1. Grundlagen der Festigkeitslehre und der Elastizitätslehre

Festigkeitslehre: Die Kinematik, die Dynamik und das Materialverhalten von festen Körpern, die sich sowohl vor der Belastung als auch nach der Belastung im Ruhezustand befinden.

Die Definition der Begriffe:

Belastung: Die gegebenen / bekannten Kräfte.

Im Ruhezustand tritt keine Bewegung auf.

Voraussetzungen des Ruhezustandes:

- Die äußeren Kräfte am Körper befinden sich im Gleichgewicht.
- Die Abstützung des Körpers verhindert eine Starrkörperbewegung.

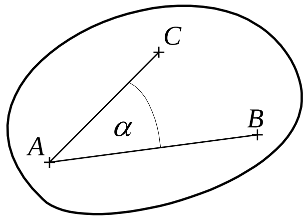
Wir untersuchen keine realen Körper, sondern Körpermodelle.

Körpermodell: Ein Körper mit idealisierten Eigenschaften.

Ein Körper, der die wichtigsten Eigenschaften des realen Körpers in Hinblick auf die Untersuchung widerspiegelt.

Die wichtigen Eigenschaften des realen Körpers werden berücksichtigt und die nicht wichtigen werden vernachlässigt.

Zum Beispiel: Starrkörper, Festkörper.



Starrkörper: Die Entfernung (der Abstand) zweier beliebiger Punkte voneinander ändert sich nicht. Die Entfernung/der Abstand der Punkte voneinander ändert sich auch unter Belastung nicht.

Festkörper: Der Körper ist verformbar. Die Entfernung (der Abstand) der Punkte des Körpers voneinander sowie der Winkel zwischen den geraden Linien können sich unter Belastung ändern. Form und Größe / Dimension der Flächen und Volumina des Körpers können sich ändern.

Die Festigkeitslehre untersucht das Verhalten fester Körper unter (infolge der) Belastung.

Formänderung:

- infolge der Belastung werden sich die Punkte der Körper im Verhältnis zueinander verschieben und deshalb
- werden sich die materiellen geometrischen Formen der Körper (Längen, Winkel, Flächen, Volumina) ändern.

Die materielle geometrische Form bedeutet, dass die geometrische Form an die materiellen Punkte des Körpers gebunden ist.

Kinematik in der Festigkeitslehre: beschreibt die Verschiebungen der Punkte sowie die Formänderung des Körpers infolge der Belastung.

Dynamik in der Festigkeitslehre: beschreibt die inneren Kräfte, die unter Belastung entstehen.

Materialverhalten in der Festigkeitslehre: beschreibt den Zusammenhang zwischen den Formänderungsgrößen / Verzerrungsgrößen und den inneren Kräften.

Teilgebiete der Festigkeitslehre:

- Festigkeitslehre
  - Elastizitätslehre
    - lineare Elastizitätslehre
    - nichtlineare Elastizitätslehre
  - Plastizitätslehre

Elastische Formänderung / elastischer Körper:

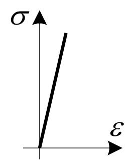
Der Körper kehrt nach der Entlastung in seine ursprüngliche Form zurück.

Der belastete, verzerrte Körper kehrt in seine ursprüngliche Form zurück, wenn er entlastet wird.

<ins>Linear-elastische Formänderung</ins>:

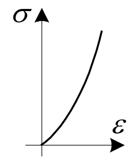
Der Zusammenhang zwischen der Belastung und den Verzerrungen ist linear.

Der Zusammenhang zwischen der Belastung und den inneren Kräften ist linear.



<ins>Nichtlinear-elastische Formänderung oder plastischer Körper:</ins>

Der Zusammenhang ist nichtlinear.



<ins>Plastische Formänderung / plastischer Körper:</ins> Der Körper kehrt nach der Entlastung nicht in seine ursprüngliche Form zurück.

In diesem Semester beschäftigen wir uns nur mit kleinen Verschiebungen und kleinen Verzerrungen fester Körper.

<ins>Kleine Verschiebungen:</ins> die Verschiebungen der Punkte des Körpers sind sehr klein im Vergleich zu den charakteristischen Dimensionen des Körpers.

<ins>Kleine Verzerrungen:</ins> die Verzerrungsgrößen des Körpers sind wesentlich kleiner als 1.

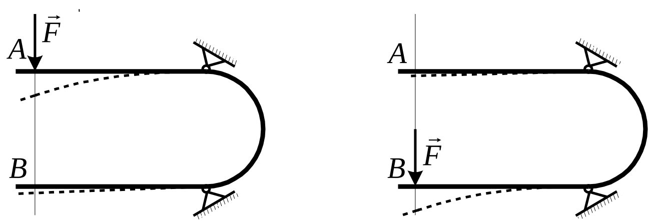
$$\varepsilon \ll 1,\ \gamma \ll 1.\ (\varepsilon, \gamma \approx 10^{-3} - 10^{-5})$$

(epsilon ist wesentlich kleiner als eins,
gamma ist ungefähr zehn hoch minus drei bis zehn hoch minus fünf)

<ins>Äquivalenz in der Statik:</ins> Zwei Kraftgruppen / Kraftsysteme sind gleichwertig / äquivalent, wenn sie das gleiche Momentenfeld ergeben / verursachen.

<ins>Äquivalenz in der Festigkeitslehre:</ins> Zwei Kraftsysteme sind äquivalent, wenn sie in einem Körper – abgesehen von einem kleinen Teil des Körpers – den gleichen Verzerrungszustand ergeben.

Beispiel:



Diese Kräfte sind statisch äquivalent, aber aus der Sicht der Festigkeitslehre sind sie es nicht.

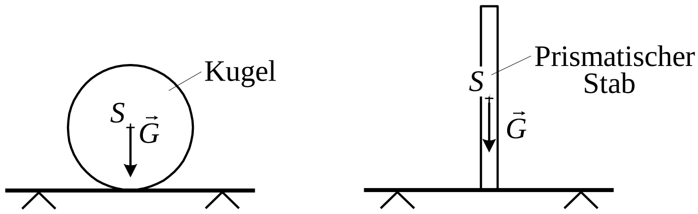
Die Kraft $\vec{F}$ kann entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden. $\Rightarrow$ Das Momentenfeld ist gleich. $\Rightarrow$ Die Kraftsysteme (Kräfte) sind statisch gleichwertig.

