

## VIII. előadás

### 4. Izoparametrikus elemcsalád

A kereskedelmi szoftverekben leggyakrabban ún. izoparametrikus elemeket alkalmaznak. Az izoparametrikus jelző azt jelenti, hogy a geometria leképezésére alkalmazott (csomóponti) paraméterek száma az ismeretlen mező közelítésére felvett paraméterek számával. Ez azt is jelenti, hogy ugyanazon alakfüggvényeket alkalmazzuk a geometria leképezésére, mint az ismeretlen mező közelítésére. Az elem típus széleskörű elterjedése elsősorban annak köszönhető, hogy az elem merevségi mátrixának és tehervektorának előállításakor az integrálás könnyen elvégezhető. Egyaránt alkalmazható egy-, két-, és háromdimenziós feladatokra.

A valóságban jelentkező mechanikai feladatok általában térbeli jellegűek, azonban a mechanikai problémák egy része bizonyos feltételek esetén visszavezethetőek egy dimenziós (1D-s) illetve síkbeli 2D-s feladatokra. A 2D-s feladatok közül az alábbi három formalizmusát tekintve hasonlóan tárgyalható:

- ❖ általánosított síkfeszültségi állapotú feladat, vagyis tárcsafeladat,
- ❖ síkalakváltozási feladat,
- ❖ tengelyszimmetrikus feladat.

Ezen fejezetben az 1D-s és 2D-s elemekkel foglalkozunk, a 3D-s elemek származtatása az előzőekhez nagyon hasonlóan történik.

**Hagyományos és izoparametrikus végelemek összehasonlítása: avagy milyen érvek szólnak az izoparametrikus végelemek alkalmazása mellett?**

<b>Hagyományos elemek jellemzői:</b>	<b>Izoparametrikus elemek jellemzői:</b>
➤ Az elemhatár egyenes vonal vagy sík felület.	Az elemhatár görbe vonal, görbült felület is lehet.
➤ Az integrálás elvégzésének megkönnyítésére elemhez kötött, helyi koordináta-rendszert veszünk fel.	Az elem geometriájának leírását leképezéssel végezzük el az elemhez illeszkedő „természetes” $\xi, \eta, \zeta$ KR-t veszünk fel.
➤ Az elmozdulás mezőt a helyi koordináta-rendszerben hatványsorral közelítjük (a hatványsor együtthatóinak nincs fizikai tartalma).	Az elmozdulás mezőket elemenként a globális $x, y, z$ KR-ben közelítjük.
➤ Az együtthatókat kifejezzük a helyi koordináta-rendszerben vett csomóponti paraméterekkel (az elemek szintjén egyenletrendszert kell megoldani).	Az elmozdulás mezők közelítésére a leképezésnél használt függvényeket alkalmazzuk.
➤ Az elem merevségi mátrixát és a csomópont terhelésvektorát helyi koordináta-rendszerben állítjuk elő (az integrálás zárt alakban még helyi KR-ben, egyenes/sík oldalak esetén sem egyszerű).	A közelítő függvényekben közvetlenül a globális KR-ben vett csomóponti paraméterek jelennek meg.
➤ Az elemek összekapcsolásához a merevségi mátrixokat és a csomóponti terhelésvektorokat egy globális KR-be kell transzformálni.	Az integrálást a természetes $\xi, \eta, \zeta$ változók szerint végezzük el egy kocka/négyzet tartományra.
<b>Célkitűzés:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Ne kelljen elemenként egyenletrendszert megoldani.</li> <li>➤ Ne kelljen koordináta-transzformációt végezni.</li> <li>➤ Legyen egyszerű az integrálás.</li> </ul>	Az integrálást nem zárt alakban, hanem numerikusan végezzük el.

