SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM

ALKALMAZOTT MECHANIKA TANSZÉK

10. MECHANIKA-VÉGESELEM MÓDSZER ELŐADÁS
(kidolgozta: Szüle Veronika, egy. ts.)

IX. előadás

A végeselem programrendszer általános felépítése (ismétlés)

A végeselem analízis a fizikai szerkezet matematika modelljét testesíti meg, mely tartalmaz minden olyan jellemzőt (elemek, peremfeltételek, anyagminőségek, stb.), mely a fizikai valóságot modellezi. A végeselem módszer elve a geometria véges elemekre való felosztása (úgynevezett végeselem háló készítése), az elemeket összekötő csomópontokra ható terhelések és ezek által létrejött kimenő mennyiségek közötti összefüggést meghatározó egyenletrendszer megoldása. A végeselem analízis három könnyen szétválasztható modulra bontható, ezek az előkészítés (preprocess), megoldás (process), valamint a kiértékelés (postprocess). Azonban ezeket a lépéseket a döntési szakasz előzi meg.

1. **Döntési szakasz**: itt szükséges megállapítani a probléma típusát, majd ennek megfelelően kijelölni a megoldáshoz használni kívánt módszert, ami az alábbi lépéseket tartalmazza:

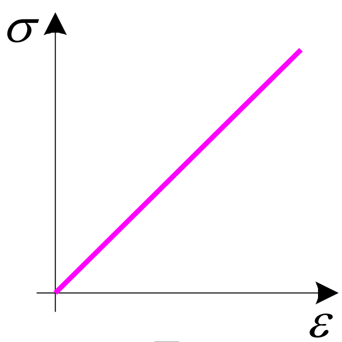
   - Az adott fizikai probléma típusa (mechanikai, hőtani, stb.),
   - Az elemzés fajtája (statikai, dinamikai, stb.),
   - Lineáris vagy nemlineáris közelítéssel kívánjuk vizsgálni a valóságot,
   - Az alkalmazni kívánt modell típusának megválasztása (3D-s testmodell, héj, rúd, stb.,
   - Szimmetria követelmények teljesülése (fél, negyed modell, tengelyszimmetria, ciklikusság, stb.),
   - Alkalmazott elemtípusok kiválasztása (háromszög, négyszög, stb),
   - Átlagos elem-élhossz (hálósűrűség), valamint helyenkénti hálósűrítés (részletesség) meghatározása,
   - Peremfeltételek helyes megadása (bizonyos alkatrészek kényszerekkel való helyettesítése).

2. **Előkészítés**: a végeselem modell szimulációra való előkészítése, amely az következő lépésekből áll:

   - Anyagi tulajdonságok (anyagjellemzők) definiálása, ahol meg kell adni a szerkezet vagy a szerkezet egyes részeinek (vonal, felület, vagy akár véges elem) anyagait, anyagjellemzőit.
   - Geometria létrehozása (ez történhet a szoftver által nyújtott eszközökkel, vagy importálható CAD-fájlokból) pontok, vonalak, felületek, térfogatok segítségével.
   - Végeselem háló generálása (elemtípusok, elemméretek, elemkritériumok megadása), az alábbi szempontok figyelembevételével:
     - a hálót sűríteni kell azokon a tartományokon, ahol jelentősebb változás várható a mechanikai mennyiségeket tekintve (például feszültség),
     - a koncentrált erők vagy nyomatékok támadáspontjára legyen csomópont felvéve,
     - a megtámasztási helyekre is kell csomópontnak esnie.
   - Peremfeltételek és terhelések (megfogások, megtámasztások, alkatrészkapcsolatok, kényszerek, erők, koncentrált vagy megoszló erők, nyomatékok) megadása.

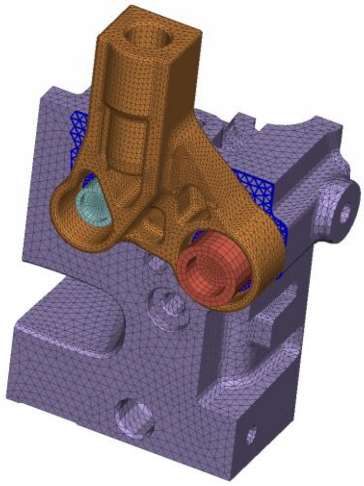
Geometria modellezése

Anyagjellemzők megadása

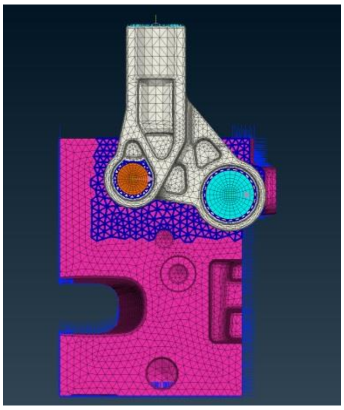


$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Végeselem felosztás generálása