Die Deformation hängt vom Angriffspunkt des Kraftvektors ab $\Rightarrow$ Die zwei Kräfte sind aus der Sicht der Festigkeitslehre nicht gleichwertig.

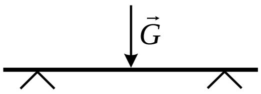
<ins>Das Prinzip von *Saint-Venant*:</ins>

Zwei Kraftgruppen, die statisch äquivalent sind (das gleiche Momentenfeld ergeben) und an der gleichen kleinen Oberfläche angreifen, verursachen in guter Näherung denselben Verzerrungszustand / dieselbe Formänderung des Körpers. Ausnahme ist das Gebiet der unmittelbaren Lasteinleitung.

Beispiel:



Die Deformation ist in guter Näherung – außer in dem Gebiet der unmittelbaren Lasteinleitung – gleich. Die obigen Belastungen können in gleicher Weise modelliert werden:

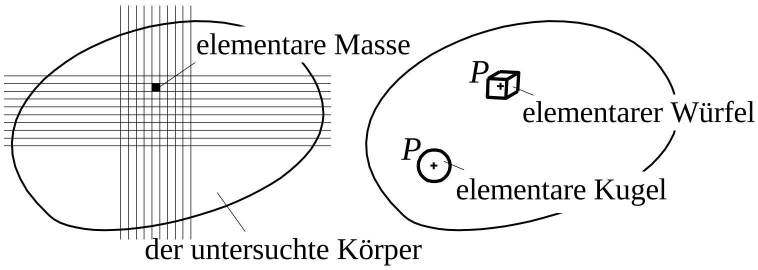


$\vec{G}$ - G mit Pfeil,

$\rightarrow$ - der Pfeil bezeichnet die Vektorgrößen.

Elementare Masse / elementare Umgebung:

Jeder Körper kann in ∞ (unendlich) viele Teile unterteilt werden.



Massenpunkt / elementare Masse / elementare Umgebung ist ein Teil des Körpers, dessen Dimension im Vergleich zu den charakteristischen Dimensionen des gesamten Körpers sehr klein ist.

Die Festigkeitszustände des Massenpunktes werden über Kenngrößen charakterisiert und sind an den Mittelpunkt gebunden.

Festigkeitszustände des Massenpunktes:
- Verschiebungszustand,
- Verzerrungszustand,
- Spannungszustand,
- Energiezustand.

Festigkeitszustände des Körpers:

Die Gesamtheit / die Menge der Festigkeitszustände der Massenpunkte.

Die Festigkeitszustände des Körpers sind mittels Feldgrößen angegeben.

Feld / Feldgröße: wenn die Kenngrößen in Abhängigkeit von den Ortskoordinaten bekannt sind.

Beispiel: $\rho = \rho(\vec{r}) = \rho(x,y,z)$, $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(x,y,z)$, oder $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(\vec{r}) = \underline{\underline{A}}(x,y,z)$.

(ro ist gleich ro in Abhängigkeit von Vektor r ist gleich ro in Abhängigkeit von x,y,z),

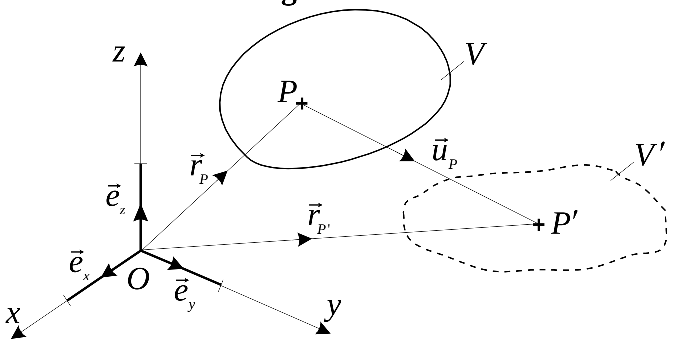
(u mit Pfeil ist gleich Vektor u in Abhängigkeit von Vektor r ist gleich u mit Pfeil in Abhängigkeit von x,y,z),

(Tensor A ist gleich A mit zwei Unterstrichen von Vektor r ist gleich Tensor A von x,y,z).

Bezeichnungen:
a – eine skalare Größe,
$\vec{a}$ – eine Vektorgröße / Vektormenge (a mit Pfeil),
$\underline{\underline{A}}$ – eine Tensorgröße (A mit zwei Unterstrichen).

2. Festigkeitszustände

2.1. Der Verschiebungszustand



V - das Volumen des Körpers vor der Belastung,
V' - das Volumen des Körpers nach der Belastung,
P - die Lage eines beliebigen Punktes P vor der Belastung,
P' - die Lage eines beliebigen Punktes P nach der Belastung.

Die Einheitsvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ stehen senkrecht aufeinander. ($\vec{e}_x$ - Vektor e mit Index x)

$\vec{u}_P$ - Verschiebungsvektor des Punktes *P*. ($\rightarrow$ der Pfeil, $\vec{u}$ - u mit Pfeil, P' - P Strich)

$$\vec{r}_{P'} = \vec{r}_P + \vec{u}_P \qquad \Rightarrow \qquad \vec{u}_P = \vec{r}_{P'} - \vec{r}_P \,.$$

(Vektor r mit Index P Strich ist gleich Vektor r mit Index P Plus Vektor u mit Index P),
(Vektor u mit Index P ist gleich Vektor r mit Index P Strich Minus Vektor r mit Index P).

Der Verschiebungszustand des Massenpunktes kann durch einen Vektor $\vec{u}_P = u_P\,\vec{e}_x + v_P\,\vec{e}_y + w_P\,\vec{e}_z$ charakterisiert werden.

Der Verschiebungszustand des (ganzen) Körpers kann durch ein Vektorenfeld
$\vec{u}(x,y,z) = u(x,y,z)\;\vec{e}_x + v(x,y,z)\;\vec{e}_y + w(x,y,z)\;\vec{e}_z$ charakterisiert werden.

$$\left.\begin{aligned} u(\vec{r}\,) &= u(x,y,z), \\ v(\vec{r}\,) &= v(x,y,z), \\ w(\vec{r}\,) &= w(x,y,z). \end{aligned}\right\}$$ – die skalaren Koordinaten des Verschiebungsfeldes (Verschiebungskoordinaten)

2.2. Der spezifische, relative Verschiebungszustand

<u>Das elementare Dreibein</u>: Die Einheitsvektoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ im Punkt *P*, die aufeinander senkrecht stehen. Die Vektoren bestimmen drei, aufeinander senkrechte Ebenen (Flächen), die drei Koordinatenebenen.

