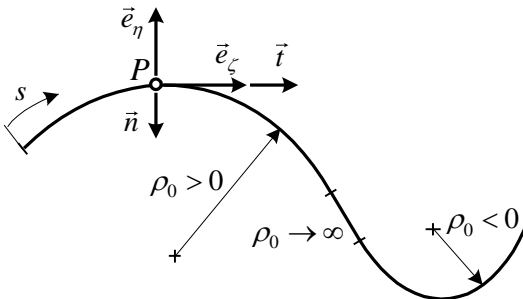


5. Balken und Stäbe

5.1. Die *Grashofsche* Theorie der gekrümmten Balken /Stäbe

Ebener gekrümmter Balken/Stab: die Mittellinie (Biegelinie) des Balkens ist eine ebene Kurve.

Bezeichnungen, Vorzeichen:



Die Lage eines Punktes P auf der Biegelinie ist durch die Bogenkoordinate s (Bogenlänge) gegeben.

Im Punkt P wird ein lokales Koordinatensystem definiert:

$$\vec{e}_x = \vec{e}_\xi, \vec{e}_y = \vec{e}_\eta, \vec{e}_z = \vec{e}_\zeta.$$

ρ_0 - der Krümmungsradius der Biegelinie vor der Formänderung,

ρ - der Krümmungsradius der Biegelinie nach der Formänderung.

Vorzeichen:

- $\rho_0 > 0$, wenn der Krümmungsmittelpunkt auf der rechten Seite der Kurve liegt.
- $\rho_0 < 0$, wenn der Krümmungsmittelpunkt auf der linken Seite der Kurve liegt.

Wir fahren die Kurve in Richtung der Bogenkoordinate s entlang.

Die Belastung des Balkens: $\vec{f} = f_t \vec{t} + f_n \vec{n}$ - Linienbelastung

Gleichgewichtsbedingungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN}{ds} - \frac{T_\eta}{\rho_0} + f_t &= 0, \\ \frac{N}{\rho_0} + \frac{dT_\eta}{ds} - f_n &= 0, \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

Die Längskraft $N(s)$ und die Querkraft $T_\eta(s)$ sind voneinander nicht unabhängig.

$$\frac{dM_{hx}}{ds} + T_\eta = 0.$$

Der Zusammenhang zwischen dem Biegemoment M_{hx} und der Querkraft T_η ist derselbe wie beim geraden Balken.

Beanspruchungen: sie können nach der Definition der Beanspruchungen aus den Belastungen bestimmt werden.

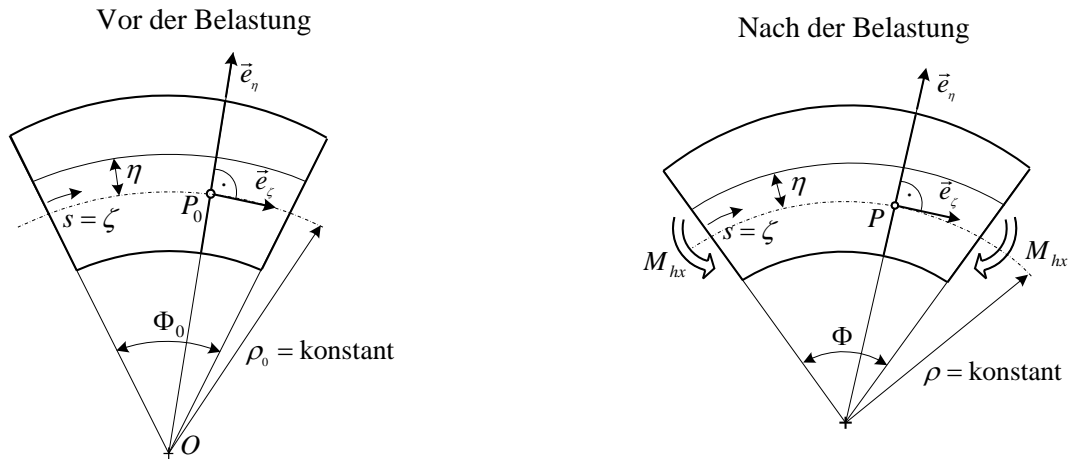
Die zu lösenden Aufgaben:

- Bestimmung der Formänderungskennwerte.
- Bestimmung der Spannungen.

5.1.1. Formänderungskennwerte

Voraussetzungen:

- Die Form der Mittellinie des Balkens ist ein Kreisbogen mit dem Radius ρ_0 .
- Der Balken ist prismatisch und die Achse η ist die Symmetrieachse des Querschnittes.
- Die Beanspruchung des Balkens ist reine Biegung.
- Im Balken gibt es einen einachsigen Spannungszustand.

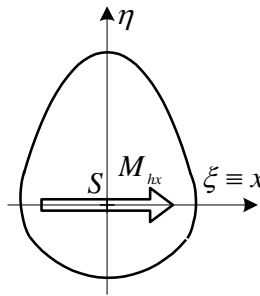


Der Querschnitt des Stabes:

η - Symmetrieachse



ξ, η - die Hauptachsen der Trägheitsmomente des Querschnittes.



Annahmen für die Formänderung:

- Unter Belastung / Formänderung bleiben die Querschnitte eben und senkrecht zur Mittel-linie des Balkens (*Bernoullische Hypothese*).
- Der ursprüngliche Kreisbogen mit dem Radius ρ_0 verformt sich zu einem Kreisbogen mit dem Radius ρ .