## 4.1. Elemek csoportosítása

### a) Kiterjedésük szerint

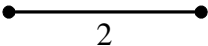
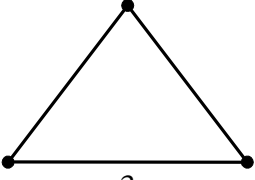
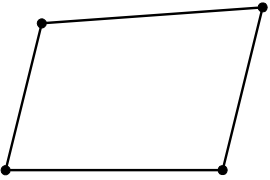

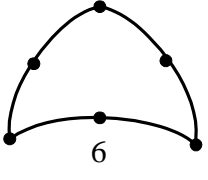
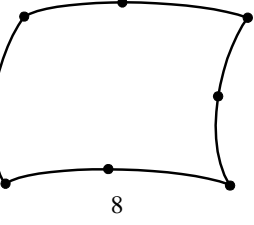

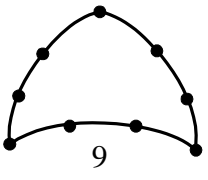
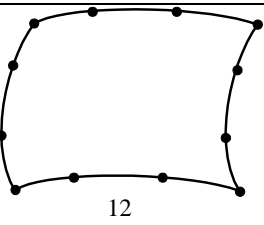
A korábban említettek szerint -bizonyos feltételek teljesülése esetén- lehetőség van a 3D-s esetek síkbeli (síkfeszültség, síkalakváltozás és tengelyszimmetrikus) vizsgálatára, vagy egyszerűsített térbeli, ugyanakkor 1 vagy 2 dimenziós topológiával rendelkező (rúd, héj, stb.) modellek használatára. Mivel az 1D-s, illetve 2D-s modellek elemszáma jóval kisebb, mint ugyanazon szerkezet 3D-s modelljének, ezért a feladat megoldási ideje sokkal kevesebb, valamint a szimuláció beállítása is egyszerűbb. Az analízis során használt elemek a

geometriától függően kiterjedésük szerint a következők lehetnek: dimenzió nélküli pont, 2D-s felületi vagy 3D-s térfogati elemek.

- ❖ A pont elemeket (point element) egy csomópont (node) definiál (például, mint tömegpont vagy csomópont-felület kontaktelem).
- ❖ A vonal elemeket (line element) két vagy három csomópontot összekötő egyenes, vagy ív definiál. A vonalelem lehet rúd (rod), gerenda (beam), cső (pipe) és tengelyszimmetrikus héj (axisymmetric shell).
- ❖ A felületelemek háromszög (triangular), vagy négyszög (quadrilateral) alakúak, illetve 2D-s sík modell (2D síkfeszültség, síkalakváltozás és tengelyszimmetrikus), vagy héj (shell) elemek lehetnek.
- ❖ A térfogati elemek tetraéder (tetrahedral), gúla (piramid), prizma (wedge) vagy téglalap (brick, hexahedron) alakú, 3D-s szilárd test (3D-s solid) elemek lehetnek.
- ❖ A peremfeltételek definiálására (kontaktok, rugó elemek, tömegpont, stb.) speciális tulajdonságokkal rendelkező elemeket használunk.

Az 1D-s elemekkel természetesen síkbeli és térbeli szerkezetek is vizsgálhatók, ugyanúgy, ahogy a 2D-s elemek lehetnek héjelemek is, amelyek alkalmasak térbeli lemez-, illetve héjszerkezetek vizsgálatára is. A tetrahedron és hexahedron görög kifejezések rendre a megfelelő geometriai alakzat oldallapjainak számát jelentik, azaz tetra=4 és hexa=6.

A következő táblázatok a leggyakrabban használt izoparametrikus elemeket foglalják össze tekintettel a bemutatott csoportosítási lehetőségekre.

