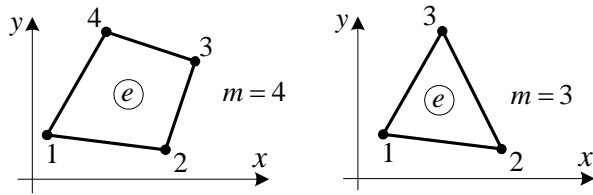


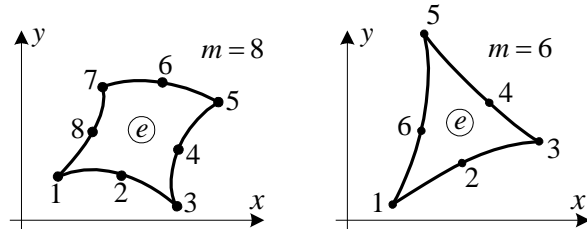
4.5. Lineare und quadratische finite Elemente zur Lösung von 2D-Aufgaben

a) Ebene (EVZ, ESZ) Elemente:

- Lineare Elemente

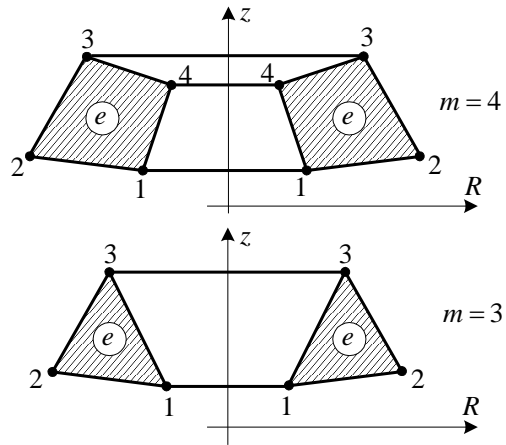


- Quadratische Elemente

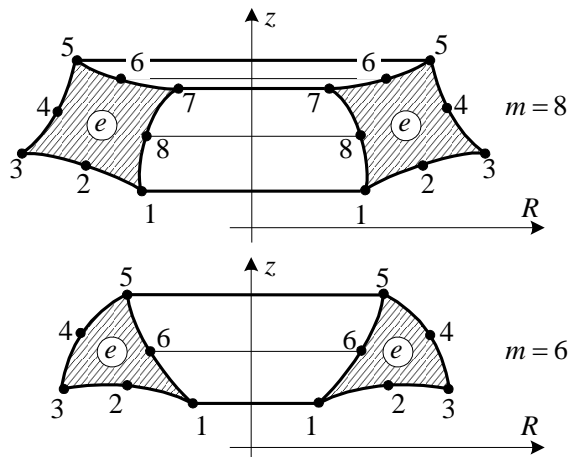


b) Rotationssymmetrische (Ring) Elemente (RSA/ASA):

- Lineare Elemente



- Quadratische Elemente



Bei Ringelementen kann man an Stelle von Knotenpunkten von Knotenkreisen sprechen.

c) Beschreibung der Geometrie:

- Ebener Verzerrungszustand (EVZ), ebener Spannungszustand (ESZ):

$$\left. \begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^m h_i(\xi, \eta) x_i, \\ y(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^m h_i(\xi, \eta) y_i. \end{aligned} \right\}$$

- Rotationssymmetrische Aufgabe (RSA/ASA):

$$\left. \begin{aligned} R(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^m h_i(\xi, \eta) R_i, \\ z(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^m h_i(\xi, \eta) z_i. \end{aligned} \right\}$$

d) Das Verschiebungsfeld:

EVZ, ESZ: $\vec{u}(x, y) = u(x, y)\vec{e}_x + v(x, y)\vec{e}_y,$

RSA/ASA: $\vec{u}(R, z) = u(R, z)\vec{e}_R + v(R, z)\vec{e}_z.$

- Die Näherung des Verschiebungsfeldes:

$$\left. \begin{aligned} u^e(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^m h_i^e(\xi, \eta) u_i^e, \\ v^e(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^m h_i^e(\xi, \eta) v_i^e. \end{aligned} \right\}$$

Die Verschiebungsfelder werden mit denselben Funktionen angenähert, wie die Geometrie.

Die Näherung in Matrizenform: $\underline{\underline{u}}^e(\xi, \eta) = \underline{\underline{A}}^e(\xi, \eta) \underline{\underline{q}}^e.$

$\begin{matrix} (2 \times 1) & & (2 \times 2m) & & (2m \times 1) \end{matrix}$

Die Approximationsmatrix des Elementes: $\underline{\underline{A}}^e(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & \dots & h_m & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & \dots & 0 & h_m \end{bmatrix}^e.$

Der Knotenpunkt -/ Knotenkreisverschiebungsvektor des Elementes:

$$\left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \dots \quad u_m \quad v_m],$$

u_i^e - die Verschiebung in x/R -Richtung im Knotenpunkt / Knotenkreis i ,

v_i^e - die Verschiebung in y/z -Richtung im Knotenpunkt / Knotenkreis i .

- Die Eigenschaft der Approximationsfunktionen

Das 2. Kriterium oder monotone Konvergenz (Bedingung für die Vollständigkeit).

Das Verschiebungsfeld muss ein vollständiges Polynom ersten Grades enthalten:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= a_1 + a_2x + a_3y \\ v(x, y) &= b_1 + b_2x + b_3y \end{aligned} \right\}$$

Aus diesen Verschiebungsfeldern kann man die Knotenpunktverschiebungen berechnen:

$$u_i = u(x_i, y_i) = a_1 + a_2x_i + a_3y_i,$$

$$v_i = v(x_i, y_i) = b_1 + b_2x_i + b_3y_i.$$

Setzen wir diese Beziehungen in die isoparametrische Näherung ein:

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^m h_i(\xi, \eta) u_i = a_1 \sum_{i=1}^m h_i + a_2 \sum_{i=1}^m h_i x_i + a_3 \sum_{i=1}^m h_i y_i, \\ v(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^m h_i(\xi, \eta) v_i = b_1 \sum_{i=1}^m h_i + b_2 \sum_{i=1}^m h_i x_i + b_3 \sum_{i=1}^m h_i y_i. \end{aligned}$$

