

3. Dimensionierung und Sicherheitsnachweis bei statischer Belastung

Statische Belastung: die Belastung ist zeitunabhängig (konstant).

Zielstellung: Die Konstruktion muß die Belastung ohne Schädigung ertragen.

Dimensionierung / Sicherheitsnachweis:

- Dimensionierung bezüglich der maximalen Spannung,
- Dimensionierung bezüglich der Tragfähigkeit,
- Dimensionierung bezüglich der Formänderung / Verschiebung.

3.1. Dimensionierung / Sicherheitsnachweis bezüglich der maximalen Spannung

Schädigung:

- plastische Formänderung
- Bruch

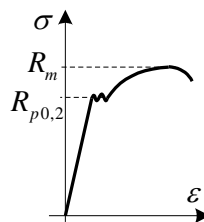
Festigkeitskennwert:

$R_{p0,2}$ - Fließspannung (Fließgrenze)

R_m - Bruchspannung (Zugfestigkeit)

Die Spannungs – Dehnungs-Kurve:

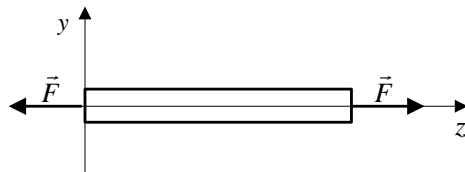
Die Festigkeitskennwerte können aus dem Zugversuch bestimmt werden.



a) Spezialfall: einachsiger Spannungszustand.

z.B.:

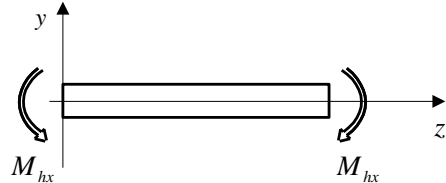
Zug-Druck:



Der Spannungszustand:

$$[\underline{F}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

Gerade Biegung:



Dimensionierung, Sicherheitsnachweis:

$$\sigma_z \leq \sigma_{zul} = \frac{\sigma_{kw}}{n}, \quad n - \text{Sicherheitsbeiwert } n > 1,$$

σ_{zul} - zulässige Spannung,

σ_{kw} - Festigkeitskennwert.

Die Festigkeitskennwerte stehen uns aus Meßergebnisse (Zug-Druck-Probe – einachsiger Spannungszustand) zur Verfügung.

b) Der allgemeine Fall: beliebiger räumlicher Spannungszustand.

$$[\underline{F}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

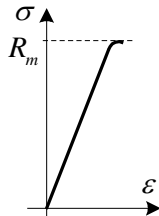
Problem: Hier weiß man nicht, welcher Spannungswert mit σ_{zul} verglichen werden muß.

Lösung des Problems: Bestimmung / Einführung einer Vergleichsspannung.

Vergleichsspannung: Ein Spannungswert, der den Spannungszustand in einem Punkt hinsichtlich der Schädigung eindeutig charakterisiert.

Mit der Einleitung der Vergleichsspannung führt man den allgemeinen Fall auf den Spezialfall zurück.
Es gibt mehrere Theorien zur Definition der Vergleichsspannung.

α) Spröde Materialien / Stoffe:



Spröder Stoff: Es gibt keine plastische Formänderung.

Der Stoff bricht plötzlich nach der elastischen Formänderung.

Z.B.: Gußeisen, Keramik, Glas, ...

Die Theorie nach Coulomb (Normalspannungshypothese):

Es gibt keine Schädigung, wenn die größte Normalspannung kleiner ist, als die Zugfestigkeit des Materials.

Hauptspannungen: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. (sigma eins ist größer oder gleich sigma zwei ...)

Die größte Normalspannung im Punkt P: $\sigma_{\max} = \max(|\sigma_1|, |\sigma_3|)$.

(sigma Maximum ist gleich der maximale Wert aus den Größen Betrag sigma eins und Betrag sigma drei)

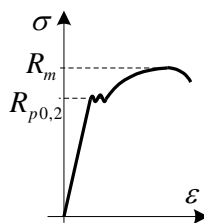
Vergleichsspannung nach Coulomb: $\sigma_v(\text{Coulomb}) = \sigma_{\max} = \max(|\sigma_1|, |\sigma_3|)$.

Dimensionierung / Sicherheitsnachweis:

$$\sigma_{v\max}(\text{Coulomb}) \leq \sigma_{zul} = \frac{R_m}{n},$$

n - vorgeschriebener Sicherheitsbeiwert (aus Norm, oder personeller Entscheidung).

β) Duktile / verformbare Materialien / Stoffe:



Verformbares Material.

Dabei kann auch plastische Formänderung entstehen.

Der Bruch kann nur nach der elastischen und plastischen Formänderung entstehen.

z.B. Metalle, Stahl, Aluminium Legierungen, ...

Die Theorie nach Mohr (Schubspannungshypothese):

Die Materialbeanspruchung kann durch die maximale Schubspannung charakterisiert werden.

Es gibt keine Schädigung, wenn die größte Schubspannung kleiner ist, als der Radius des größten Mohrschen Kreises:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{1}{2}\sigma_v(\text{Mohr})$$

Vergleichsspannung nach Mohr: $\sigma_v(\text{Mohr}) = \sigma_1 - \sigma_3$.

Die Vergleichsspannung nach Mohr ist gleich mit dem Durchmesser des größten Mohrschen Kreises.