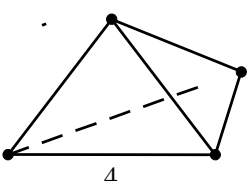
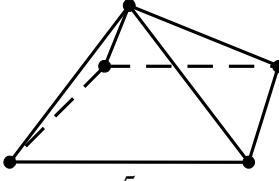
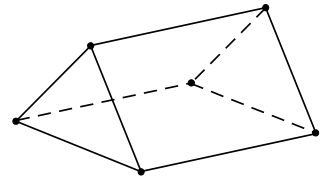
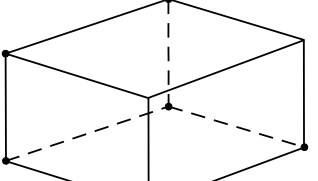
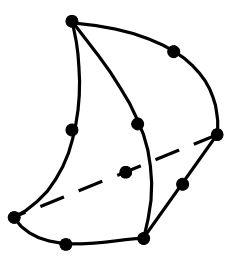
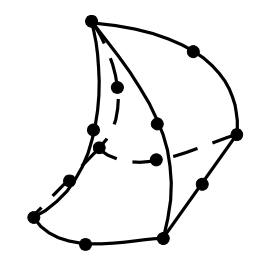
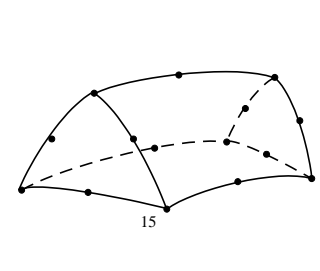
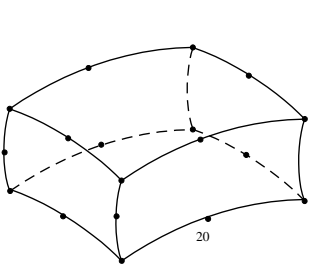
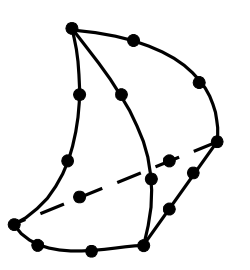
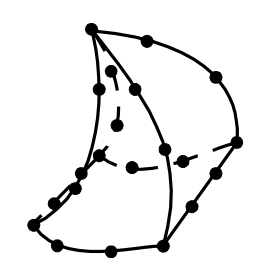
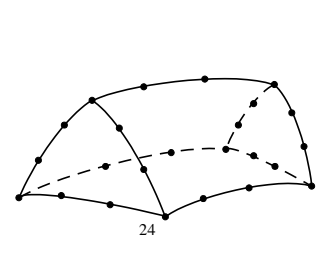
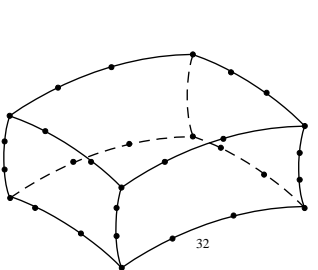
	1D (vonal)	2D (felület)	2 DOF/Node
	Vonal (Line)	Háromszög (Triangle)	Négyszög (Quadrilateral)
Lineáris (Linear)			
Másodfokú (Quadratic)			
Harmadfokú (Cubic)			

1. táblázat: 1D-s, 2D-s elemek

## b) Fokszámuk szerint

A végelem szimuláció során alkalmazott elemek geometriájuk és interpolációs függvényük fokszáma szerint lineárisak (linear, first-order), másodfokúak (second-order, quadratic, parabolic) vagy harmadfokúak (third-order, cubic) lehetnek. Azaz egy lineáris háromszög elem (triangle) 3 csomóponttal és 3 egyenes éllel definiált. A magasabb rendű háromszög elem esetén a 3 csúcsonál levő csomóponton felül a görbe vonalú éleken köztes csomópontok is találhatóak.

Lineáris vagy magasabb rendű elemek választásakor a következőkre kell ügyelni: azonos hálósűrűség mellett a magasabb rendű elemek adnak pontosabb eredményt, mivel jobb matematikai közelítést használnak, és az íves élekkel/felületekkel határolt geometriát pontosabban követik, ugyanakkor nagyobb teljesítményt, több számolási időt igényelnek.

3D (térfogat) 3 DOF/Node				
	Tetraéder (Tetrahedron)	Gúla (Piramid)	Prizma(Pentahedral, Prism, Wedge)	Tégla (Hexahedron)
Lineáris (Linear)	 4	 5	 6	 8
Másodfo kú (Quadrat ic)	 10	 13	 15	 20
Harmadf okú (Cubic)	 16	 21	 24	 32