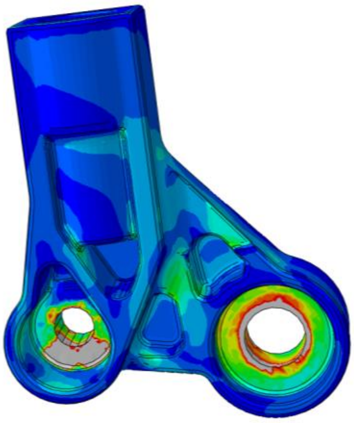


Kinematikai és dinamikai peremfeltételek definiálása



3. **Megoldás**: a végeselem-számítási rész, ahol a következő műveleteket kell elvégezni:

- a merevségi mátrixok és terhelésvektorok előállítása (először az egyes elemekre, majd az egész szerkezetre),
- csomóponti terhelések és kinematikai peremfeltételek figyelembe vétele,
- a szerkezet lineáris algebrai egyenletrendszerének megoldása, amelynek segítségével meghatározásra kerülnek a szerkezet csomóponti elmozdulásai,

Megoldás	Merevségi mátrixok, terhelésvektorok előállítása, egyenletrendszer megoldása, elmozdulás mező számítása
Kiértékelés: eredmények megjelenítése, elmozdulások, reakcióerők, alakváltozások, feszültségek	

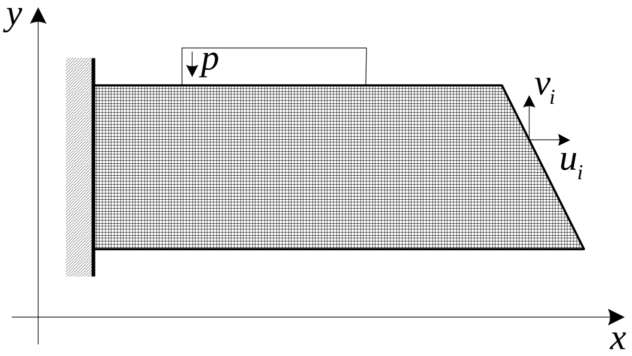
3. **Kiértékelés:** a felhasználó eldönti, hogy a szerkezet szilárdságtani állapotai közül mit vizsgál részletesen és mit szemléltet. Így lehetőség van például:
   - A szerkezet pontjainak elmozdulását (deformált alak) megtekinteni vagy a
   - feszültségeket (az egyes feszültség-koordinátákat külön-külön, vagy a redukált feszültségeket) kiértékelni.

   A mai fejlett végeselem programok rengeteg segítséget nyújtanak a munka ezen szakaszában (például maximális feszültség helyének, értékének kijelzése, alakváltozás animációként való megjelenítése).

   - Az eredmény modellen való szemléltetése (például különböző színek segítségével)
   - Deformációk, alakváltozások megjelenítése, animációként való ábrázolása.
   - Maximum és minimum értékek, valamint ezek helyének bemutatása.

4.3.Általánosított síkfeszültségi állapot

Az általánosított sík feszültségi állapotot (ÁSF), szokás tárcsafeladatnak, illetve végeselem programokban „Plane stress problem”-nek nevezni.
Tárcsa: olyan test, amelynek egyik mérete lényegesen kisebb, mint a másik kettő, értelmezhető középsík és a terhelés vastagság menti eredője a középsíkba esik.



1. ábra: Általánosított síkfeszültségi feladat

A tárcsa saját síkjában terhelt lemez. A formulákban alkalmazott feszültségek valójában falvastagság mentén képzett átlagértékek, de ezt külön nem jelöljük.
A feszültségi tenzor és a független elemeiből képzett feszültségi vektor:

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}.$$

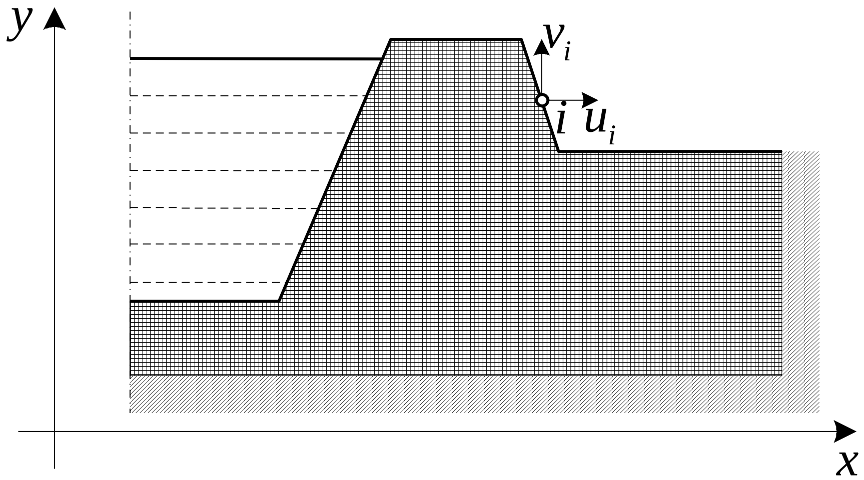
Hasonló alakot ölt az alakváltozási tenzor és a független elemekből képzett alakváltozási vektor:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \ \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}.$$