Dimensionierung / Sicherheitsnachweis:

$$\sigma_{v\max}(\text{Mohr}) \leq \sigma_{zul} = \frac{\sigma_{kw}}{n}, \quad \sigma_{kw} = \begin{cases} R_{p0.2} \\ R_m \end{cases}$$

Die Theorie nach Huber – Mises - Hencky (Gestaltänderungshypothese):

Die aus zwei Spannungszuständen eines Materials resultierenden Beanspruchungen sind identisch kritisch, wenn die Gestaltänderungsenergiegedichten der beiden Zustände gleich / identisch sind:

$$u_{T_1} = u_{T_2} .$$

Die Definition der Vergleichsspannung nach Huber – Mises - Hencky:

$$\sigma_V (HMH) = \sqrt{6 G u_T} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} ,$$

$$\sigma_V (HMH) = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)]} .$$

Dimensionierung / Sicherheitsnachweis:

$$\sigma_{V \max} (HMH) \leq \sigma_{zul} = \frac{\sigma_{kw}}{n} , \sigma_{kw} = \begin{cases} R_{p0,2} \\ R_m \end{cases} .$$

Der Unterschied zwischen den Vergleichsspannungen ist nicht sehr groß.

Im allgemeinen: $\sigma_V (HMH) < \sigma_V (Mohr)$.

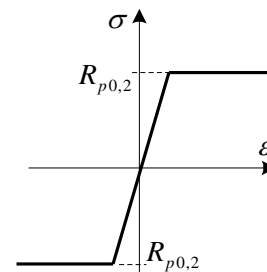
c) Der Gedankengang zur Dimensionierung und zum Sicherheitsnachweis bei Stabtragwerken

- Die Bestimmung des kritischen Querschnittes des Stabtragwerkes erfolgt dort, wo die größten Beanspruchungen auftreten.
- Die Bestimmung der kritischen Punkte am kritischen Querschnitt erfolgt dort, wo σ_V am größten ist.
- Dimensionierung, Sicherheitsnachweis erfolgt in den kritischen Punkten: $\sigma_{V \max} \leq \sigma_{zul}$.

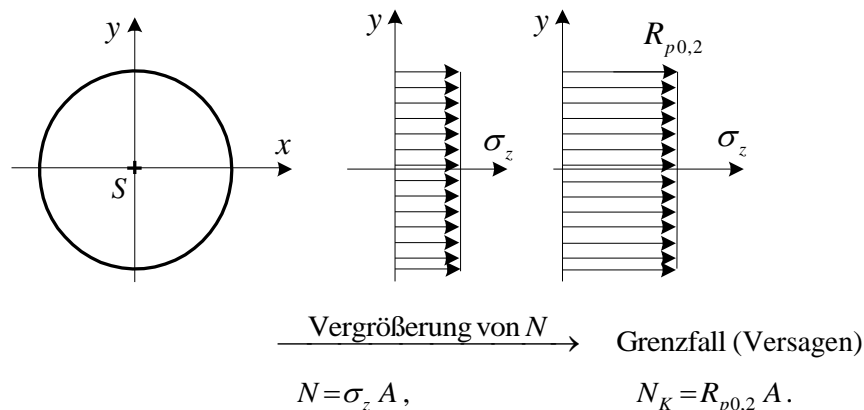
3.2. Dimensionierung bezüglich der Tragfähigkeit und Formänderung

Annahmen: - Der Stoff ist leicht und gut verformbar.

- Der Stoff ist linear elastisch und ideal plastisch.



a) Zug-Druck-Stäbe:



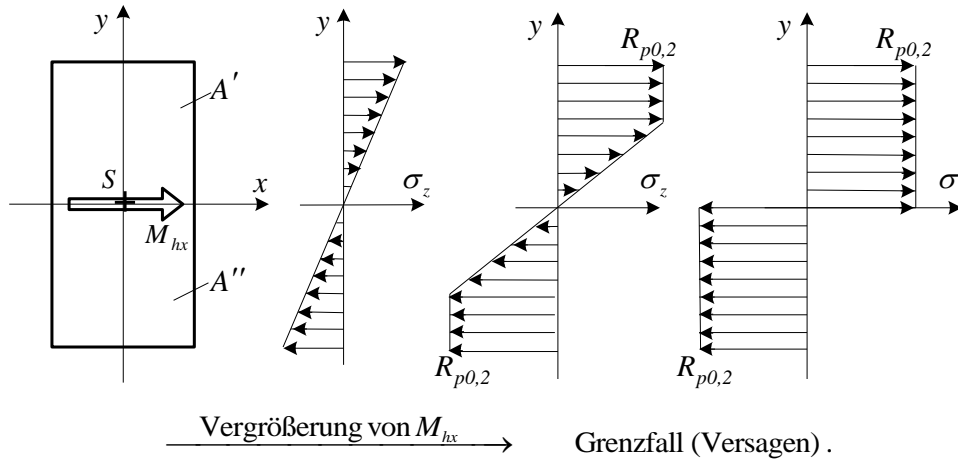
(N_K ist der Grenzwert der Zugkraft/Normalkraft N)

Dimensionierung, Sicherheitsnachweis: $N_{\max} \leq N_{zul} = \frac{N_K}{n_K}$,

N_{\max} - die maximale Normalkraft,

n_K - gegebener / vorgeschriebener Sicherheitsbeiwert.

b) Reine gerade Biegestäbe:



Biegemoment:
$$M_{hx} = \int_{(A)} y \sigma_z dA.$$

(Oberflächenintegral von ypsilon mal sigma zet mit A als Oberfläche und dA als Flächenelement)