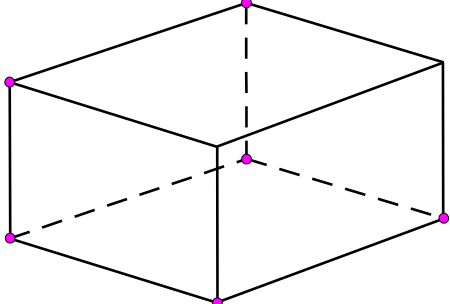
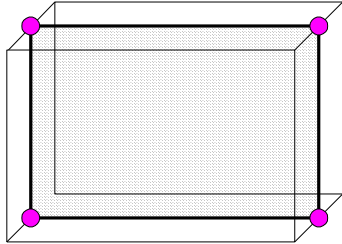
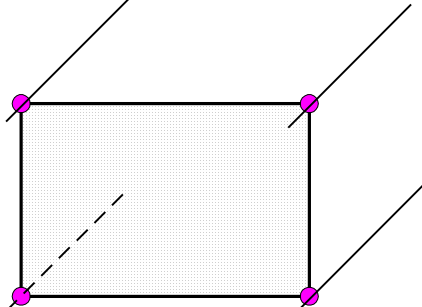
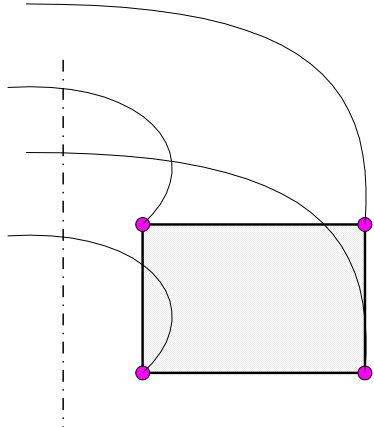
2. táblázat: 3D-s elemek

## c) Szabadságfokuk szerint

Az elemek szabadságfoka határozza meg, hogy melyik elem milyen típusú analízisre alkalmas (pl.: szerkezeti, hő, áramlástani, elektromos, mágneses analízisre). Egy térbeli szerkezeti analízisben használt elem csomópontjainak 3 szabadságfoka van  $(u_x, u_y, u_z)$ , viszont egy hőtani szimulációban csak egy, a hőmérséklet. A megfelelő szabadságfokú elem típus

választása jellemzi a modell választ. Az elemek fölösleges szabadságfoka növeli a szimuláció memóriafoglalását és futási idejét. Hasonlóan a szükségtelen elemtulajdonságokkal rendelkező elem (pl.: plasztikus tulajdonságok egy rugalmas szimulációban) alkalmazása szintén növeli a futásidőt.

Általános esetben az elemek koordináta-rendszeire, bemenő adataira (csomópontok, szabadságfok, anyagtulajdonságok, terhelések, stb..) és a szimuláció eredményeire (a csomópontok elmozdulása, feszültség, reakcióerő, stb.) oszthatók.

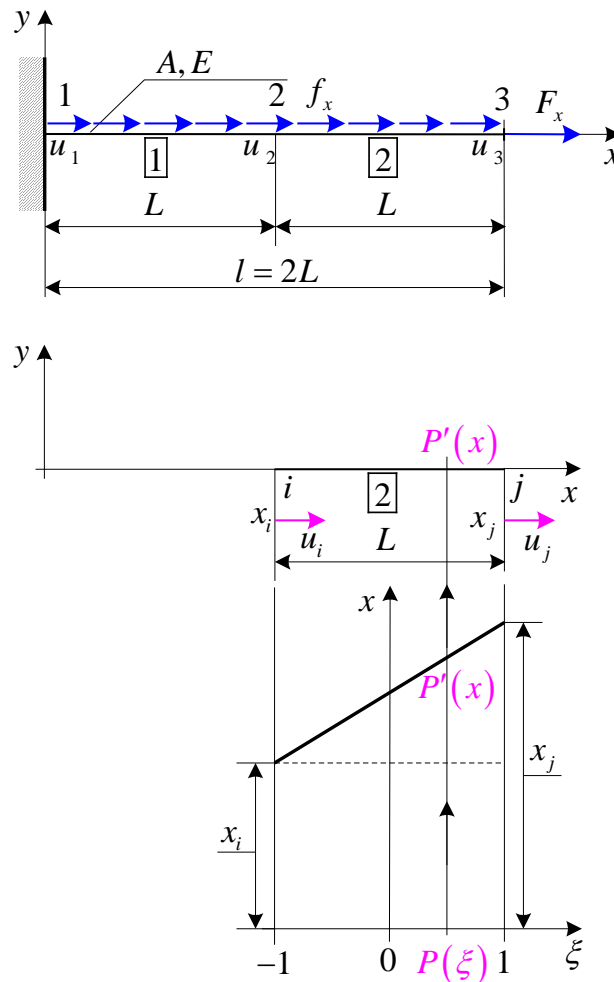
<p><b>3D (Solid)</b>  <math>(u_x, u_y, u_z)</math></p>	
<p><b>Sík feszültség (Plane Stress)</b>  <math>(u_x, u_y)</math>          Általánosított síkfeszültség állapot (ÁSF) vagy tárcsafeladat: Olyan test, amelynek egyik mérete lényegesen nagyobb, mint a másik kettő, értelmezhető középsíkkal rendelkezik, és a terhelés vastagság menti eredője ezen középsíkba esik.</p>	
<p><b>Sík alakváltozás (Plane Strain) (SA)</b>  <math>(u_x, u_y)</math>          Általánosított sík alakváltozási állapot (SA): a vizsgált test rendelkezik egy kitüntetett síkkal, amellyel párhuzamos összes többi sík alakváltozása azonos és a síkok távolsága nem változik.</p>	
<p><b>Tengelyszimmetrikus (Axisymmetric)</b>  <math>(u_x, u_y)</math>          A forgásszimmetrikus test geometriája és terhelési is forgásszimmetrikus, bármelyik meridián metszetében ugyanolyan alakváltozási és feszültségi állapot ébred.</p>	