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0\,, \quad \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0\,, \quad \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = 0\,.$$

(Vektor e x mal skalar Vektor e y ist gleich Null)

Das Zeichen „$\cdot$“ steht für das Skalarprodukt / die skalare Multiplikation.
Wir nehmen an, dass das elementare Dreibein in der näheren Umgebung der betrachteten Punkte bleibt/liegt.
Die Verschiebung eines Punktes kann immer in zwei Teile zerlegt werden:

- eine parallele Verrückung und
- eine spezifische, relative Verschiebung.

Die relativen Verschiebungen der Punkte *A, B, C* (Bezugspunkt *P*):

$$\left.\begin{aligned} \vec{u}_x &= \vec{u}_A - \vec{u}_P \\ \vec{u}_y &= \vec{u}_B - \vec{u}_P \\ \vec{u}_z &= \vec{u}_C - \vec{u}_P \end{aligned}\right\}$$ Die spezifischen, relativen Verschiebungsvektoren der Punkte *A, B, C.*

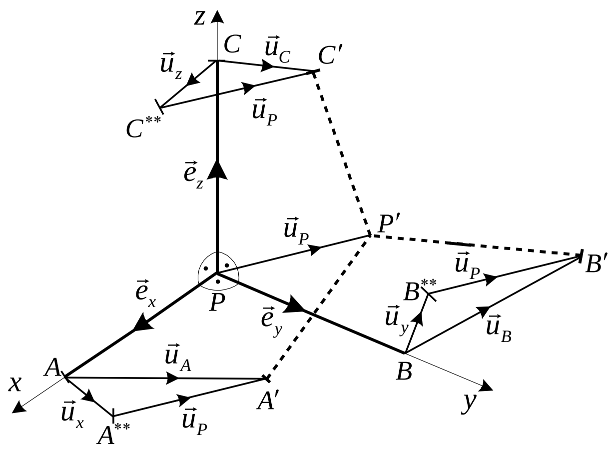
(Vektor u x ist gleich Vektor u A minus Vektor u P)

Die Verschiebungen sind spezifisch, weil $\overline{PA} = 1$, $\overline{PB} = 1$, $\overline{PC} = 1$ sind. (PA Quer ist gleich eins)
Die Verschiebungen sind relativ, weil sie auf den Punkt *P* bezogen sind.

$\vec{u}_P$ ist die parallele Verschiebung / Verrückung.

Die Veranschaulichung des spezifischen relativen Verschiebungszustandes:

Das elementare Dreibein ist entweder durch die Punkte *P, A, B, C,* oder durch die Einheitsvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ gegeben.



Die Bewegung des elementaren Dreibeines:

$$PABC \xrightarrow{\text{relative Verschiebungen}} PA^{**}B^{**}C^{**} \xrightarrow{\text{parallele Verrückungen}} P'A'B'C'$$

(A^* - A Stern, A^{**} - A zwei Stern)

Zielstellung: Die Bestimmung der spezifischen relativen Verschiebung des Punktes *N*, der in der elementaren Umgebung des Punktes *P* liegt.

$\vec{n}$ - ein beliebiger, im Punkt *P* angenommener Einheitsvektor.

$|\vec{n}| = 1 \quad \Rightarrow$ die Punkte *N* bilden eine Kugel mit dem Mittelpunkt *P* und mit dem Radius *R* = 1.

$|\vec{n}|$ ist der Betrag von $\vec{n}$, der absolute Wert von $\vec{n}$.

Die Bestimmung des spezifischen relativen Verschiebungszustandes:

$$\vec{n} \xrightarrow{\text{Zuordnung (Abbildung)}} \vec{u}_n .$$

Verschiebungsgradient-Tensor:

- Dyadische Darstellung: $\underline{\underline{D}}_P = \vec{u}_x \circ \vec{e}_x + \vec{u}_y \circ \vec{e}_y + \vec{u}_z \circ \vec{e}_z$.

(Vektor u x dyadisch multipliziert mit Vektor e x plus ….)

- Matrizendarstellung:

$$\left[\underline{\underline{D}}_P\right] = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} u_{xx} & u_{xy} & u_{xz} \\ u_{yx} & u_{yy} & u_{yz} \\ u_{zx} & u_{zy} & u_{zz} \end{bmatrix} \\ \text{-----------} \\ \vec{u}_x \quad \vec{u}_y \quad \vec{u}_z \end{array} .$$

- eine nicht symmetrische Matrix.

(D P zweimal unterstrichen in rechteckigen Klammern ist gleich rechteckigen Klammern u xx, u xy, ….)

Der Verschiebungsgradient charakterisiert eindeutig den spezifischen relativen Verschiebungszustand der Umgebung vom Punkt *P*.

Physischer Inhalt von $\underline{\underline{D}}$: der Gradient beschreibt die Relativverschiebung benachbarter Punkte und enthält sowohl die Streckung des Linienelementes als auch seine Verdrehung.

Die spezifische Relativverschiebung: $\vec{u}_n = \underline{\underline{D}}_P \cdot \vec{n}$.

2.3. Die Zerlegung des Verschiebungsgradienten

$$\underline{\underline{D}}_P = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{D}}_P + \underline{\underline{D}}_P^T\right)}_{\substack{\underline{\underline{A}}_P \\ \text{symmetrischer Teil}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{D}}_P - \underline{\underline{D}}_P^T\right)}_{\substack{\underline{\underline{\Psi}}_P \\ \text{antisymmetrischer Teil}}} .$$

($\underline{\underline{D}}_P^T$ - Tensor D P transponiert)

Die Zerlegung der spezifischen relativen Verschiebung des beliebigen Punktes N $\left(\overline{PN} = |\vec{n}| = 1\right)$:

$$\vec{u}_n = \underline{\underline{D}}_P \cdot \vec{n} = \left(\underline{\underline{A}}_P + \underline{\underline{\Psi}}_P\right) \cdot \vec{n} = \underline{\underline{A}}_P \cdot \vec{n} + \underline{\underline{\Psi}}_P \cdot \vec{n} = \vec{\alpha}_n + \vec{\beta}_n .$$