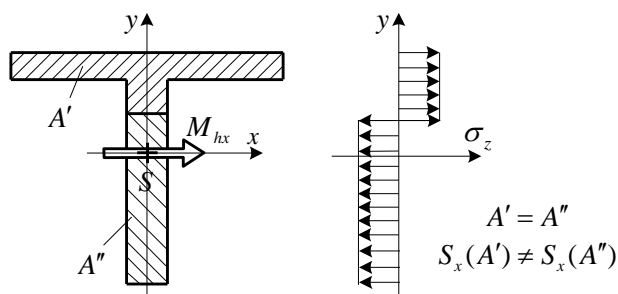
Biegemoment im Grenzfall:
$$M_K = \int_{(A)} y \sigma_z dA = R_{p0,2} \underbrace{\int_{(A')} y dA}_{S_x(A')} + (-R_{p0,2}) \underbrace{\int_{(A'')} y dA}_{S_x(A'')}.$$

$S_x(A')$ ist das statische oder lineare Moment für den Oberflächenteil A'

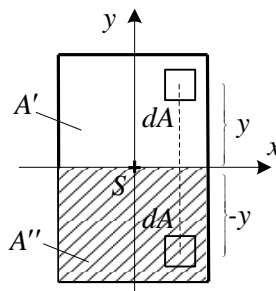
$$M_K = R_{p0,2} [S_x(A') - S_x(A'')].$$

Reine gerade Biegung \Rightarrow aus der Spannungsverteilung ergibt sich keine resultierende Kraft \Rightarrow
 $\Rightarrow A' = A''.$

z.B.:



Querschnitte mit Doppelsymmetrie:



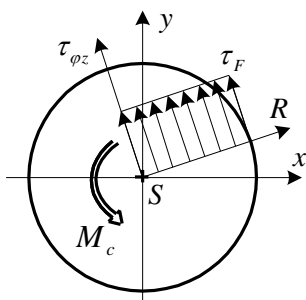
$$S_x = \int_{(A)} y dA, \quad A' = A'' = \frac{A}{2},$$

$$S_x(A'') = -S_x(A').$$

$$M_K = 2R_{p0,2} S_x \left(\frac{A}{2} \right).$$

Dimensionierung, Sicherheitsnachweis: $M_{hx \max} \leq M_{hzul} = \frac{M_K}{n_K}$,

c) Reine Torsion von Kreis- und Kreisringquerschnitten:



Torsionsmoment im Grenzfall:

$$M_{cK} = \int_{(A)} R \tau_F dA = \tau_F \int_{(A)} R dA,$$

S_p – polares lineares (statisches) Moment

$$M_{cK} = \tau_F S_p. \quad \tau_F \text{ ist die Fließgrenze für Schubspannungen.}$$

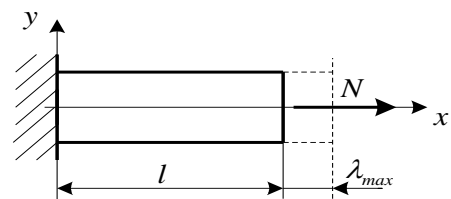
Dimensionierung, Festigkeitsnachweis: $M_{c \max} \leq M_{c \text{zul}} = \frac{M_{cK}}{n_K}$,

d) Dimensionierung bezüglich der Formänderung

Z.B.: Zug-Druck-Stab:

$$\lambda_{\max} = \frac{N}{A E} l, \quad \lambda_{\max} \leq \lambda_{zul}.$$

Bezüglich der Formänderung muß man z.B. Brücken, Werkzeugmaschinen, Werkzeugen, Druckzylindern von Druckmaschinen, usw. dimensionieren



4. Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie

Zustandsgrößen des elastischen Körpers:

- $\vec{u} = \vec{u}(x, y, z)$ Verschiebungsfeld (Vektorenfeld),
- $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(x, y, z)$ Verzerrungsfeld (Tensorfeld),
- $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}(x, y, z)$ Spannungsfeld (Tensorfeld),
- $u = u(x, y, z)$ Formänderungsenergiedichte (skalares Feld).

Frage: Gibt es irgendwelche Zusammenhänge zwischen den Zustandsgrößen?

Antwort: Ja, die bestehenden Zusammenhänge heißen die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie.

Allgemeine Formulierung des Problems:

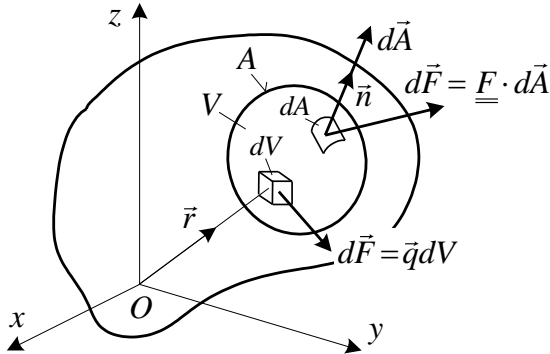
- Gegeben sind: - die Form und Dimensionen des Körpers/Bauteiles,
 - die Materialeigenschaften des Körpers,

- die Belastung und die Abstützung / Lagerung des Körpers.

Gesucht sind: $\underline{\underline{u}}(x, y, z)$, $\underline{\underline{F}}(x, y, z)$, $\underline{\underline{A}}(x, y, z)$, $u(x, y, z)$.

Aufgabe: Es ist das Gleichungssystem der Elastizitätstheorie zu erstellen.