3. táblázat: Gyakori mechanikai elem típusok és a csomópontok szabadságfoka

## 4.2.1D-s húzott-nyomott rúdelem

A végelem programokban a húzott-nyomott rúdelemet angolul rod vagy truss elemnek nevezzük.

Tekintsük ismét az V. előadásban bemutatott húzott-nyomott rúdfeladatot.



1. ábra: 1D-s elem  $\xi \Leftrightarrow x$  leképezése

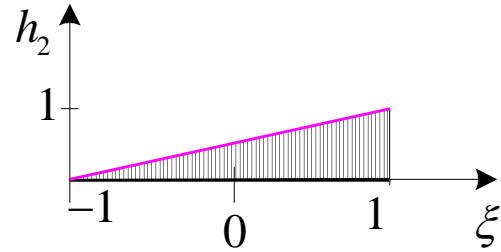
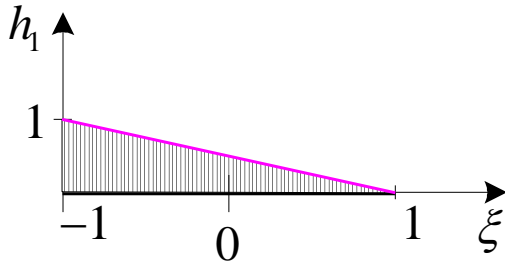
Tekintsük a 2-s végelemet, amely általános,  $i, j$  csomópont párral adott. Az 1. ábrán a rúdelemhez egy lokális ún. természetes  $\xi$  koordinátatengelyt kötöttünk. Keressük a természetes  $\xi$  koordinátájú pont és a hozzátartozó pont globális  $x$  koordinátája közötti kapcsolat, azaz a leképező függvényt. A  $\xi$  tengelyre merőlegesen felmérjük a csomópontok  $x$  koordinátáit, majd egyenessel összekötve megkapjuk a leképezés függvény képét. A  $\xi$  tengelyen egy tetszőleges  $P(\xi)$  pontból függőlegesen felvetítve megkapjuk a hozzárendelt  $P'(\xi)$  képet vagyis azt az  $x$ -t, amely az adott  $\xi$ -hez tartozik.

A leképező függvény meredeksége és  $x$  tengellyel vett metszéspontja alapján könnyen felírhatjuk az egyenes egyenletét, amelyet utána célszerűen átrendezünk:

$$x(\xi) = \frac{x_j - x_i}{2} \xi + \frac{x_j + x_i}{2} = \frac{1}{2}(1 - \xi)x_i + \frac{1}{2}(1 + \xi)x_j$$

, ahol a csomóponti koordináták együtthatói a

$$\left. \begin{aligned} h_1(\xi) &= \frac{1}{2}(1-\xi)x_i \\ h_2(\xi) &= \frac{1}{2}(1+\xi)x_j \end{aligned} \right\} \text{ az ún. alakfüggvényeknek.}$$



Az elmozdulás mezőt ezen két alakfüggvény és az  $u_i, u_j$  csomóponti elmozdulások segítségével fogjuk közelíteni:

$$u^e(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi)u_i + \frac{1}{2}(1+\xi)u_j = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) & \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \underline{\underline{H}}^e(\xi) \underline{\underline{q}}^e$$