$\begin{matrix} = 1 & = x & = y \end{matrix}$

Aus diesen Bezeichnungen folgt, dass die Ansatzfunktionen den folgenden Zusammenhang erfüllen müssen:

$$\sum_{i=1}^m h_i(\xi, \eta) = 1 \quad (-1 \leq \xi, \eta \leq 1).$$

e) Das Verzerrungsfeld des Elementes

$$\text{EVZ, ESZ: } \underline{\underline{\varepsilon}}^e(\xi, \eta) = \underline{\underline{D}}_\varepsilon^e \underline{\underline{u}}^e(\xi, \eta) = \underbrace{\left[\underline{\underline{D}}_\varepsilon^e \underline{\underline{A}}^e(\xi, \eta) \right]}_{\underline{\underline{B}}^e(\xi, \eta)} \underline{\underline{q}}^e.$$

$(3 \times 1) \quad (3 \times 2) \quad (2 \times 1) \quad (3 \times 2m) \quad (2m \times 1)$

Ausführlich geschrieben:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^e(\xi, \eta) \\ v^e(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \dots \\ \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial x} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_m \\ v_m \end{bmatrix}.$$

$$\text{RSA/ASA: } \underline{\underline{\varepsilon}}^e(\xi, \eta) = \underline{\underline{D}}_\varepsilon^e \underline{\underline{u}}^e(\xi, \eta) = \underbrace{\left[\underline{\underline{D}}_\varepsilon^e \underline{\underline{A}}^e(\xi, \eta) \right]}_{\underline{\underline{B}}^e(\xi, \eta)} \underline{\underline{q}}^e.$$

$(4 \times 1) \quad (4 \times 2) \quad (2 \times 1) \quad (4 \times 2m) \quad (2m \times 1)$

Ausführlich geschrieben:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_R \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\varphi \\ \gamma_{Rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial R} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{R} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^e(\xi, \eta) \\ v^e(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial R} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial R} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial z} & \dots \\ \frac{h_1}{R} & 0 & \frac{h_2}{R} & 0 & \dots \\ \frac{\partial h_1}{\partial z} & \frac{\partial h_1}{\partial R} & \frac{\partial h_2}{\partial z} & \frac{\partial h_2}{\partial R} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_m \\ v_m \end{bmatrix}.$$

Problem:

- Die Formfunktionen hängen von den Veränderlichen ξ, η ab.
- Die Matrizen enthalten die Ableitungen von $h_i(\xi, \eta)$ nach x, y , beziehungsweise nach R, z .

f) Die Einführung der Jacobischen Funktionsmatrix

Wir kennen die Funktion in folgender Form: $f = f(x, y) = f[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$.

Die partiellen Ableitungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned} \right\}$$

In Matrizenform geschrieben:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{J}}(\xi, \eta)} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}, \text{ wobei}$$

$\underline{\underline{J}}(\xi, \eta)$ die Jacobische Matrix ist.

$$\text{EVZ, ESZ: } \underline{\underline{J}}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \frac{\partial h_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^m \frac{\partial h_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^m \frac{\partial h_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^m \frac{\partial h_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix}.$$

$$\text{RSA/ASA: } \underline{\underline{J}}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial R}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \frac{\partial h_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} R_i & \sum_{i=1}^m \frac{\partial h_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} z_i \\ \sum_{i=1}^m \frac{\partial h_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} R_i & \sum_{i=1}^m \frac{\partial h_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} z_i \end{bmatrix}.$$

Zur Berechnung der Ableitungen von $h_i(\xi, \eta)$ nach xy/Rz braucht man die inverse *Jacobische* Matrix:

$$\text{EVZ, ESZ: } \begin{bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial x} \\ \frac{\partial h_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \underline{\underline{J}}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial h_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \underline{\underline{J}}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial h_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}.$$

$$\text{RSA/ASA: } \begin{bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial R} \\ \frac{\partial h_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \underline{\underline{J}}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial h_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \underline{\underline{J}}} \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \eta} & -\frac{\partial z}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial R}{\partial \eta} & \frac{\partial R}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial h_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}.$$

g) Das Spannungsfeld im Element e :

$$\text{EVZ, ESZ: } \underline{\underline{\sigma}}^e(\xi, \eta) = \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{\varepsilon}}^e(\xi, \eta).$$

$$\text{Ausführlich geschrieben: } \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & 0 \\ c_2 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^e.$$

Die Matrixkoordinaten der Materialkennwerte:

EVZ:

$$c_1 = E \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 2G \frac{1-\nu}{1-2\nu}, \quad c_2 = E \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 2G \frac{\nu}{1-2\nu}, \quad c_3 = \frac{E}{2(1+\nu)} = G.$$

ESZ:

$$c_1 = E \frac{1}{1-\nu^2} = 2G \frac{1}{1-\nu}, \quad c_2 = E \frac{\nu}{1-\nu^2} = 2G \frac{\nu}{1-\nu}, \quad c_3 = \frac{E}{2(1+\nu)} = G.$$

$$\text{RSA/ASA: } \underline{\underline{\sigma}}^e(\xi, \eta) = \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{\varepsilon}}^e(\xi, \eta).$$

$$\text{Ausführlich geschrieben: } \begin{bmatrix} \sigma_R \\ \sigma_z \\ \sigma_\varphi \\ \tau_{Rz} \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_2 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_2 & 0 \\ c_2 & c_2 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} \varepsilon_R \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\varphi \\ \gamma_{Rz} \end{bmatrix}^e.$$

Die Matrixkoordinaten der Materialkennwerte:

$$c_1 = E \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 2G \frac{1-\nu}{1-2\nu}, \quad c_2 = E \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 2G \frac{\nu}{1-2\nu}, \quad c_3 = \frac{E}{2(1+\nu)} = G.$$

h) Die Steifigkeitsmatrix des Elementes im xy/Rz -Koordinatensystem:

$$\underline{\underline{K}}^e = \int_{(V^e)} \left[\underline{\underline{B}}^e(\xi, \eta) \right]^T \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{B}}^e(\xi, \eta) dV.$$

Das elementare Volumen:

$$\text{EVZ: } dV = 1 \, dx dy = 1 \det \underline{\underline{J}} \, d\xi d\eta,$$

$$\text{ESZ: } dV = b \, dx dy = b \det \underline{\underline{J}} \, d\xi d\eta,$$

$$\text{RSA: } dV = 2R\pi dRdz = 2R\pi \det \underline{\underline{J}} d\xi d\eta.$$

Die obigen drei Fälle in einer Formel zusammengefasst: $dV = c(\xi, \eta) d\xi d\eta$.