Az alakváltozási vektorban ε_z mennyiséget azért nem tüntettük fel, mert feszültségi párja $\sigma_z = 0$, és így az alakváltozási energiában nem játszik szerepet.
A feladat jellemzője, hogy a végeselem háló csomópontjaiban csak x, y irányú u_i, v_i elmozdulás ismeretlen paraméterekről beszélünk, valamint ennek megfelelő F_{xi}, F_{yi} erők működtethetők.

4.4.Sík alakváltozási állapot

Az általánosított sík alakváltozási állapot (SA) kifejezést a végeselem programokban „Plane strain problem”-nek nevezik.
Síkalakváltozásról beszélünk, ha a vizsgált testnek van egy kitüntetett síkja, amellyel párhuzamos valamennyi sík alakváltozása azonos és a síkok távolsága nem változik.



2. ábra: Egy folyómentén épített gát keresztmetszete

Feltételezéseink szerint a keresztmetszet síkjára merőlegesen végtelen hosszúnak tekintett test bármelyik keresztmetszetében ugyanolyan alakváltozási és feszültségi állapot ébred. Az ilyen testek mechanikai modellje egységnyi vastagságú metszet. Ebben az esetben az alakváltozási tenzor és a független elemekből képzett alakváltozási vektor:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}.$$

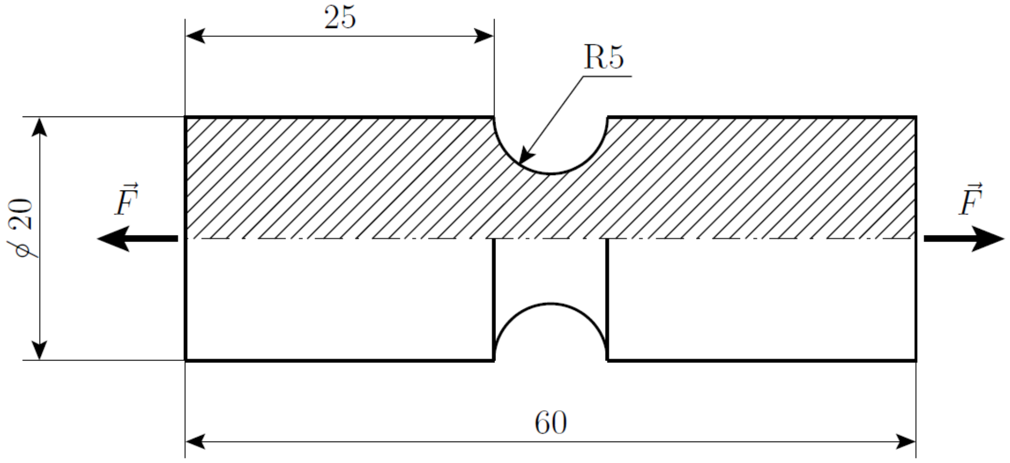
Hasonló alakot ölt a feszültségi tenzor és a független elemekből képzett feszültségi vektor:

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}.$$

A feszültségi vektorban σ_z mennyiséget azért nem tüntettük fel, mert az alakváltozási energiában nem játszik szerepet, hiszen alakváltozási párja zérus.
A feladat kitűzése hasonló a síkfeszültségi állapothoz, vagyis a végeselem háló csomópontjaiban x, y irányú u_i, v_i elmozdulás ismeretlen paraméterekről beszélünk, valamint ennek megfelelő F_{xi}, F_{yi} erők működtethetők.

4.5.Tengelyszimmetrikus feladat

Forgás vagy tengelyszimmetrikus állapot kifejezést a végeselem programokban „Axysymmetric problem”-nek nevezik.