4.1. Gleichgewichtsbedingungen, die Symmetrie des Spannungstensors



Wir betrachten ein beliebiges Volumen V mit der Oberfläche A , das aus dem Gesamtkörper ausgeschnitten ist.

Das Volumen V liegt innerhalb des Körpers.

Volumenkräfte sind zB. die Gravitationskraft (Gewicht), die Trägheitskräfte aus der Beschleunigung des Körpers, usw.

\bar{q} - Dichte / Intensität der Volumenkräfte,

\bar{p} - Dichte / Intensität der Flächenkräfte.

Die Wirkung / der Einfluss der Umgebung auf das Volumen V wird über Kräfte berücksichtigt:

- elementare Volumenkräfte: $d\vec{F} = \bar{q} dV$,

- elementare Flächenkräfte: $d\vec{F} = \bar{p} dA = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} dA$,

wobei dA das skalare und $d\vec{A}$ das vektorielle Flächenelement ist.

Der Körperteil mit dem Volumen V ist im Gleichgewicht:

Die Bedingungen des Gleichgewichtes: a) $\vec{F} = \vec{0}$, b) $\vec{M}_0 = \vec{0}$.

a) Gleichgewichtsbedingungen:

$$\vec{F} = \vec{0} = \int_{(V)} \bar{q} dV + \int_{(A)} \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} dA.$$

Integralsatz von Gauss und Ostrogradsky: $\int_{(A)} \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} dA = \int_{(V)} \underline{\underline{F}} \cdot \nabla dV.$

(Das Oberflächenintegral von dem Tensor F skalar multipliziert mit dem Vektor n mit A als Oberfläche und dA als Flächenelement ist gleich dem Volumenintegral vom Tensor F skalar multipliziert mit dem Vektor grad , mit V als Volumen und dV als Volumenelement)

Der *Hamiltonsche*, oder *Nabla*-Differentialoperator:

- Kartesisches Koordinatensystem: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$, (d nach dx partiell ...)

- Zylindrisches Koordinatensystem: $\nabla = \frac{\partial}{\partial R} \vec{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$.

(...plus eins geteilt durch R mal d nach d φ partiell multipliziert mit Vektor e_φ ...)

Durch Anwendung des Integralsatzes, erhält man: $\vec{F} = \vec{0} = \int_{(V)} (\bar{q} + \underline{\underline{F}} \cdot \nabla) dV.$

Das Integral muß für alle beliebigen Volumina V gleich Null sein \Rightarrow Der Integrand muß verschwinden.

$$\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \bar{q} = \vec{0} \quad \text{Gleichgewichtsbedingung(en).}$$

Vektorengleichung \equiv drei skalare Gleichungen

Die dyadische Form des Spannungstensors: $\underline{\underline{F}} = \vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z.$

Die Volumenkraftdichte: $\vec{q} = q_x \vec{e}_x + q_y \vec{e}_y + q_z \vec{e}_z$.

Die skalaren Gleichungen im kartesischen Koordinatensystem:

$$\left(\vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) + \vec{q} = \vec{0},$$

$$\frac{\partial \vec{\rho}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\rho}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\rho}_z}{\partial z} + \vec{q} = \vec{0}.$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + q_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + q_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ - die skalare Form der Gleichgewichtsgleichungen.}$$

Die Gleichgewichtsbedingung beinhaltet einen Zusammenhang zwischen den Volumenkräften \vec{q} und dem Spannungszustand /den inneren Kräften.

b) Die Symmetrie des Spannungstensors:

$$\vec{M}_0 = \vec{0} = \int_{(V)} \vec{r} \times \vec{q} dV + \int_{(A)} \vec{r} \times \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} dA.$$

\times = Bezeichnung des Kreuzproduktes.

(Volumenintegral von Vektor \vec{r} Kreuz Vektor \vec{q} mit $V \dots$)

(Flächenintegral von Vektor \vec{r} Kreuz Tensor $\underline{\underline{F}}$ skalar multipliziert mit Vektor \vec{n} mit $A \dots$)

Angewendet den Integralsatz von *Gauss* und *Ostrogradsky*:

$$\vec{0} = \int_{(V)} \left(\vec{r} \times \vec{q} + \vec{r} \times \underline{\underline{F}} \cdot \nabla \right) dV.$$

Die Bezeichnung $\vec{r} \times \underline{\underline{F}}$ bedeutet, daß das vollständige Kreuzprodukt $\vec{r} \times \underline{\underline{F}}$ durch den Vektor nabla differenziert werden muß.

Das Integral muß für alle beliebigen Volumina V gleich Null sein \Rightarrow Der Integrand muß verschwinden.

Wir differenzieren den Ausdruck: $\vec{0} = \vec{r} \times \underbrace{\left(\vec{q} + \underline{\underline{F}} \cdot \nabla \right)}_{=\vec{0} \text{ infolge der Gleichgewichtsbedingung}} + \vec{r} \times \underline{\underline{F}} \cdot \nabla.$

Weitere Umformung:

$$\vec{r} \times \underline{\underline{F}} \cdot \nabla = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \underline{\underline{F}} \right) \cdot \vec{e}_x + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \times \underline{\underline{F}} \right) \cdot \vec{e}_y + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \times \underline{\underline{F}} \right) \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_x \times \vec{\rho}_x + \vec{e}_y \times \vec{\rho}_y + \vec{e}_z \times \vec{\rho}_z = \vec{0}.$$

Einführung der Vektorinvariante des Spannungstensors:

$$\vec{F}_x = -\frac{1}{2} (\vec{\rho}_x \times \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \times \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \times \vec{e}_z).$$

Invariante: Die Größe ist vom Koordinatensystem unabhängig. Die Größe ändert sich bei einer Koordinaten-Transformation nicht.