Berechnung der Steifigkeitsmatrix:

$$\underline{\underline{K}}^e = \int_{\eta=-1}^1 \int_{\xi=-1}^1 \left[\underline{\underline{B}}^e(\xi, \eta) \right]^T \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{B}}^e(\xi, \eta) c(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Damit haben wir den Integrationsbereich in ein Quadrat transformiert.

Der Integrand ist ziemlich kompliziert, deshalb wendet man die numerische Integration an.

$$\underline{\underline{K}}^e = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n w_i w_j \left[\underline{\underline{B}}^e(\xi_i, \eta_j) \right]^T \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{B}}^e(\xi_i, \eta_j) c(\xi_i, \eta_j), \text{ wobei}$$

n die Anzahl der Integrationspunkte,

ξ_i, η_j die Ortskoordinaten der Integrationspunkte,

w_i, w_j die Gewichtskoeffizienten der Integration sind.

i) Der Knotenpunktbelastungsvektor des Elementes im xy / Rz -Koordinatensystem

- Knotenlasten aus Volumenkräften:

$$\underline{\underline{f}}_{=q}^e = \int_{(2m \times 1)} \left[\underline{\underline{A}}^e(\xi, \eta) \right]^T \underline{\underline{q}}(\xi, \eta) dV = \int_{\eta=-1}^1 \int_{\xi=-1}^1 \left[\underline{\underline{A}}^e(\xi, \eta) \right]^T \underline{\underline{q}}(\xi, \eta) c(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Berechnung mit der numerischen Integration:

$$\underline{\underline{f}}_{=q}^e = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n w_i w_j \left[\underline{\underline{A}}^e(\xi_i, \eta_j) \right]^T \underline{\underline{q}}(\xi_i, \eta_j) c(\xi_i, \eta_j).$$

Beispiel: Rotation eines rotationssymmetrischen Körpers um die Achse z .

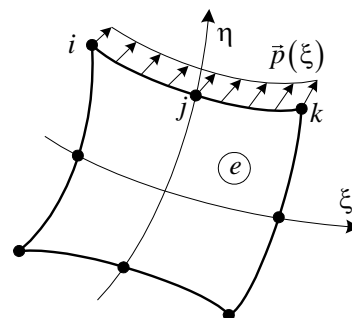
Die Volumenkraftdichte: $\underline{\underline{q}}(R, z) = \rho \omega^2 \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$, wobei

ρ die Massendichte des Materials und

ω die Winkelgeschwindigkeit des Körpers sind.

Knotenlasten aus der Rotation: $\underline{\underline{f}}_{=q}^e = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n w_i w_j 2\pi \rho \omega^2 \left[\underline{\underline{A}}^e(\xi_i, \eta_j) \right]^T R^2(\xi_i, \eta_j) \det \underline{\underline{J}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

- Knotenlasten aus Flächenkräften:



Die bekannten Flächenkräfte $\vec{p}(\xi)$ wirken an der Seite $\eta=1$

Die Approximationsmatrix $\underline{\underline{A}}^e(\xi, \eta)$ muss an die Seite $\eta=1$ lokalisiert werden.

An der Seite $\eta=1$ hängen alle Größen von der Veränderlichen ξ ab:

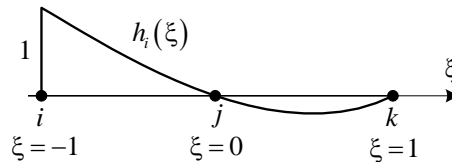
$$\underline{\underline{A}}^e(\xi, \eta) \Rightarrow \underline{\underline{A}}^{e0}(\xi).$$

$$\left. \begin{aligned} u(\xi) &= \sum_{i=1}^n h_i(\xi) u_i, \\ v(\xi) &= \sum_{i=1}^n h_i(\xi) v_i. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{u}}^e(\xi) = \underline{\underline{A}}^{e0}(\xi) \begin{bmatrix} q_{=i}^e \\ q_{=j}^e \\ q_{=k}^e \end{bmatrix}.$$

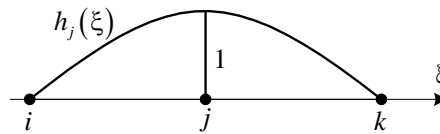
Die lokalisierte Approximationsmatrix: $\underline{\underline{A}}^{e0}(\xi) = \begin{bmatrix} h_i & 0 & h_j & 0 & h_k & 0 \\ 0 & h_i & 0 & h_j & 0 & h_k \end{bmatrix}^e.$

Die Formfunktionen:

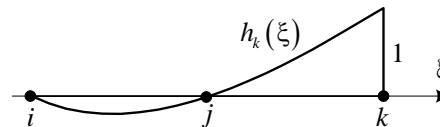
$$h_i(\xi) = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi),$$



$$h_j(\xi) = (1-\xi^2),$$



$$h_k(\xi) = -\frac{1}{2}\xi(1+\xi).$$



Knotenpunktbelastungsvektor aus der Flächenlast $\underline{\underline{p}}(\xi)$:

$$\underline{\underline{f}}_p^e = \int_{(A_0^e)} \underline{\underline{A}}^{e0}(\xi) \underline{\underline{p}}(\xi) dA, \text{ wobei } \underline{\underline{p}}(\xi) = \begin{bmatrix} p_x(\xi) \\ p_y(\xi) \end{bmatrix} \text{ ist.}$$

Die elementare Fläche:

$$\text{EVZ: } dA = 1 ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} d\xi,$$

$$\text{ESZ: } dA = b ds = b \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} d\xi,$$