Az elmozdulás ismeretében az alakváltozás előállítható a láncszabály alkalmazásával:

$$\varepsilon_x^e(\xi) = \frac{du^e(\xi)}{dx} = \frac{du^e(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx},$$

ahol az első tag  $\xi$  szerinti deriválása

$$u^e(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi)u_i + \frac{1}{2}(1+\xi)u_j = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) & \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \underline{\underline{H}}^e(\xi) \underline{\underline{q}}^e \text{ behelyettesítése után}$$

végrehajtható, a második közvetlenül nem, de az inverze

$$x(\xi) = \frac{x_j - x_i}{2}\xi + \frac{x_j + x_i}{2} = \frac{1}{2}(1-\xi)x_i + \frac{1}{2}(1+\xi)x_j \text{ ismeretében képezhető:}$$

$$\frac{dx(\xi)}{d\xi} = \frac{x_j - x_i}{2} = \frac{L}{2}.$$

Ezután visszahelyettesítjük

$$u^e(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi)u_i + \frac{1}{2}(1+\xi)u_j = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) & \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \underline{\underline{H}}^e(\xi) \underline{\underline{q}}^e \text{ reciprokát}$$

$$\frac{dx(\xi)}{d\xi} = \frac{x_j - x_i}{2} = \frac{L}{2}$$

a következő összefüggésbe:  $\varepsilon_x^e(\xi) = \frac{du^e(\xi)}{dx} = \frac{du^e(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx}$ , így

$$\varepsilon_x^e(\xi) = \frac{2}{L} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i & u_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_x^e(\xi) = E \varepsilon_x^e(\xi) = E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}$$

Célunk, hogy előállítsuk az elem potenciális energiáját

$$\Pi_p^e(u_i, u_j) = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{du^e}{dx} \right) AE \left( \frac{du^e}{dx} \right) dx - \int_0^L u^e p_z d\xi,$$

ahol az első integrálból származtatható az elem merevségi mátrixa, a másodikból az elem tehervektora. Az integrálást most nem  $x$  szerint hanem  $\xi$  szerint hajtjuk végre. A  $dx$

előállításához felhasználjuk  $\frac{dx(\xi)}{d\xi} = \frac{x_j - x_i}{2} = \frac{L}{2}$ .

A merevségi mátrix előállítása:

$$\frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{du^e}{dx} \right) AE \left( \frac{du^e}{dx} \right) dx = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_i & u_j \end{bmatrix} \underbrace{\int_{\xi=-1}^1 \begin{bmatrix} -1 \\ L \\ 1 \\ L \end{bmatrix} AE \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} \frac{L}{2} d\xi}_{\underline{\underline{K}}^e} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix},$$

ahol  $\underline{\underline{K}}^e = \int_{\xi=-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{AE}{2L} & -\frac{AE}{2L} \\ -\frac{AE}{2L} & \frac{AE}{2L} \end{bmatrix} d\xi = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix}$

Konstans megoszló terhelést feltételezve a tehervektor származtatása:

$$\int_0^L u^e f_x dx = \begin{bmatrix} u_i & u_j \end{bmatrix} \underbrace{\int_{\xi=-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) \\ \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} f_x \frac{L}{2} d\xi}_{\underline{\underline{f}}^e} = \begin{bmatrix} u_i & u_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{f_x L}{2} \\ \frac{f_x L}{2} \end{bmatrix},$$

ahol az egyes elemek integráljai:

$$\int_{\xi=-1}^1 \frac{1}{2}(1-\xi) f_x \frac{L}{2} d\xi = \frac{f_x L}{4} [\xi - \xi^2]_{-1}^1 = \frac{f_x L}{2}$$

$$\int_{\xi=-1}^1 \frac{1}{2}(1+\xi) f_x \frac{L}{2} d\xi = \frac{f_x L}{4} [\xi + \xi^2]_{-1}^1 = \frac{f_x L}{2}$$

Végül az elem teljes potenciális energiája:

$$\Pi_p^e(u_i, u_j) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_i & u_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_i & u_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{f_x L}{2} \\ \frac{f_x L}{2} \end{bmatrix}.$$

A további lépések azonosan hajthatók végre, mint az V. előadásban.