Z.B.: Die Koordinate x des Vektors \vec{F}_x

$$0 = -\vec{F}_x \cdot \vec{e}_x = \frac{1}{2} \left[\underbrace{(\vec{\rho}_x \times \vec{e}_x) \cdot \vec{e}_x + (\vec{\rho}_y \times \vec{e}_y) \cdot \vec{e}_x + (\vec{\rho}_z \times \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_x}_{=0 - \text{gemischtes Produkt}} \right]$$

$$0 = -\vec{\rho}_y \cdot \vec{e}_z + \vec{\rho}_z \cdot \vec{e}_y$$

$$0 = -\tau_{zy} + \tau_{yz} \quad \Rightarrow \quad \tau_{zy} = \tau_{yz}$$

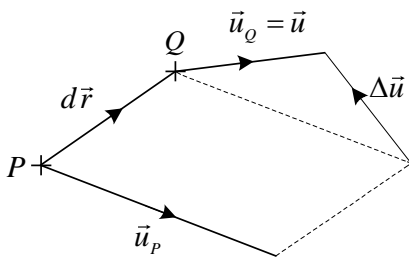
Wenn man auch die anderen Koordinaten des Vektors \vec{F}_x untersucht, erhält man die Symmetrie des Spannungstensors $\underline{\underline{F}}$:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Mathematischer Satz: Die Vektorinvariante jedes symmetrischen Tensors ist gleich Null.

4.2. Kinematische / Geometrische Gleichungen

4.2.1. Der Verschiebungsgradienten-Tensor



Wir untersuchen ein infinitesimales Element des Körpers.

Die Punkte Q und P liegen innerhalb des infinitesimalen Elementes.

$d\vec{r} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$ - infinitesimaler Ortsvektor.

Das Verschiebungsfeld im infinitesimalen Element \equiv die Verschiebung des Punktes Q .

$$\vec{u} = \vec{u}(x, y, z) = u(x, y, z)\vec{e}_x + v(x, y, z)\vec{e}_y + w(x, y, z)\vec{e}_z$$

Die Verschiebung bezogen auf den Punkt P : $\Delta\vec{u} = \vec{u}_Q - \vec{u}_P = \vec{u} - \vec{u}_P$.

Reihenentwicklung (*Taylor'sche Reihe*):

$$\vec{u} = \vec{u}_P + \overbrace{\left. \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \right|_P dx + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \Big|_P dy + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \Big|_P dz}_{\text{linearer Teil}} + \overbrace{((\dots))}_{\text{Glieder höherer Ordnung}}$$

$$\vec{u}_x \quad \vec{u}_y \quad \vec{u}_z$$

(... plus d Vektor u nach dx partiell an der Stelle P mal dx plus ...)

$\Delta\vec{u} \approx d\vec{u}$ ist in dem Fall eine lineare Näherung

Spezielle Fälle: Wenn $dy = dz = 0 \Rightarrow \Delta\vec{u} = \vec{u}_x dx$,

Wenn $dx = dz = 0 \Rightarrow \Delta\vec{u} = \vec{u}_y dy$,

Wenn $dx = dy = 0 \Rightarrow \Delta\vec{u} = \vec{u}_z dz$.

Die spezifischen relativen Verschiebungsvektoren:

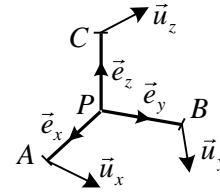
$$\vec{u}_x = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial v}{\partial x} \vec{e}_y + \frac{\partial w}{\partial x} \vec{e}_z,$$

(Die Vektoren sind spezifisch, weil sie sich auf die Endpunkte der Einheitsvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ beziehen und relativ weil sie sich auf den Punkt P beziehen.)

$$\vec{u}_y = \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \vec{e}_x + \frac{\partial v}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial w}{\partial y} \vec{e}_z,$$

$$\vec{u}_z = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} \vec{e}_x + \frac{\partial v}{\partial z} \vec{e}_y + \frac{\partial w}{\partial z} \vec{e}_z.$$

Die Veranschaulichung des relativen Verschiebungszustandes:
 Die Punkte P, A, B, C liegen innerhalb des infinitesimalen Elementes.



Die Änderung des Verschiebungsfeldes (lineare Näherung):

$$\Delta \vec{u} \approx d\vec{u} = \left. \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \right|_P dx + \left. \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \right|_P dy + \left. \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \right|_P dz$$

$$\underbrace{\vec{e}_x \cdot d\vec{r}}_{(\vec{u}_x \circ \vec{e}_x) \cdot d\vec{r}} + \underbrace{\vec{e}_y \cdot d\vec{r}}_{(\vec{u}_y \circ \vec{e}_y) \cdot d\vec{r}} + \underbrace{\vec{e}_z \cdot d\vec{r}}_{(\vec{u}_z \circ \vec{e}_z) \cdot d\vec{r}}$$

(Klammer auf Vektor u_x dyadisch multipliziert mit Vektor e_x Klammer zu skalar multipliziert mit dem Vektor dr plus ...)