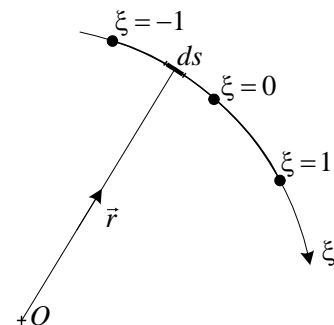
$$\text{RSA/ASA: } dA = 2R\pi ds = 2R\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} d\xi.$$

Die elementare Bogenlänge:

$$\frac{ds}{d\xi} = \left| \frac{d\vec{r}}{d\xi} \right| = \left| \frac{dx}{d\xi} \vec{e}_x + \frac{dy}{d\xi} \vec{e}_y \right|, \quad ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} d\xi.$$

Die elementare Fläche in verallgemeinerter Form:

$$ds = c^*(\xi) d\xi.$$



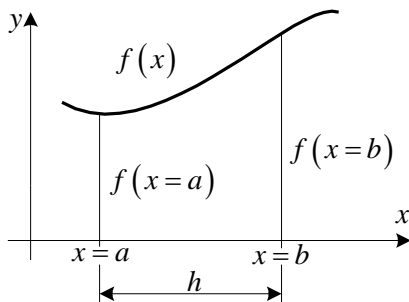
Berechnung des Knotenpunktbelastungsvektors:

$$\underline{\underline{f}}_p^e = \int_{\xi=-1}^1 \left[\underline{\underline{A}}^{e0}(\xi) \right]^T \underline{\underline{p}}(\xi) c^* d\xi = \sum_{i=1}^n w_i \left[\underline{\underline{A}}^{e0}(\xi_i) \right]^T \underline{\underline{p}}(\xi_i) c^*(\xi_i).$$

4.6. Numerische Integration

Der Näherungswert des Integrals der Funktion $f(x)$ kann numerisch in der Form einer Summe berechnet werden.

Jedes Glied der Summe enthält das Produkt aus einem Koeffizienten und einem Funktionswert.



$$\int_{x=a}^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) + R_n$$

Fehlterglied

w_i - der Gewichtskoeffizient, der zum Integrationspunkt i gehört,
 x_i - die Ortskoordinate des Integrationspunktes i .

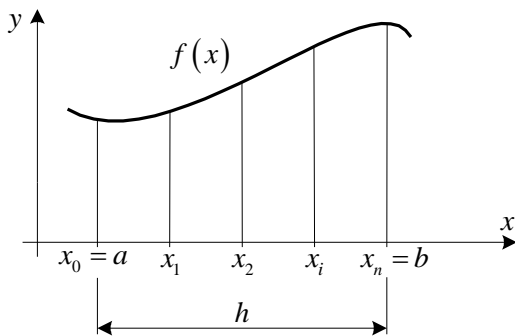
Die Aufgabe besteht in der Bestimmung der Werte w_i und x_i .

a) Die Formeln von Newton-Cotes:

Wir wählen die Integrationspunkte, die voneinander den gleichen Abstand haben.

$$x_i = x_0 + \frac{b-a}{n} i.$$

Wir nähern die Funktion $f(x)$ mittels *Lagrangescher* Interpolation an:



$$f(x) \approx \eta(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i).$$

Die *Lagrangeschen* Interpolationspolynome:

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}.$$

Wir setzen die Näherungsfunktion $\eta(x)$ in das Integral ein:

$$\int_{x=a}^b f(x) dx = \int_{x=a}^b \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i) dx + R_n.$$

Umformungen:

$$\int_{x=a}^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n \left[\int_{x=a}^b L_i(x) dx \right] f(x_i) + R_n$$

$(b-a) \sum_{i=0}^n c_i^n$

$$\int_{x=a}^b f(x) dx = (b-a) \sum_{i=0}^n c_i^n f(x_i) + R_n.$$

Die Integrationskoeffizienten können wie folgt bestimmt werden:

n	c_0^n	c_1^n	c_2^n	c_3^n	c_4^n	R_n
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				$10^{-1}(b-a)^3 f''(x)$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$			$10^{-1}(b-a)^5 f^{IV}(x)$
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$	$10^{-1}(b-a)^7 f^{VI}(x)$

Beim Fall $n=3$ ist der Fehler R_n derselbe, wie beim Fall $n=2$.

Beim Fall $n=5$ ist der Fehler R_n derselbe, wie beim Fall $n=4$.

Die Formeln $n=3$ und $n=5$ benutzen wir deshalb nicht.

Spezielle Fälle:

$n=1 \Rightarrow$ die Trapez-Formel: $\int_{x=a}^b f(x) \approx (b-a) \frac{1}{2} (f_0 + f_1)$,

$n=2 \Rightarrow$ die *Simpsonsche* Formel: $\int_{x=a}^b f(x) \approx \frac{b-a}{6} (f_0 + 4f_1 + f_2)$.

b) Die Formeln von Gauß

Bei der Gaußschen Integration liegen die Integrationspunkte nicht in gleichem Abstand voneinander, sondern werden eine optimale Lage haben.

Von dieser Wahl erwartet man die Verbesserung der Näherung.

Bei der Näherung von *Newton-Cotes* sind die Integrationspunkte x_i bekannt.

Wir wählen ein Polynom in folgender Form auf: $P(x) = (x-x_1)(x-x_2) \cdots (x-x_n)$.

Dieses Polynom hat in den Integrationspunkten einen Wert von Null: $P(x_i) = 0$.

Wir wählen die Näherungsfunktion in folgender Form:

$$f(x) \approx \eta(x) = \sum_{i=1}^n L_i(x) f(x_i) + P(x) (\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_n x^n).$$

Das ist ein Polynom $(2n-1)$ -ter Ordnung, aber es gibt nur n Integrationspunkte.

Dem vorherigen Gedankengang entsprechend, erfolgt die Näherung des Integrals in der Form:

$$\int_{x=a}^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \underbrace{\left[\int_{x=a}^b L_i(x) dx \right]}_{w_i} f(x_i) + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \left[\int_{x=a}^b x^j P(x) dx \right].$$

Optimierungsannahme: die zweite Summe muss verschwinden!

$$\int_{x=a}^b x^k P(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

\Downarrow

Optimale Integrationspunkte.