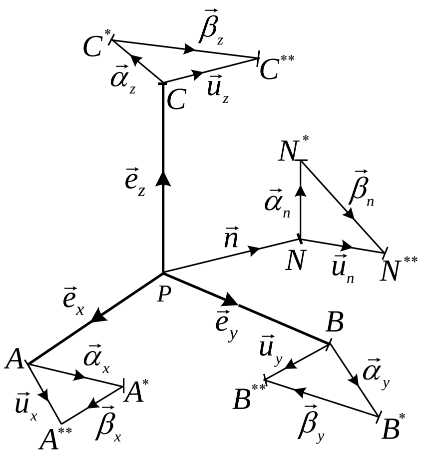
Der Verzerrungsvektor des Punktes N:

$\vec{\alpha}_n = \underline{\underline{A}}_P \cdot \vec{n}$, wobei $\underline{\underline{A}}_P$ der Verzerrungstensor des Punktes P ist.

Der Starrkörperbewegungsvektor des Punktes N:

$\vec{\beta}_n = \underline{\underline{\Psi}}_P \cdot \vec{n}$, wobei $\underline{\underline{\Psi}}_P$ der Rotationstensor des Punktes P ist.

Veranschaulichung des spezifischen relativen Verschiebungszustandes:



$|\vec{n}| = 1$,

$\vec{u}_n = \vec{\alpha}_n + \vec{\beta}_n$,

$\vec{u}_x = \vec{\alpha}_x + \vec{\beta}_x$,

$\vec{u}_y = \vec{\alpha}_y + \vec{\beta}_y$,

$\vec{u}_z = \vec{\alpha}_z + \vec{\beta}_z$.

Verzerrungen: $\vec{\alpha}_x, \vec{\alpha}_y, \vec{\alpha}_z, \quad \cdots \quad \vec{\alpha}_n$.

Starrkörperrotation: $\vec{\beta}_x, \vec{\beta}_y, \vec{\beta}_z, \quad \cdots \quad \vec{\beta}_n$.

Die Bewegung des elementaren Dreibeines:

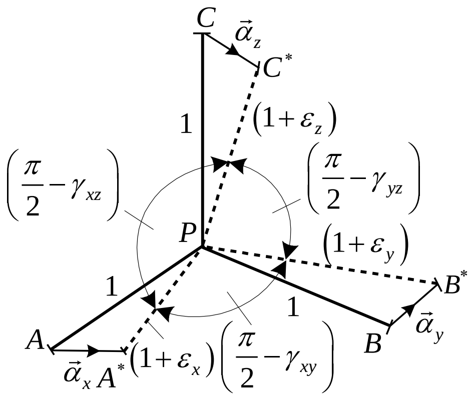
$$PABC \xrightarrow{\text{Verzerrungen}} PA^*B^*C^* \xrightarrow{\text{Starrkörperrotation}} PA^{**}B^{**}C^{**}$$

2.4. Der Verzerrungszustand

Im Punkt P werden sich die Länge der Einheitsvektoren und der Winkel der ursprünglich senkrechten Einheitsvektoren ändern.

Die Bewegung des elementaren Dreibeines im Verzerrungszustand:

$$PABC \longrightarrow PA^*B^*C^* .$$



Die geänderten Längen:	Die geänderten Winkel:
$\overline{PA}^* = 1+\varepsilon_x$,	$\left(\dfrac{\pi}{2}-\gamma_{xy}\right)$,
$\overline{PB}^* = 1+\varepsilon_y$,	$\left(\dfrac{\pi}{2}-\gamma_{xz}\right)$,
$\overline{PC}^* = 1+\varepsilon_z$,	$\left(\dfrac{\pi}{2}-\gamma_{yz}\right)$.

Infolge der Definition:
$\gamma_{xy}=\gamma_{yx}$, $\gamma_{yz}=\gamma_{zy}$, $\gamma_{xz}=\gamma_{zx}$.

(die Bezeichnung $\overline{PA}^*$ bedeutet hier die Entfernung / den Abstand der Punkte P und A^*)
(pi halbe minus gamma xy)

Die Verzerrungsgrößen: - Dehnungen: ε_x , ε_y , ε_z .

- Gleitungen: γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{xz} .

Vorzeichen: $\varepsilon>0$ Verlängerung, $\varepsilon<0$ Verkürzung,
(epsilon ist größer als Null, epsilon ist kleiner als Null)
$\gamma>0$ der ursprünglich rechte Winkel verringert sich,
$\gamma<0$ der ursprünglich rechte Winkel vergrößert sich.

Dimension: ε : mm/mm=1, (mm pro mm ist gleich …. , oder mm geteilt durch mm ist gleich …)
γ : rad=1.

Kleine Verzerrungen: $\varepsilon \approx 10^{-3}-10^{-5}$, $\gamma \approx 10^{-3}-10^{-5}$
(zehn hoch minus drei bis ungefähr zehn hoch minus vier)

Der Verzerrungstensor:

- Dyadische Darstellung: $\underline{\underline{A}}_P = \vec{\alpha}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\alpha}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\alpha}_z \circ \vec{e}_z$.

- Matrizendarstellung:

$$\left[\underline{\underline{A}}_P\right] = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \vec{\alpha}_x & \vec{\alpha}_y & \vec{\alpha}_z \end{array} \end{array} .$$

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_{xy}=\gamma_{yx} \\ \gamma_{yz}=\gamma_{zy} \\ \gamma_{xz}=\gamma_{zx} \end{array}\right\} \text{ symmetrischer Tensor.}$$

Der symmetrische Teil des Verschiebungsgradienten.