Das totale Differential des Verschiebungsfeldes:

$$d\vec{u} = (\vec{u}_x \circ \vec{e}_x + \vec{u}_y \circ \vec{e}_y + \vec{u}_z \circ \vec{e}_z) \cdot d\vec{r} = \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \circ \vec{e}_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \circ \vec{e}_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \circ \vec{e}_z \right) \cdot d\vec{r} = \underline{\underline{D}} \cdot d\vec{r}$$

Der Verschiebungsgradienten - Tensor:

$$d\vec{u} = \underline{\underline{D}} \cdot d\vec{r}$$

$$\underline{\underline{D}} = (\vec{u}_x \circ \vec{e}_x + \vec{u}_y \circ \vec{e}_y + \vec{u}_z \circ \vec{e}_z) \quad \text{dyadische Darstellung}$$

$$\underline{\underline{D}} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \circ \vec{e}_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \circ \vec{e}_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \circ \vec{e}_z$$

$$\underline{\underline{D}} = \vec{u} \circ \nabla \quad \text{- nichtsymmetrischer Tensor}$$

Matrizendarstellung im kartesischen Koordinatensystem

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_x \quad \vec{u}_y \quad \vec{u}_z$$

Skalare Koordinaten des Verschiebungsfeldes:

$$u = u(x, y, z),$$

$$v = v(x, y, z),$$

$$w = w(x, y, z).$$

(... du nach dx partiell ...)

Die Zerlegung des Verschiebungsgradienten: $\underline{\underline{D}} = \underbrace{\frac{1}{2} (\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^T)}_{\text{symmetrischer Teil}} + \underbrace{\frac{1}{2} (\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}^T)}_{\text{antisymmetrischer Teil}}$

4.2.2. Der Verzerrungstensor (der symmetrische Teil)

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^T) = \frac{1}{2} (\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u}).$$

Im Falle kleiner Verzerrungen ist diese Tensor-Gleichung die kinematische / geometrische Gleichung.

Die kinematische Gleichung gibt den Zusammenhang zwischen dem Verschiebungsfeld und dem Verzerrungstensorfeld an.

Die Bezeichnung der Koordinaten / Elemente des Verzerrungstensors:

$$[\underline{\underline{A}}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{\alpha}_x \quad \vec{\alpha}_y \quad \vec{\alpha}_z$$

Der Verzerrungstensor bei Benutzung des Verschiebungsgradienten:

$$[\underline{\underline{A}}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Die skalare Form der kinematischen Gleichungen im kartesischen Koordinatensystem:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Infolge der Symmetrie des Verzerrungstensors $\underline{\underline{A}}$ erhält man sechs skalare Gleichungen.

4.2.3. Der Rotationstensor (der antisymmetrische Teil)

Der Rotationstensor $\underline{\underline{\Psi}}$ gibt die infinitesimale Starrkörperrotation der Umgebung des Punktes P an.

Die Komponenten des Rotationstensors:

$$[\underline{\underline{\Psi}}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{bmatrix}.$$

Der Rotationstensor spielt im Folgenden keine weitere Rolle.

4.3. Stoffgesetze – linear elastisches Material

Stoffgesetz: Zusammenhang zwischen dem Verzerrungs- und dem Spannungszustand.

4.3.1. Allgemeines Hookesches Gesetz für isotropes Material

Isotropes Material: die Materialeigenschaften sind richtungsunabhängig.

Z.B.: Metalle, Stähle, Al-Legierungen, usw.

$$\left. \begin{aligned} \alpha) \underline{\underline{A}} &= \frac{1}{2G} \left(\underline{\underline{F}} - \frac{\nu F_I}{1+\nu} \underline{\underline{E}} \right) \\ \beta) \underline{\underline{F}} &= 2G \left(\underline{\underline{A}} + \frac{\nu A_I}{1-2\nu} \underline{\underline{E}} \right) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{wo } G - \text{ der Schubmodul} \\ \nu - \text{ die Poissonsche Koeffizient} \end{array} \text{ Materialkennwerte.}$$

(... eins geteilt durch zweimal G mal in Klammern Tensor F minus ...)

Die ersten skalaren Invarianten des Verzerrungs-, bzw. Spannungstensors:

$$F_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad A_I = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Die Invarianten ändern sich bei einer Koordinatentransformation nicht.

Die skalaren Gleichungen der Form $\alpha)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right], & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{yx}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_y - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_z - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right], & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G}. \end{aligned}$$

Die skalaren Gleichungen der Form $\beta)$:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right], & \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= 2G \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right], & \tau_{yz} &= G \gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= 2G \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right], & \tau_{xz} &= G \gamma_{xz}. \end{aligned}$$

Die Einführung anderer Materialkennwerte:

a) Das Hookesche Gesetz für den einachsigen Spannungszustand:

Z.B.: Zug- Druck, reine Biegung

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \quad \text{wobei } \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_z.$$

$\sigma_z = E \varepsilon_z$. E – Youngscher Modul (der Elastizitätsmodul), ν - die Poissonsche Zahl.

Das allgemeine Hookesche Gesetz:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= 2G \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] = \\ &= 2G \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (-\nu \varepsilon_z - \nu \varepsilon_z + \varepsilon_z) \right] = 2G [\varepsilon_z + \nu \varepsilon_z] = 2G [1 + \nu] \varepsilon_z. \end{aligned}$$

$$2G = \frac{E}{1+\nu}, \quad \text{oder } E = 2G(1+\nu),$$

wobei E der Youngsche Modul (Elastizitätsmodul) und G der Schubmodul sind.

b) Zusammenhang zwischen den ersten skalaren Invarianten:

$$A_I = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{2G} \left[\underbrace{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}_{F_I} - 3 \frac{\nu}{1+\nu} F_I \right] \Rightarrow A_I = \frac{1}{2G} \frac{1-2\nu}{1+\nu} F_I = \frac{1}{3K} F_I.$$

K – Kompressionsmodul (nicht unabhängiger Materialkennwert)

$$3K = 2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} = \frac{E}{1-2\nu}.$$

c) Die räumliche Dehnung:

$$\frac{dV}{V} = \frac{(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z) - 1 \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot 1} \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = A_I \quad \text{- als lineare Näherung}$$

Die Materialkennwerte des linear elastischen Stoffes:

E, ν, G, K – von diesen Konstanten sind nur zwei unabhängig.