$x_k = \dots$

Die Gewichtskoeffizienten w_i hängen von der Größe/Länge des Intervalls $[a, b]$!

Wenn $a = -1$ und $b = 1$, dann sind die *Gaußschen* Integrationspunkte x_i und die Gewichtskoeffizienten:

n	x_i	w_i
1	0,0000000000	0,0000000000
2	$\pm 0,5773502691$	1,0000000000
3	$\pm 0,774596692$	0,5555555556
	0,0000000000	0,8888888889
\vdots	\vdots	\vdots

Bemerkungen:

- Die *Gaußsche* Formel mit n Integrationspunkten gibt den genauen Wert des Integrals eines Polynoms $(2n-1)$ -ten Grades an.
- Bei gleicher Anzahl an Integrationspunkten ergibt die *Gaußsche* Formel ein genaueres Ergebnis als die Formel von *Newton-Cotes*.
- Zu empfehlende Integrationsordnung für 2D-Aufgaben:

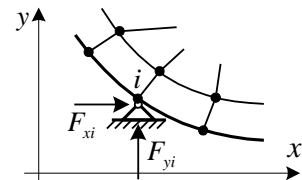
Anzahl der Knotenpunkte	Integrationsordnung
$m = 4, 3$	2×2
$m = 8, 6$	3×3

4.7. Bemerkungen zu 2D-Aufgaben

a) *Randbedingungen bei 2D-Aufgaben:*

- Gelenkige Abstützung / Lagerung in einem Punkt:

$u_i = 0, v_i = 0 \Rightarrow$ Im Knotenpunkt i tritt eine Einzelkraft auf.

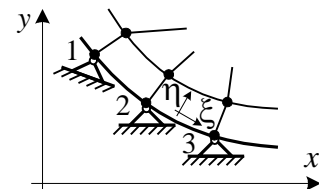


- Gelenkige Abstützung / Lagerung in mehreren Knotenpunkten nebeneinander:

$u_i = 0, v_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots$

Verschiebungsfeld am Rand:

$$\left. \begin{aligned} u(\xi, \eta = -1) &= \sum_i h_i(\xi) u_i, \\ v(\xi, \eta = -1) &= \sum_i h_i(\xi) v_i. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} u &\equiv 0, \\ v &\equiv 0. \end{aligned}$$



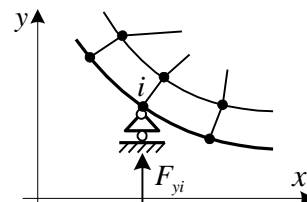
In diesem Fall werden die Verschiebungen nicht nur in den Knotenpunkten, sondern auch am gesamten Rand gleich Null.

Solch eine Abstützung / Lagerung entspricht einer starren Einspannung am gesamten Rand.

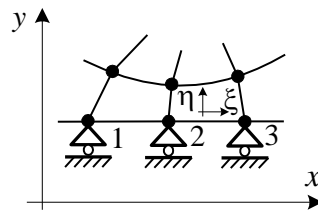
In der Realität kommt solch eine Abstützung / Lagerung nur sehr selten vor.

- Einrollenlager in einem Knotenpunkt:

$v_i = 0 \Rightarrow$ Im Knotenpunkt i tritt eine Einzelkraft in y -Richtung auf.



- Einrollenlager in mehreren Knotenpunkten nebeneinander
 $v_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots$
 $v^e(\xi, \eta = -1) = \sum_i h_i(\xi) v_i \Rightarrow v \equiv 0.$
 Der Rand mit den Knotenpunkten 1, 2, 3 bleibt gerade.



b) Lastfälle bei linearen Aufgaben:

Die Lösungen bei linearen Aufgaben kann man superpositionieren.

Wenn an einem Bauteil mit gleicher Vernetzung unterschiedliche Belastungen wirken, bekommt man die folgenden linearen Gleichungssysteme:

$$\left. \begin{aligned} \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{=1}}} \underline{\underline{q}}_{\underline{\underline{=1}}} &= \underline{\underline{f}}_{\underline{\underline{=1}}}, \\ \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{=2}}} \underline{\underline{q}}_{\underline{\underline{=2}}} &= \underline{\underline{f}}_{\underline{\underline{=2}}}, \\ &\vdots \\ \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{=n}}} \underline{\underline{q}}_{\underline{\underline{=n}}} &= \underline{\underline{f}}_{\underline{\underline{=n}}}. \end{aligned} \right\} \text{ Bezeichnung: } \underline{\underline{f}}_{\underline{\underline{=1}}}, \underline{\underline{f}}_{\underline{\underline{=2}}} \dots \underline{\underline{f}}_{\underline{\underline{=n}}} - \text{Lastfälle.}$$

Umformung: $\underline{\underline{K}} \begin{bmatrix} \underline{\underline{q}}_{\underline{\underline{=1}}} & \underline{\underline{q}}_{\underline{\underline{=2}}} & \dots & \underline{\underline{q}}_{\underline{\underline{=n}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{f}}_{\underline{\underline{=1}}} & \underline{\underline{f}}_{\underline{\underline{=2}}} & \dots & \underline{\underline{f}}_{\underline{\underline{=n}}} \end{bmatrix}.$

Lösung in einem Schritt: $\begin{bmatrix} \underline{\underline{q}}_{\underline{\underline{=1}}} & \underline{\underline{q}}_{\underline{\underline{=2}}} & \dots & \underline{\underline{q}}_{\underline{\underline{=n}}} \end{bmatrix} = \underline{\underline{K}}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{\underline{f}}_{\underline{\underline{=1}}} & \underline{\underline{f}}_{\underline{\underline{=2}}} & \dots & \underline{\underline{f}}_{\underline{\underline{=n}}} \end{bmatrix}.$

Bei linearen Aufgaben kann man in einem Programmlauf, in einem Schritt mehrere Lastfälle berechnen.