3. ábra: Forgásszimmetrikus, bemetszett szakító próbatest terhelése és modellje

A forgásszimmetrikus test geometriája és terhelése is forgásszimmetrikus, bármelyik meridián metszetében ugyanolyan alakváltozási és feszültségi állapot ébred. Ebben az esetben az alakváltozási tenzor és a független elemekből képzett alakváltozási vektor:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_r & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{rz} \\ 0 & \varepsilon_\varphi & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{zr} & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \ \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\varphi \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix}.$$

A feladat megadása a síkfeszültségi és síkalakváltozási állapottal megegyezik, vagyis a végeselem háló csomópontjaiban csak r, z irányú u_i, w_i elmozdulás ismeretlen paraméterekről beszélünk, valamint ennek megfelelő F_{ri}, F_{zi} erők működtethetők. A végeselem programokban általában az r koordinátának az x koordináta felel meg. A három feladat végeselemes vizsgálata azért nagyon hasonló, mert a csomóponti elmozdulásnak csak síkba eső koordinátája fordul elő. A továbbiakban részletesen csak a síkfeszültségi állapotú feladat végeselemes előállítását részletezzük.

4.6.Síkfeszültségű peremérték feladat

Rugalmas ÁSF peremérték feladat kitűzése a 4. ábrán látható.
Az elmozdulás mező a helynek ismeretlen függvénye:

$$\vec{u}^*(\vec{r}) = u(x,y)\vec{e}_x + v(x,y)\vec{e}_y,\ \underline{\underline{u}} = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix},$$

ahol a felső indexben a $*$ most a feladat síkbeli jellegére utal.
A vastagság menti átlagos alakváltozások síkbeli része

$$\underline{\underline{A}}^* = \frac{1}{2}\left(\vec{u}^* \circ \nabla^* + \nabla^* \circ \vec{u}^*\right),\ \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix},$$

ahol $\nabla^* = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y$ a síkbeli nabla operátor , és a fel nem tüntetett síkra merőleges átlagos fajlagos nyúlás $\varepsilon_z = -\frac{\nu\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)}{1-\nu}$ képlettel számítható.
Az átlagos feszültségek tenzora (Hooke-törvény) és független elemeinek oszlopvektora:

$$\underline{\underline{F}}^* = 2G\left(\underline{\underline{A}}^* + \frac{\nu\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)}{1-\nu}\underline{\underline{I}}^*\right),\ \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}.$$

Az anyagtörvény mátrixos formában is felírható:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Az egyensúlyi egyenlet:

$\underline{\underline{F}}^* \circ \nabla^* + \rho\vec{g}^* = \vec{0},\ \underline{\underline{g}} = \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix}$, ahol $\vec{g}^*$ a gyorsulás vektor (pl. gravitáció, forgás, stb.)

Kinematikai peremfeltétel:

$$\vec{u}^*\left(\vec{r}^*\right) = \vec{u}_0^*\left(\vec{r}^*\right), \vec{r}^* \in A_u.$$

Dinamikai peremfeltétel:

$$\underline{\underline{F}}^* \cdot \vec{n} = \vec{p}^*,\ \vec{r}^* \in A_p,\ \underline{\underline{p}} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$$

A síkbeli feladat összesen 8ismeretlen mezőt tartalmaz, ezek egyértelmű meghatározásához 8 skalár egyenlet (részben parciális differenciálegyenlet) és a megfelelő peremfeltételek állnak rendelkezésre. Azt a megoldást, amely eleget tesz az előbb felsorolt egyenleteknek egzakt megoldásának nevezzük.
Természetesen most is közelítő megoldást keresünk a potenciális energia minimuma elv felhasználásával.

A bevezetett mennyiségekkel a rugalmas síkbeli feladatra a teljes potenciális energia az alábbi alakban írható

$$\Pi_p\left(\underline{\underline{u}}\right)=\frac{1}{2}\int_V \underline{\underline{\varepsilon}}^T \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{\varepsilon}}dV-\int_V \underline{\underline{u}}^T \rho g dV-\int_{A_p} \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{p}} dA$$

Végeselem módszer alkalmazásakor az elemekre bontott tartományokon lokálisan approximált elmozdulással fejezzük ki a potenciális energiát:

$$\Pi_p=\sum_{e=1}^{N_{elem}}\left\{\Pi_p^e\left(\underline{\underline{u}}^e\right)\right\},$$

ahol Nelem az elemek száma, $\Pi_p^e\left(\underline{\underline{u}}^e\right)$ az elemenkénti approximációval kifejezett potenciális energia

$$\Pi_p^e\left(\underline{\underline{u}}^e\right)=\frac{1}{2}\int_{V^e} \underline{\underline{\varepsilon}}^{eT} \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{\varepsilon}}^e dV-\int_V \underline{\underline{u}}^{eT} \rho \underline{\underline{g}}^e dV-\int_{A_p} \underline{\underline{u}}^{eT} \underline{\underline{p}}^e dA$$

Végül a potenciális energia minimum elvből határozhatók meg az elmozdulás mező ismeretlen paraméterei (csomóponti elmozdulások).