{g0}}{\left(i\omega k_r + \dfrac{1}{c_0} - m_0\omega^2\right)} .$$

c) A gerjesztett rezgés legnagyobb kitérésének meghatározása:

$$y_{\max} = |B| = \frac{F_{g0}}{\sqrt{\omega^2 k_0^2 + \left(m_0\omega^2 - \dfrac{1}{c_0}\right)^2}} =$$

$$= \frac{10}{\sqrt{100^2\cdot 160^2 + \left(2\cdot 100^2 - \dfrac{1}{2\cdot 10^{-4}}\right)^2}} = 0,456\ mm .$$

d) A rezgőrendszer rezonanciagörbéjének megrajzolása:

$$y_{st} = c_0 F_{g0} = 2\cdot 10^{-4}\cdot 10 = 2\ mm,$$

$$y_{\max}\big|_{\alpha=\omega} = \frac{F_{g0}}{\omega k_0} = \frac{10}{100\cdot 160} = \frac{10^{-1}}{160} = 0,625\ mm,$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{m_0 c_0}} = \sqrt{\frac{10^4}{4}} = 50\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$