Superposition:

Für eine vorgeschriebene Belastung $\underline{\underline{f}} = (c_1 \underline{\underline{f}}_{\underline{\underline{=1}}} + c_2 \underline{\underline{f}}_{\underline{\underline{=2}}} + \dots + c_n \underline{\underline{f}}_{\underline{\underline{=n}}})$ erhält man eine Lösung in der Form:

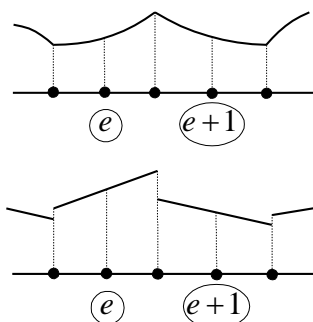
$$\underline{\underline{q}} = (c_1 \underline{\underline{q}}_{\underline{\underline{=1}}} + c_2 \underline{\underline{q}}_{\underline{\underline{=2}}} + \dots + c_n \underline{\underline{q}}_{\underline{\underline{=n}}}).$$

Die Koeffizienten c_1, c_2, \dots, c_n sind bekannt.

c) Optimale Spannungsberechnung bei quadratischen isoparametrischen Elementen:

Charakter der Näherung:

- Die Verschiebungen sind quadratische Polynome.
- Die Spannungen sind lineare Polynome (sie sind Ableitungen der Verschiebungen).



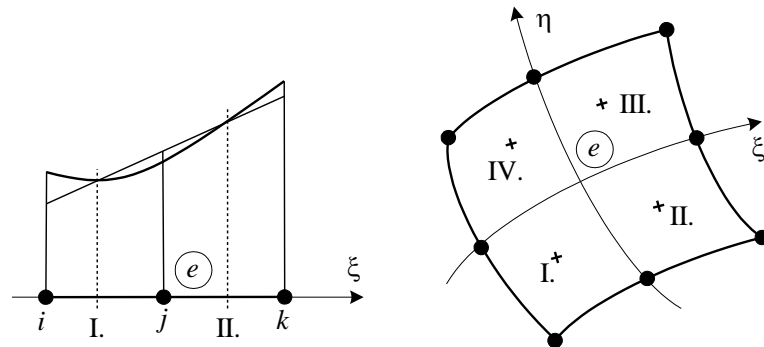
Der Fehler bei der Spannungsberechnung liegt infolge des Differentiationsprozesses um eine Größenordnung höher, als der Fehler bei den Verschiebungen.

Zielstellung: wir wollen solche Spannungswerte erzeugen, deren Fehler in der Größenordnung des Fehlers der Verschiebungen liegt.

Gedankengang:

- Wir wenden zwei unterschiedliche Näherungsansätze an: einen mit einem vollständigen Polynom zweiter Ordnung und einen mit einem vollständigen Polynom dritter Ordnung.

- Wir suchen die Punkte im Element, an denen die Spannungen aus den unterschiedlichen Näherungen gleich sind.
- Ergebnis: die gesuchten Punkte sind die Integrationspunkte der 2x2 Gaußschen Quadratur.



Die in den Gaußschen Integrationspunkten berechneten Spannungswerte ergeben eine genauso gute Näherung, wie die Spannungen aus einer kubischen Näherung.

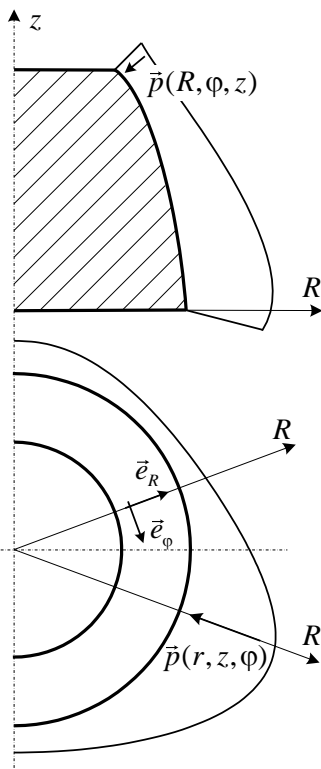
Bei quadratischen isoparametrischen Elementen ist die Genauigkeit der Verschiebung und der Spannungen gleich.

4.8. Aufgaben mit rotationssymmetrischer Geometrie und mit nicht-rotationssymmetrischer Belastung

Die Belastung kann auch von φ abhängen, aber sie hat keine Belastungscoordinate in der φ -Richtung.

Flächenbelastung: $\vec{p} = p_R(R, z, \varphi)\vec{e}_R + p_z(R, z, \varphi)\vec{e}_z$.

Volumenbelastung: $\vec{q} = q_R(R, z, \varphi)\vec{e}_R + q_z(R, z, \varphi)\vec{e}_z$.



Die Belastung wird in Reihen entwickelt.

⇒ Die Abhängigkeit von φ wird von den anderen Ortskoordinaten getrennt:

$$\left. \begin{aligned} \text{Flächenbelastung: } p_R &= \sum_n p_{R_n}(R, z) \cos n\varphi, \\ p_z &= \sum_n p_{z_n}(R, z) \cos n\varphi. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Volumenbelastung: } q_R &= \sum_n q_{R_n}(R, z) \cos n\varphi, \\ q_z &= \sum_n q_{z_n}(R, z) \cos n\varphi. \end{aligned} \right\}$$

Das Verschiebungsfeld:

$$\vec{u}(R, z, \varphi) = u(R, z, \varphi)\vec{e}_R + v(R, z, \varphi)\vec{e}_\varphi.$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Trennung der Variablen: } u(R, z, \varphi) &= \sum_n u_n(R, z) \cos n\varphi, \\ v(R, z, \varphi) &= \sum_n v_n(R, z) \cos n\varphi. \end{aligned} \right\}$$

Damit haben wir das Problem auf n rotationsymmetrische Aufgaben zurückgeführt.

Die Näherung der Verschiebungsamplituden:

$$\left. \begin{aligned} u_n(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^m h_i(\xi, \eta) u_{ni} \\ v_n(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^m h_i(\xi, \eta) v_{ni} \end{aligned} \right\} m = 3, 4, 6, 8.$$

4.9 Beispiele

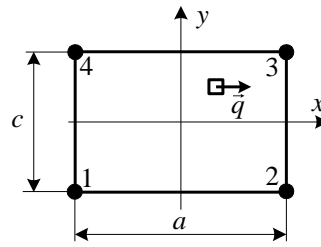
Beispiel 1: Bestimmung des Knotenbelastungsvektors eines Rechteckelementes

- Lineare Näherung (ESZ)

Gegeben: $a, b, c, \vec{q} = q_x \vec{e}_x = \text{konst.}$,

b – Dicke des Elementes,

q_x - Volumenkraftdichte.