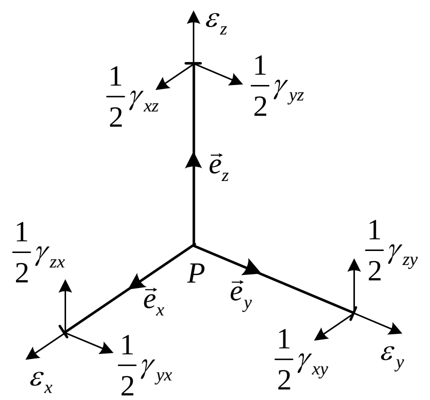
Die Verzerrungsvektoren:

$$\vec{\alpha}_x = \varepsilon_x\,\vec{e}_x + \frac{1}{2}\gamma_{yx}\,\vec{e}_y + \frac{1}{2}\gamma_{zx}\,\vec{e}_z ,$$

$$\vec{\alpha}_y = \frac{1}{2}\gamma_{xy}\,\vec{e}_x + \varepsilon_y\,\vec{e}_y + \frac{1}{2}\gamma_{zy}\,\vec{e}_z ,$$

$$\vec{\alpha}_z = \frac{1}{2}\gamma_{xz}\,\vec{e}_x + \frac{1}{2}\gamma_{yz}\,\vec{e}_y + \varepsilon_z\,\vec{e}_z .$$

Die Veranschaulichung des Verzerrungszustandes:



Die Berechnung der Verzerrungsgrößen:

$\varepsilon_n = \vec{n}\cdot\vec{\alpha}_n = \vec{n}\cdot\underline{\underline{A}}\cdot\vec{n}$, Maßeinheit: $[\text{mm/mm} = 1]$,

$\frac{1}{2}\gamma_{mn} = \vec{m}\cdot\vec{\alpha}_n = \vec{\alpha}_m\cdot\vec{n} = \vec{m}\cdot\underline{\underline{A}}\cdot\vec{n} = \vec{n}\cdot\underline{\underline{A}}\cdot\vec{m}$, Maßeinheit: $[\text{rad} = 1]$.

(Null Komma fünf mal gamma mn, oder einhalb mal gamma …)

Verzerrungszustand des Körpers: $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(\vec{r}) = \underline{\underline{A}}(x, y, z)$.

Der Verzerrungszustand des Körpers kann durch das Verzerrungstensorenfeld beschrieben werden.

Tensorenfeld: der Tensor ist in Abhängigkeit von den Ortskoordinaten bekannt.

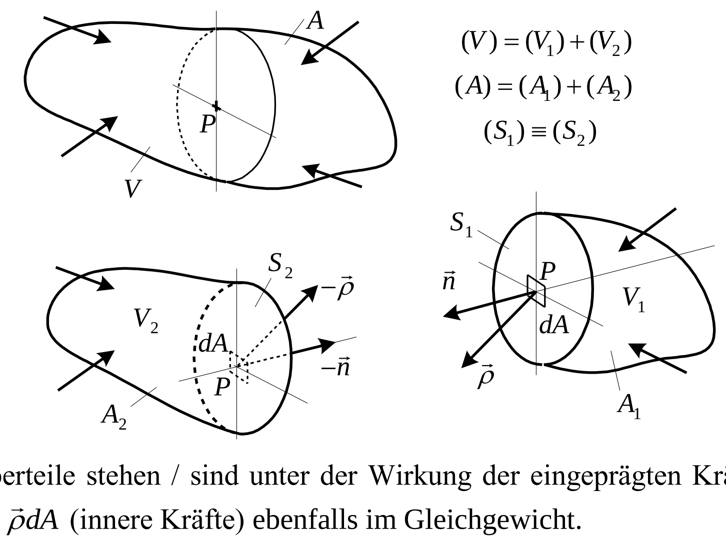
2.5. Der Spannungszustand

Der Spannungszustand beschreibt die Beanspruchung, die infolge äußerer Belastung im inneren Teil und am Rand eines Körpers entsteht.

Annahme: Der Körper ist / steht unter der Belastung und den Stützkräften im Gleichgewicht.

Bestimmung des Spannungszustandes im Punkt *P*:

Wir schneiden den Körper in zwei Teile, so dass der Punkt *P* an der Schnittfläche liegt.



Die geschnittenen Körperteile stehen / sind unter der Wirkung der eingeprägten Kräfte (der Belastung) und der Schnittkräfte $\vec{F} = \int_{(S)} \vec{\rho}\,dA$ (innere Kräfte) ebenfalls im Gleichgewicht.

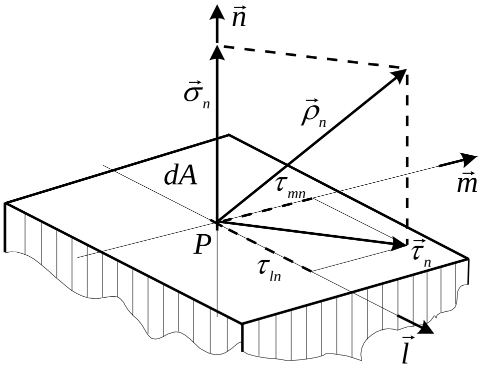
(Oberflächenintegral von Vektor ro mit S als Oberfläche und dA als Flächenelement)

Spannungsvektor: innere Flächenbelastung

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}(\vec{r}, \vec{n}),$$

wobei $\vec{r}$ der Ortsvektor des Punktes *P* und $\vec{n}$ der Normaleneinheitsvektor der Schnittfläche S_1 sind.

Spannungszustand in Punkt *P* $(\vec{r} = \text{konstant})$: $\vec{\rho} = \vec{\rho}(\vec{n}) = \vec{\rho}_n$, $\vec{\rho}_{-n} = -\vec{\rho}_n$.



$\vec{n}$ - der Normaleneinheitsvektor des Flächenelementes dA,

$\vec{l}$, $\vec{m}$ - Einheitsvektoren in der Ebene.

Die Einheitsvektoren $\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$ bilden ein rechtwinkliges Koordinatensystem.

Komponenten und Koordinaten des Spannungsvektors:

Komponenten: - Normalspannungsvektor: $\vec{\sigma}_n = \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{\rho}_n)}_{\sigma_n} \vec{n}$.

- Schubspannungsvektor: $\vec{\tau}_n = \vec{\rho}_n - \sigma_n \vec{n} = (\vec{n} \times \vec{\rho}_n) \times \vec{n}$

Koordinaten: - Normalspannung: $\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{\rho}_n \cdot \vec{n}$.

- Schubspannung: $\tau_{mn} = \vec{m} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{m} \cdot \vec{\tau}_n$, $\tau_{ln} = \vec{l} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{l} \cdot \vec{\tau}_n$.

Dimensionen / Maßeinheiten: $\dfrac{\text{N}}{\text{m}^2}$ = Pa = (*Pascal*), $\dfrac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \dfrac{\text{MN}}{\text{m}^2}$ = MPa (*megapascal*).