Bemerkung: $A_{II} = 0, F_{II} = 0$, weil die Deviator-Tensoren die Gestaltänderung charakterisieren

Die Matrizenform des Hookeschen Gesetzes für isotropes Material:

Umordnung / Umformung der skalaren Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1+\nu}{E} \left[\sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right] = \frac{1}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma_y - \frac{\nu}{E} \sigma_z, & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1+\nu}{E} \left[\sigma_y - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right] = \frac{1}{E} \sigma_y - \frac{\nu}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma_z, & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1+\nu}{E} \left[\sigma_z - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right] = \frac{1}{E} \sigma_z - \frac{\nu}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma_y, & \gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \tau_{xz}. \end{aligned}$$

Die Matrizenform:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & & & \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & & & \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & & & \\ & & & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}$$

Das Stoffgesetz enthält zwei unabhängige Materialkennwerte.

In Matrixschreibweise: $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\sigma}}$, wobei die Matrix $\underline{\underline{C}}$ die Materialkennwerte enthält.

4.3.2. Allgemeines Hookesches Gesetz für anisotropes Material

Anisotropes Material: die Materialeigenschaften sind richtungsabhängig.

Orthotropes Material: Spezialfall des anisotropen Stoffes; die Materialeigenschaften können mit Materialkennwerten in Richtungen angegeben werden, die zueinander senkrecht sind.

Die meisten faserverstärkten Verbundwerkstoffe (Komposite-Materialien) können mit dem orthotropen Stoffgesetz modelliert werden.

Deshalb beschäftigen wir uns mit diesem Fall.

Verbundwerkstoff / Komposite-Material: ein Material, das aus mehreren Stoffen mit unterschiedlichen Eigenschaften zusammengesetzt ist.

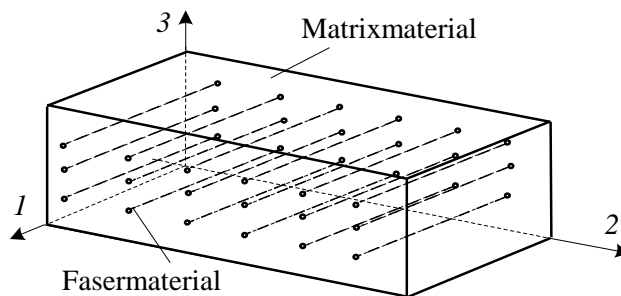
Bestandteile eines Verbundwerkstoffes:

- Versteifung: Glasfaser, Kohlenstoff / Karbonfaser, Aramidfaser (Kevlar), usw.
- Matrixstoff (Bettungsstoff): Epoxidharz, Polyesterharz, Polyamid.

Erfahrung: Der Verbundwerkstoff hat im Allgemeinen bessere mechanische Eigenschaften, als seine einzelnen Bestandteile.

- Vorteile:
- hohe Steifigkeit, hohe Festigkeit,
 - kleine Massendichte, niedriges Eigengewicht.
 - Korrosionswiderstand.

Beispiel: Unidirektional (in gleicher Richtung) versteifter Kunststoff



1, 2, 3 sind die Material-Hauptrichtungen des Verbundwerkstoffes

Die Realität: Der Stoff ist nicht homogen (inhomogen). Die Fasern und die Matrix haben verschiedene Materialeigenschaften.

Das mechanische Modell:

Das Modell ist ein homogener orthotroper Stoff. Dieses Modell gibt die mechanischen Zustände (Verzerrung, Spannung) in den Fasern und nicht in der Matrix wieder. Das Modell beschreibt die durchschnittlichen Zustände eines kleineren Bereiches, der genügend viele Fasern enthält.

Das allgemeine Hookesche Gesetz für orthotropes Material:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & & & \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & & & \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & & & \\ & & & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{bmatrix}$$

E_1, E_2, E_3 – Elastizitätsmoduli in den Richtungen 1, 2, 3,

G_{12}, G_{23}, G_{31} – Schubmoduli, $\nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{31}$ – Poissonsche Koeffizienten .

Z.B.: $\varepsilon_2 = -\nu_{12}\varepsilon_1$

ν_{12} ist die Kontraktionskoeffizient in Richtung 2 im Falle des Zuges in Richtung 1.

Das Stoffgesetz in Matrizenform: $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\sigma}}$.

Das Hookesche Gesetz hat in der Matrizen Schreibweise dieselbe Form, wie im isotropen Fall. Der Unterschied liegt im Inhalt der Matrix $\underline{\underline{C}}$.

Die Eigenschaft der Matrix $\underline{\underline{C}}$: symmetrisch.