Aufgabe: Bestimmung des Knotenpunktbelastungsvektors

Die resultierende Kraft: $F = q_x V = q_x acb$.

Abbildung:
$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a}{2} \xi \\ y &= \frac{c}{2} \eta \end{aligned} \right\}$$

Die Jacobische Matrix und die Jacobische Determinante:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{c}{2} \end{bmatrix}, \quad \det |J| = \frac{ac}{4}.$$

Die Knotenpunktbelastung aus Volumenkräften:

$$\begin{pmatrix} f^e \\ =q \end{pmatrix}^T = [f_{1x} \quad 0 \quad f_{2x} \quad 0 \quad f_{3x} \quad 0 \quad f_{4x} \quad 0],$$

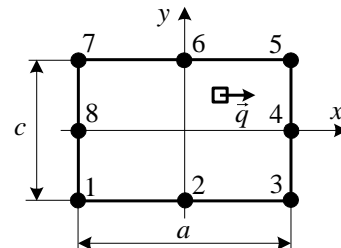
$$f_{ix}^e = q_x \underbrace{\int_{\eta=-1}^1 \int_{\xi=-1}^1 h_i(\xi, \eta) d\xi d\eta}_{=1} b \frac{ac}{4} = \frac{F_x}{4}.$$

- Quadratische Näherung

Gegeben:

$a, b, c, \vec{q} = q_x \vec{e}_x = \text{konst.}$

Aufgabe: Bestimmung des Knotenpunktbelastungsvektors.



Die Jacobische Determinante: $\det |J| = \frac{ac}{4}$.

Die Knotenpunktbelastung: $f_{ix}^e = q_x \frac{abc}{4} \int_{\eta=-1}^1 \int_{\xi=-1}^1 h_i(\xi, \eta) d\xi d\eta$.

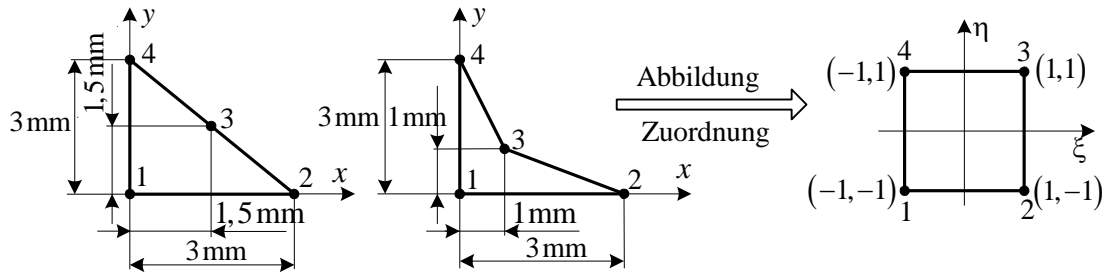
Das Integral der Formfunktionen:

$$\int_{\eta=-1}^1 \int_{\xi=-1}^1 h_i(\xi, \eta) d\xi d\eta = \begin{cases} -\frac{1}{3} & (i = 1, 3, 5, 7), \\ \frac{4}{3} & (i = 2, 4, 6, 8). \end{cases}$$

$$f_{ix}^e = \begin{cases} -q_x \frac{abc}{12} = -\frac{F_x}{12} \\ q_x \frac{abc}{3} = \frac{F_x}{3} \end{cases}$$

Kontrolle: Die resultierende Kraft: $\sum_i f_{ix} = -4 \frac{F_x}{12} + 4 \frac{F_x}{4} = F$.

Beispiel 2: Jacobische Determinante der linearen 2D-Abbildung



Formfunktionen der Abbildung:

$$h_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \quad h_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta),$$

$$h_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \quad h_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta).$$

Aufgabe: Untersuchung der gegenseitigen / wechselseitigen Eindeutigkeit der Abbildung.

a) Drei Knotenpunkte liegen auf einer Geraden

Abbildung der Geometrie:

$$x = \sum_{i=1}^4 h_i(\xi, \eta) x_i = 0 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)3 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)1,5 + 0,$$

$$y = \sum_{i=1}^4 h_i(\xi, \eta) y_i = 0 + 0 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)1,5 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)3.$$

Nach Umformung: $x(\xi, \eta) = \frac{3}{8}(1+\xi)(3-\eta), \quad y(\xi, \eta) = \frac{3}{8}(1+\eta)(3-\xi).$

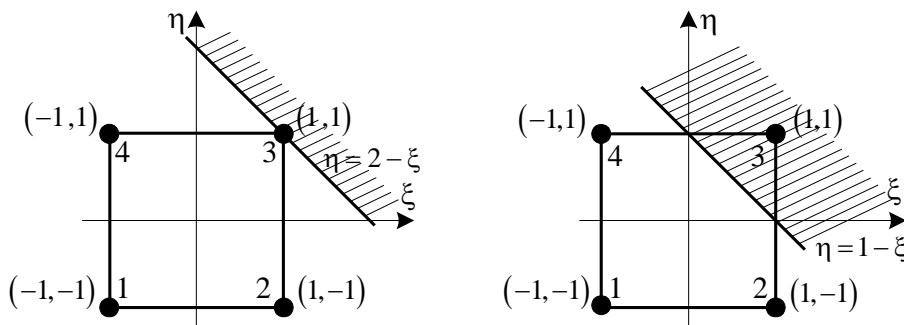
Die Jacobische Matrix der Abbildung:
$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8}(3-\eta) & -\frac{3}{8}(1+\eta) \\ -\frac{3}{8}(1+\xi) & \frac{3}{8}(3-\xi) \end{bmatrix}.$$

Die Determinante der Jacobischen Matrix:

$$\det |J| = \frac{9}{64}(3-\xi)(3-\eta) - \frac{9}{64}(1+\xi)(1+\eta) = \frac{9}{16}(2-\xi-\eta).$$