Der Spannungstensor:

Der Spannungsvektor $\vec{\rho}_n$ ist im Punkt *P* eine lineare homogene Funktion von $\vec{n}$:

$$\vec{\rho}_n = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} .$$

- Dyadische Darstellung: $\underline{\underline{F}} = \vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z$.

- Matrizendarstellung:

$$\left[\underline{\underline{F}}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} \tau_{xy} = \tau_{yx} \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} \end{array}\right\} \text{ symmetrischer Tensor.}$$

$$\begin{array}{ccc} \vec{\rho}_x & \vec{\rho}_y & \vec{\rho}_z \end{array}$$

Der Spannungstensor $\underline{\underline{F}}$ kann mit sechs unabhängigen skalaren Größen angegeben werden.

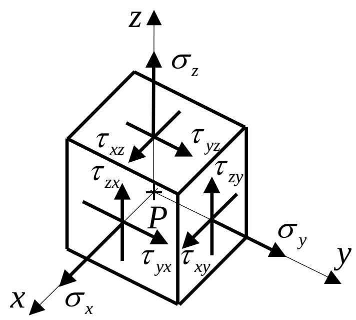
Die Koordinaten der Spannungsvektoren:

$$\vec{\rho}_x = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_x = \sigma_x \vec{e}_x + \tau_{yx} \vec{e}_y + \tau_{zx} \vec{e}_z ,$$
$$\vec{\rho}_y = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_y = \tau_{xy} \vec{e}_x + \sigma_y \vec{e}_y + \tau_{zy} \vec{e}_z ,$$
$$\vec{\rho}_z = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_z = \tau_{xz} \vec{e}_x + \tau_{yz} \vec{e}_y + \sigma_z \vec{e}_z .$$

Berechnung der Spannungskoordinaten aus dem Spannungstensor:

$$\vec{\rho}_n = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}, \qquad \sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{n} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n},$$
$$\tau_{mn} = \tau_{nm} = \vec{m} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{\rho}_n \cdot \vec{m} = \vec{m} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{m}.$$

Veranschaulichung des Spannungszustandes im Punkt *P*:



2.6. Hauptspannungen, Hauptrichtungen

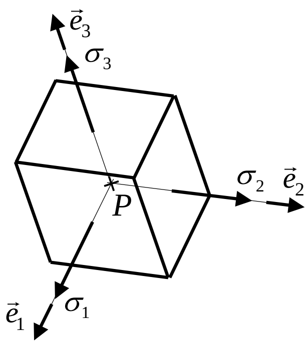
Wenn $\vec{\tau}_e = \vec{0}$ und $\Rightarrow$ $\vec{\rho}_e = \sigma_e \vec{e}$ auf der elementaren Fläche senkrecht zum Einheitsvektor $\vec{e}$ gültig ist, dann ist $\vec{e}$ eine Hauptrichtung / Hauptachse, σ_e eine Hauptspannung und die Ebene senkrecht auf $\vec{e}$ eine Hauptschnittebene.

Bemerkung:
- σ_e kann auch gleich Null sein $\Rightarrow$ $\vec{\rho}_e = 0$.
- Es gibt in jedem Punkt *P* mindestens drei Hauptachsen, die aufeinander senkrecht stehen.

Der Spannungszustand im Hauptachsen-Koordinaten-System:

$$\underset{(1,2,3)}{\left[\underline{\underline{F}}\right]} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}.$$

Bezeichnung / Festlegung:
$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.



2.7. Hauptachsenproblem $\equiv$ Eigenwertproblem

Spannungszustand:	Verzerrungszustand:
$\vec{\rho}_e = \sigma_e \vec{e}$,	$\vec{\alpha}_e = \varepsilon_e \vec{e}$,
$\underline{\underline{F}} \cdot \vec{e} = \sigma_e \underline{\underline{E}} \cdot \vec{e}$,	$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{e} = \varepsilon_e \underline{\underline{E}} \cdot \vec{e}$,
$\left(\underline{\underline{F}} - \sigma_e \underline{\underline{E}}\right) \cdot \vec{e} = \vec{0}$.	$\left(\underline{\underline{A}} - \varepsilon_e \underline{\underline{E}}\right) \cdot \vec{e} = \vec{0}$.

(Alle Glieder werden auf die linke Seite umgeordnet und danach wird der Vektor $\vec{e}$ ausgeklammert)

Einheitstensor: $\left[\underline{\underline{E}}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Das Hauptachsenproblem kann in gleicher Weise sowohl für den Spannungszustand als auch für den Verzerrungszustand formuliert werden.

Frage: Gibt es eine Richtung $\vec{e}$, die die obigen Gleichungen befriedigt?

Antwort: Es gibt mehrere, und zwar mindestens drei.

$\vec{e}$ – Richtungsvektor der Hauptachse, σ_e – Hauptspannung, ε_e – Hauptdehnung.

Wir haben ein homogenes, lineares algebraisches Gleichungssystem erhalten. Die Unbekannten des Gleichungssystems sind die skalaren Koordinaten des Richtungsvektors $\vec{e}$: e_x, e_y, e_z .

Im Folgenden beschäftigen wir uns nur mit dem Spannungszustand.

Die Bedingung für die nichttriviale Lösung:

$\det\left|\underline{\underline{F}} - \sigma_e \underline{\underline{E}}\right| = 0$. Die Determinante der Koeffizienten-Matrix muss verschwinden.

Die Determinante ausführlich beschrieben:
$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_e) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma_e) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma_e) \end{vmatrix} = 0.$$

Nach der Entwicklung der Determinante:

$$\sigma_e^3 - F_I \sigma_e^2 + F_{II} \sigma_e - F_{III} = 0 .$$

Die Koeffizienten F römisch eins, F römisch zwei und F römisch drei sind die skalaren Invarianten des Spannungstensors.

Eigenwertgleichung $\equiv$ charakteristische Gleichung.

Die skalaren Invarianten des Spannungstensors:

Definition: Die Invarianten dürfen sich bei einer Koordinatentransformation nicht ändern.

$F_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ - die erste Invariante des Spannungstensors (die Spur des Spannungstensors),

$F_{II} = \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix}$ - die zweite skalare Invariante des Spannungstensors,

(die Summe der Unterdeterminanten der Hauptdiagonalen),

$F_{III} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$ - die dritte skalare Invariante des Spannungstensors.

(die Determinante des Spannungstensors).