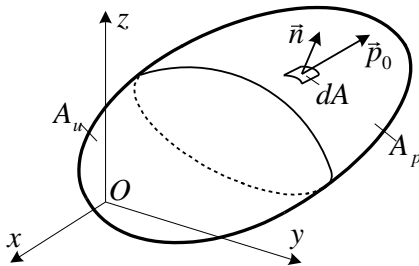
Die Symmetrieeigenschaft der Matrix $\underline{\underline{C}}$ kann mit Energiegründen erklärt / bewiesen werden.

Aus der Symmetrie: $\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}$, $\frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2}$, $\frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1}$.

Das Verhalten / die Eigenschaften des linear elastischen orthotropen Materials können mit 9 unabhängigen Materialkonstanten charakterisiert werden:

$$E_1, E_2, E_3 \mid \nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{13} \mid G_{12}, G_{23}, G_{13} .$$

4.4. Randbedingungen



Die vollständige Oberfläche des Körpers zerlegt man in zwei Teilen:

$$(A) = (A_u) + (A_p) .$$

Dynamische Randbedingungen:

$$\underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} = \vec{p}_0 \quad \text{an der Fläche } A_p .$$

\vec{p}_0 - bekannte Flächenlast.

A_p - der Oberflächenteil, auf dem die Oberflächenbelastung vorgegeben ist.

Kinematische Randbedingungen:

$$\vec{u} = \vec{u}_0 \quad \text{an der } A_u .$$

\vec{u}_0 - bekannte Verschiebung.

A_u - der Oberflächenteil, auf dem die Verschiebungen vorgegeben sind.

4.5. Grundgleichungen der Elastizitätstheorie

Gleichgewichtsgleichungen: $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$ - 3 Differentialgleichungen .

Kinematische Gleichungen: $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} (\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u})$ - 6 Differentialgleichungen .

Stoffgesetz: $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\sigma}}$ - 6 algebraische Gleichungen .

Randbedingungen: $\left. \begin{array}{l} \text{dynamische: } \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}|_{A_p} = \vec{p}_0 \\ \text{kinematische: } \vec{u}|_{A_u} = \vec{u}_0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} - 3 \text{ algebraische Gleichungen,} \\ - 3 \text{ algebraische Gleichungen.} \end{array}$

Unbekannte Feldgrößen: $\vec{u}(x, y, z), \underline{\underline{A}}(x, y, z), \underline{\underline{F}}(x, y, z)$

Insgesamt 15 Unbekannte.

Existenz und Eindeutigkeit der Lösung:

Es ist zu beweisen, dass die Lösung der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie bei gegebenen Randbedingungen existiert und eindeutig ist.

Es gibt eine Lösung und es gibt keine andere.

Exakte Lösung: Die unbekannt Felder $\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{F}}$ befriedigen alle Gleichungen des Gleichungssystems und der Randbedingungen.

Näherungslösung: Die unbekannt Felder $\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{F}}$ befriedigen nicht alle Gleichungen des Gleichungssystems und der Randbedingungen.

4.6. Andere Formen der Kompatibilitätsgleichungen

Kompatibilität: die Komponenten des Verzerrungstensors sind nicht beliebig.

Es gibt einen Zusammenhang zwischen den Komponenten des Verzerrungstensors.

Anfangsgleichung: $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{u}} \circ \nabla + \nabla \circ \underline{\underline{u}})$.

Umformung: Vektorielle Multiplikation der Gleichung sowohl von der linken als auch von der rechten Seite (Kreuzprodukt / Vektorprodukt).

4.6.1. Saint-Venantsche Kompatibilitätsgleichungen

Tensorielle Form der Gleichung: $\nabla \times \underline{\underline{A}} \times \nabla = \underline{\underline{0}}$.

Skalare Gleichungen in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}, & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}, & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}, \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}, & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Weitere Umformung:

Saint-Venantsche Gleichungen + isotropes Hookesches Gesetz + Gleichgewichtsbedingungen \Rightarrow Beltrami-Michell-Gleichungen.

4.6.2. Kompatibilitätsgleichungen nach Beltrami-Michell

Tensorielle Form: $\Delta \underline{\underline{F}} + \frac{1}{1+\nu} F_I \nabla \circ \nabla + \nabla \circ \underline{\underline{q}} + \underline{\underline{q}} \circ \nabla + \frac{\nu}{1-\nu} (\underline{\underline{q}} \cdot \nabla) \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{0}}$

Skalare Gleichungen in kartesischen Koordinaten:

$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - der Laplacesche Differentialoperator

$$\nabla \circ \nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{bmatrix},$$

$$\nabla \circ \vec{q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} [q_x \quad q_y \quad q_z] = \begin{bmatrix} \frac{\partial q_x}{\partial x} & \frac{\partial q_y}{\partial x} & \frac{\partial q_z}{\partial x} \\ \frac{\partial q_x}{\partial y} & \frac{\partial q_y}{\partial y} & \frac{\partial q_z}{\partial y} \\ \frac{\partial q_x}{\partial z} & \frac{\partial q_y}{\partial z} & \frac{\partial q_z}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (\nabla \circ \vec{q}) = (\vec{q} \circ \nabla)^T.$$

Skalare Gleichungen, die zu den Komponenten in der Hauptdiagonalen des Tensors gehören:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial q_z}{\partial z} + \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Skalare Gleichungen, die zu den Komponenten außerhalb der Hauptdiagonalen gehören:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial x \partial y} + \frac{\partial q_y}{\partial x} + \frac{\partial q_x}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial x \partial z} + \frac{\partial q_z}{\partial x} + \frac{\partial q_x}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial y \partial z} + \frac{\partial q_y}{\partial z} + \frac{\partial q_z}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$