Die Abbildung ist nicht gegenseitig / wechselseitig eindeutig, wenn

$$\det |J| \leq 0 \Rightarrow 2-\xi-\eta \leq 0 \Rightarrow \eta \geq 2-\xi$$



Die Abbildung ist nur in einem Punkt, im Knotenpunkt 3 nicht gegenseitig eindeutig (und am gestreiften Gebiet, das gehört aber nicht mehr zum Element).

b) Nicht konvexe Elementform

Abbildung der Geometrie:

$$x = \sum_{i=1}^4 h_i(\xi, \eta) x_i = 0 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)3 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)1 + 0,$$

$$y = \sum_{i=1}^4 h_i(\xi, \eta) y_i = 0 + 0 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)1 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)3.$$

Nach Umformung: $x(\xi, \eta) = (1+\xi)\left(1 - \frac{\eta}{2}\right), \quad y(\xi, \eta) = (1+\eta)\left(1 - \frac{\xi}{2}\right).$

Die Jacobische Matrix:
$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{\eta}{2}\right) & -\frac{1}{2}(1+\eta) \\ -\frac{1}{2}(1+\xi) & \left(1 - \frac{\xi}{2}\right) \end{bmatrix}.$$

Die Determinante der Jacobischen Matrix:

$$\det[J] = \left(1 - \frac{\eta}{2}\right)\left(1 - \frac{\xi}{2}\right) - \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) = \frac{3}{4}(1-\xi-\eta).$$

Die Abbildung ist nicht gegenseitig / wechselseitig eindeutig, wenn

$$\det[J] \leq 0 \Rightarrow 1-\xi-\eta \leq 0 \Rightarrow \eta \geq 1-\xi.$$

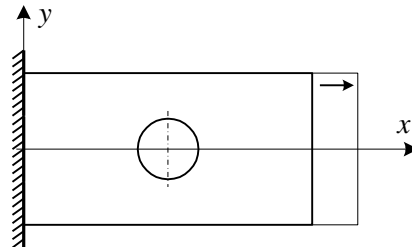
Die Abbildung ist auf dem gestreiften Bereich nicht gegenseitig / wechselseitig eindeutig.

Die FE-Vernetzungen dürfen solche Elemente nicht enthalten, weil man in diesem Fall falsche Ergebnisse erhalten kann.

Beispiel 3: FE-Modellierung und Berechnung einer 2D-Aufgabe

- Bekannt ist: - die Geometrie
 - das Material und
 - die Belastung einer eingespannten Rechteckscheibe mit Bohrung.

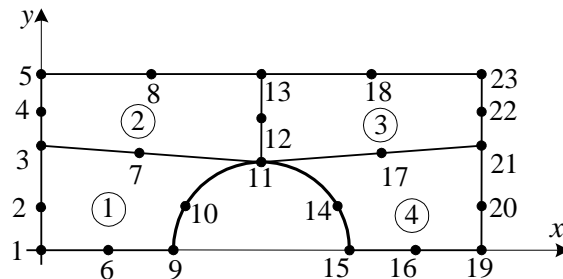
Aufgabe: die Erzeugung eines möglichen FE-Modells des Problems.



Die x-Achse ist eine Symmetrieachse bezüglich der Geometrie und der Belastung.

Das FE-Modell enthält deshalb nur die Hälfte des Bauteiles.

Eine mögliche FE-Vernetzung des Modells:



Bei der Vernetzung haben wir quadratische isoparametrische Rechteckelemente angewendet.

Die Steifigkeitsmatrix des Modells:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{11} & \underline{\underline{K}}_{12} & \underline{\underline{K}}_{13} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_{16} & \underline{\underline{K}}_{17} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_{19} & \dots \\ & \underline{\underline{K}}_{22} & \underline{\underline{K}}_{23} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_{26} & \underline{\underline{K}}_{27} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_{29} & \dots \\ & & \underline{\underline{K}}_{33} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_{36} & \underline{\underline{K}}_{37} & \underline{\underline{K}}_{38} & \underline{\underline{K}}_{39} & \dots \\ & & & \underline{\underline{K}}_{44} & \underline{\underline{K}}_{45} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_{47} & \underline{\underline{K}}_{48} & \underline{\underline{0}} & \dots \\ & & \text{szimm.} & & \underline{\underline{K}}_{55} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_{57} & \underline{\underline{K}}_{58} & \underline{\underline{0}} & \dots \\ & & & & & \underline{\underline{K}}_{66} & \underline{\underline{K}}_{67} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_{69} & \dots \\ & & & & & & \underline{\underline{K}}_{77} & \underline{\underline{K}}_{78} & \underline{\underline{K}}_{79} & \dots \\ & & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & \dots \end{bmatrix}$$

Einige Beispiele für den Aufbau der Steifigkeitsblöcke: $\underline{\underline{K}}_{33} = \underline{\underline{K}}_{33}^1 + \underline{\underline{K}}_{33}^2$,
 $\underline{\underline{K}}_{37} = \underline{\underline{K}}_{37}^1 + \underline{\underline{K}}_{37}^2$,
 $\underline{\underline{K}}_{11,11} = \underline{\underline{K}}_{11,11}^1 + \underline{\underline{K}}_{11,11}^2 + \underline{\underline{K}}_{11,11}^3 + \underline{\underline{K}}_{11,11}^4$.

Der Knotenpunktbelastungsvektor: $\underline{\underline{f}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \vdots \\ \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{f}}_{19} \\ \vdots \\ \underline{\underline{f}}_{23} \end{bmatrix}$

Einige Beispiele für den Aufbau der Belastungsblöcke: $\underline{\underline{f}}_{20} = \underline{\underline{f}}_{20}^3$,
 $\underline{\underline{f}}_{21} = \underline{\underline{f}}_{21}^3 + \underline{\underline{f}}_{21}^4$.

Kinematische Randbedingungen: - Symmetrie: $v_1 = v_6 = v_9 = v_{15} = v_{16} = v_{19} = 0$,
- Einspannung: $u_1 = v_1 = 0$, $u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = 0$.

Verfeinerungsmöglichkeit für das Modell:

Statt der Einspannungs-Randbedingungen kann man

- entweder Einzelfedern in den Knotenpunkten 1, 2, 3, 4, 5 anwenden,
- oder eine elastische Bettung entlang des Randes anwenden.