Die Lösungen (die Wurzeln) der Eigenwertgleichung / charakteristische Gleichung:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \qquad \text{die Hauptspannungen.}$$

Die Bestimmung der Hauptrichtungen:

Wir setzen die Hauptspannungen σ_1, σ_2, σ_3 in das homogene, lineare, algebraische Gleichungssystem ein:

$$\sigma_1 \rightarrow \vec{e}_1, \quad \sigma_2 \rightarrow \vec{e}_2, \quad \sigma_3 \rightarrow \vec{e}_3 .$$

Die drei Gleichungen sind voneinander nicht unabhängig.

Mit dem Gleichungssystem kann nur das Verhältnis der Koordinaten des Richtungsvektors bestimmt werden.
Zusätzliche Bedingung für die eindeutige Lösung: $e_{ix}^2 + e_{iy}^2 + e_{iz}^2 = 1$, $(i = 1,2,3)$.

$$\left|\vec{e}_i\right| = \sqrt{e_{ix}^2 + e_{iy}^2 + e_{iz}^2} = 1 .$$

(Der Betrag vom Vektor e i ist gleich Wurzel aus e ix Quadrat plus e iy Quadrat plus e iz Quadrat ist gleich eins)

Die Richtungsvektoren sind Einheitsvektoren: $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$, $\quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$, $\quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$.
(Die Vektoren $\vec{e}_i$, i=1,2,3 stehen senkrecht aufeinander.)

2.8. Deviator-Tensoren

Der Spannungsdeviator: $\underline{\underline{F}}_d = \underline{\underline{F}} - \sigma_k \underline{\underline{E}}$.

Der Verzerrungsdeviator: $\underline{\underline{A}}_d = \underline{\underline{A}} - \varepsilon_k \underline{\underline{E}}$.

Mittelspannung:

$$\sigma_k = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{F_I}{3}.$$

Mitteldehnung:

$$\varepsilon_k = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = \frac{A_I}{3}.$$

(Ein Drittel von sigma x plus sigma y plus sigma z …)

Nach der Umformung:

$$\underline{\underline{F}} = \underbrace{\underline{\underline{F}}_d}_{\text{Deviator Tensor}} + \underbrace{\sigma_k \underline{\underline{E}}}_{\text{Kugel Tensor}} \qquad \underline{\underline{A}} = \underbrace{\underline{\underline{A}}_d}_{\text{reine Gestaltänderung}} + \underbrace{\varepsilon_k \underline{\underline{E}}}_{\text{reine Volumenänderung}}$$

Die Aufspaltung des Spannungs- /Verzerrungszustandes spielt eine wesentliche Rolle bei der Formulierung der Vergleichsspannungen.

Die Eigenschaft der Deviator-Tensoren: $F_{d_I} = 0$, $\quad A_{d_I} = 0$. (Die erste Invariante der Deviator-Tensoren ist immer gleich Null.)

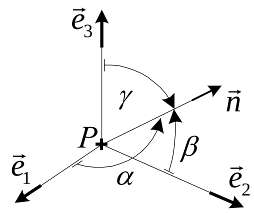
2.9. Das Mohrsche Kreisdiagramm

a) <u>Das Spannungskreisdiagramm:</u>

Mit dem *Mohrschen* Kreisdiagramm kann man den Spannungszustand im Punkt *P* veranschaulichen.

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ist das Koordinatensystem der Spannungshauptrichtungen.

$\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{e}_1 + \cos\beta\,\vec{e}_2 + \cos\gamma\,\vec{e}_3, \quad |\vec{n}| = 1.$



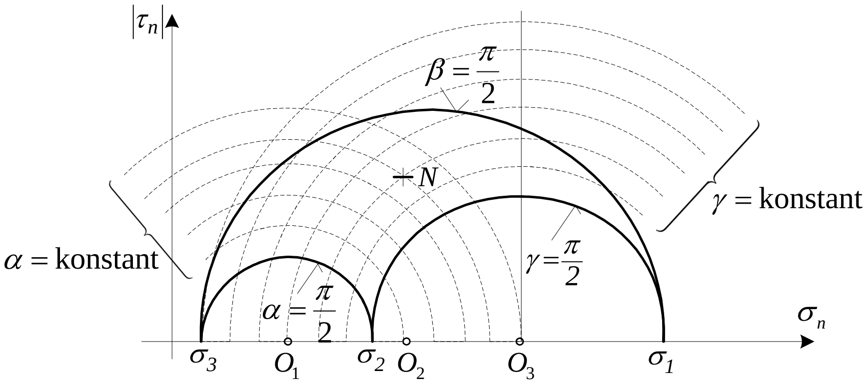
Der Grund der Veranschaulichung:

$$\vec{\rho}_n \xrightarrow{\text{Zuordnung (Abbildung)}} \text{der Punkt } N \text{ in der Ebene } \sigma_n, |\tau_n|.$$

<u>Man kann beweisen:</u>

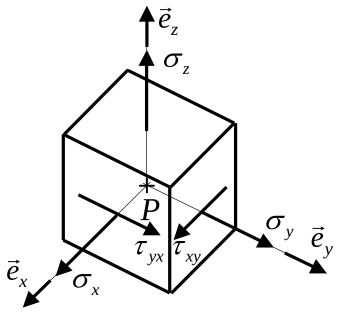
- Die Punkte *N*, die zu den Spannungsvektoren $\vec{\rho}_n$, den Normalenvektoren $\gamma = \text{konstant}$, gehören, liegen in der Ebene σ_n, $|\tau_n|$ auf einem Halbkreis.
- Diese Aussage gilt auch für $\alpha = \text{konstant}$ und $\beta = \text{konstant}$.
- Die Punkte *N*, die zu den Normalenvektoren in einer Hauptschnittebene gehören, liegen auf einem Halbkreis. Z. B.: Die Normalenvektoren der Hauptschnittebene $(\vec{e}_1\,\vec{e}_2)$: $\gamma = 90^\circ$.
(gamma ist gleich neunzig Grad)

<u>*Mohrsche* Kreise:</u>



Der Punkt N, der einem beliebigen Normalenvektor $\vec{n}$ entspricht, liegt in einem Gebiet, das von den Halbkreisen begrenzt ist.

Konstruktion des Kreisdiagrammes, wenn eine Hauptspannung bekannt ist (Beispiel: σ_z):



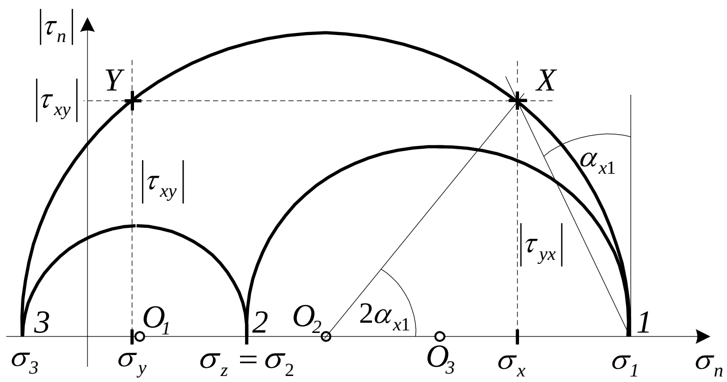
$\vec{e}_z$ ist die Hauptrichtung $\Rightarrow$ xy ist eine Hauptschnittebene

$\Downarrow$

Die Punkte X,Y liegen auf einem Halbkreis.

$\Downarrow$

Der Halbkreis über den Punkten X,Y bestimmt σ_1, σ_3 - die Hauptpunkte/Hauptrichtungen 1 und 3, die in der Ebene x,y liegen.



α_{1x} - Umfangswinkel,

$2\alpha_{1x}$ - Mittelpunktwinkel,

Diese Winkel gehören zu der gleichen Bogenlänge $X1$.

Im Dreieck $O_2 - \sigma_x - X$ sind

- die Katheten: $|\tau_{xy}|$ und $\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$,

- die Hypotenuse: $\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$.

Die Schritte zum Zeichnen der Kreise:

- Eintragen der Punkte X, Y. Koordinaten sind $\sigma_x, |\tau_{xy}|$, $\sigma_y, |\tau_{xy}|$.
- Bestimmung des Mittelpunktes O_2 des Halbkreises: $\sigma_{O_2} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$.

(sigma x plus sigma y halbe oder geteilt durch zwei)

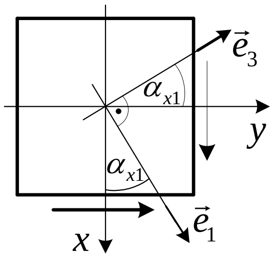
- Zeichnen des Halbkreises über die Punkte X,Y $\Rightarrow$ σ_1, σ_3.
- Die anderen beiden Kreise erhält man mit Hilfe der Punkte $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

σ_1, σ_2 - Halbkreis *3*, σ_2, σ_3 - Halbkreis *1*.

Bestimmung der Hauptspannungen aus dem Diagramm:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\,, \qquad \sigma_2 = \sigma_z\,, \qquad \sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\,.$$

Bestimmung der Hauptrichtungen



Aus dem Kreisdiagramm: $tg\,2\alpha_{x1} = \frac{2\left|\tau_{xy}\right|}{\left|\sigma_x - \sigma_y\right|}$.

(Tangens von zwei alpha x1 ist gleich …)

Die Schubspannungen τ zeigen immer in die Richtung der größeren Normalspannungen σ.

Im Punkt *1* ist die Normalspannung größer als im Punkt *X*.

Den Winkel α zeichnet man bei der Achse *x* in die Richtung der Schubspannung τ ein.

2.10. Der Energiezustand

2.10.1. Die Formänderungsenergie

Formänderungsenergiedichte: Formänderungsenergie in einer Volumeneinheit.

$$u(\vec{r}) = \frac{1}{2}\underline{\underline{F}} \cdot\cdot \underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}\left(\vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z\right) \cdot\cdot \left(\vec{\alpha}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\alpha}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\alpha}_z \circ \vec{e}_z\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{\rho}_x \cdot \vec{\alpha}_x + \vec{\rho}_y \cdot \vec{\alpha}_y + \vec{\rho}_z \cdot \vec{\alpha}_z\right) = \frac{1}{2}\left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz}\right).$$

(einhalb mal oder Null Komma fünfmal F zweifach unterstrichen zweimal skalar multipliziert mit A zweifach unterstrichen)

$u \geq 0$. Die Energie ist eine positive skalare Größe.

Die Zerlegung der Formänderungsenergie: $u = \underbrace{u_T}_{\text{reine Gestalt-änderung}} + \underbrace{u_V}_{\text{reine Volumen-änderung}}$.

Gestaltänderungsenergiedichte:

$$u_T = \frac{1}{12G}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}{}^2 + \tau_{yz}{}^2 + \tau_{xz}{}^2)\right].$$

$$u_T \geq 0 \quad \Rightarrow \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \geq 0, \quad E > 0, \; 1+\nu > 0 \quad \Rightarrow \quad \nu > -1.$$

Volumenänderungsenergiedichte:

$$u_V = \frac{1}{6} A_I\, F_I = \frac{1}{12G}\frac{1-2\nu}{1+\nu} F_I^2.$$

$$u_V \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 1-2\nu \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \nu \leq 0{,}5.$$

Grenzfälle:

- Nicht kompressibles Material: $u_V = 0$, z. B.: Gummi, Kautschuk.
- Schubstarres Material: $u_T = 0$

b) Formänderungsenergie eines Körpers: $U = \int\limits_{(V)} u\, dV$, wobei

V das Volumen des Körpers und *u* die Formänderungsdichte (spezifische Formänderung) sind.

2.10.2. Der Energiesatz der Mechanik

$E_2 - E_1 = W_A + W_I$. E – die kinetische Energie, 1 – Zustand vor der Belastung
2 – Zustand nach der Belastung

W_A – die Arbeit der äußeren Kräfte,
W_I – die Arbeit der inneren Kräfte.

Festigkeitslehre: die Mechanik fester Körper, die sich sowohl vor der Belastung als auch nach der Belastung im Ruhezustand befinden.

$$E_1 = E_2 \equiv 0 \qquad \Rightarrow \qquad W_A + W_I = 0 .$$

$$W_A = -W_I = \underbrace{U}_{\substack{\text{elastische}\\ \text{Formänderungs}\\ \text{energie}}} + \underbrace{W_D}_{\substack{\text{dissipative}\\ \text{Energie}\\ \text{(zB. innere Reibung)}}}$$

Elastische Formänderung:

Die äußere Arbeit kann vollständig zurückgewonnen werden: $W_A = -W_I = U$.