Die spezifische Längenänderung der Linie in Abhängigkeit von η : $\varepsilon_\zeta = \frac{(\rho + \eta)\Phi - (\rho_0 + \eta)\Phi_0}{(\rho_0 + \eta)\Phi_0}$.

Der Spannungszustand ist einachsig:

$$\sigma_\zeta = E \varepsilon_\zeta = E \left(\frac{(\rho + \eta)\Phi}{(\rho_0 + \eta)\Phi_0} - 1 \right), \quad \sigma_\zeta = \sigma_\zeta(\eta) \text{ - eine hyperbolische Funktion.}$$

Wenn $M_{hx} > 0$ ist, dann wird $\rho < \rho_0$ und $\Phi > \Phi_0$.

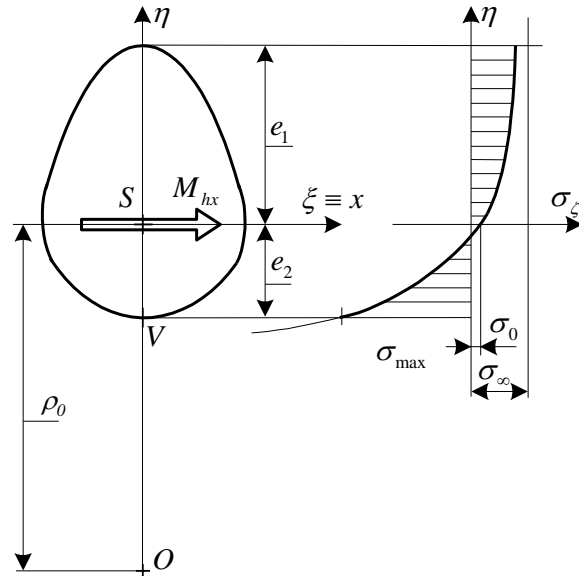
Die Asymptoten der Hyperbel:

$$\eta \rightarrow -\rho_0, \text{ dann } \sigma_\zeta \rightarrow -\infty, \quad \eta \text{ strebt gegen unendlich.}$$

$$\eta \rightarrow \infty, \text{ dann } \sigma_\zeta \rightarrow \sigma_\infty = E \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} - 1 \right),$$

$$\eta = 0, \text{ dann } \sigma_\zeta = E \left(\frac{\rho}{\rho_0} \frac{\Phi}{\Phi_0} - 1 \right) = \sigma_0.$$

Veranschaulichung der Spannungsverteilung:



5.1.2. Zusammenhang zwischen der Spannung und der Beanspruchung / dem Biegemoment

a) Die resultierende Kraft:
$$\vec{F}_S = \int_{(A)} \vec{\rho}_\zeta dA = \vec{e}_\zeta \int_{(A)} \sigma_\zeta dA = \vec{0}.$$

* $\int_{(A)} \sigma_\zeta dA = \vec{0} \Rightarrow \sigma_{\max}$ liegt im Allgemeinen auf der Seite des Krümmungsmittelpunktes an der äußeren Randfaser.

b) Das resultierende Moment:
$$\vec{M}_S = \int_{(A)} \vec{R} \times \vec{\rho}_\zeta dA = \int_{(A)} (\xi \vec{e}_\xi + \eta \vec{e}_\eta) \times \sigma_\zeta \vec{e}_\zeta dA = M_{hx} \vec{e}_\xi.$$

Skalare Gleichungen:

$$\int_{(A)} \xi \sigma_\zeta dA = 0$$
 Die Gleichung ist identisch Null, wenn die Achse η die Symmetrieachse des Querschnittes ist.

*
$$\int_{(A)} \eta \sigma_\zeta dA = M_{hx}.$$

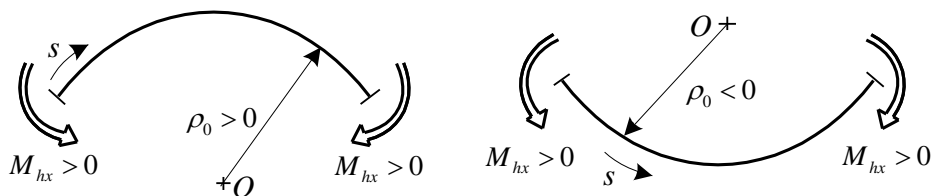
In den Gleichungen * kann ρ und Φ durch das Biegemoment M_{hx} ausgedrückt werden.

Die Grashofsche Formel:
$$\sigma_\zeta = \frac{M_{hx}}{\rho_0 A} + \frac{M_{hx}}{I_r} \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta}.$$

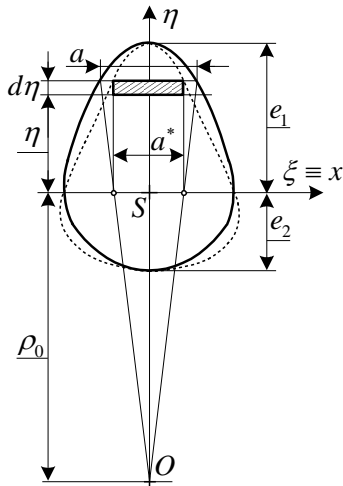
Bezeichnung:
$$\sigma_0 = \frac{M_{hx}}{\rho_0 A}.$$

Das reduzierte axiale Flächenträgheitsmoment:
$$I_r = \int_{(A)} \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta} \eta^2 dA. \quad (\text{Im Allgemeinen: } I_r > I_\xi)$$

Vorzeichenregel:



5.1.3. Die Veranschaulichung des axialen Flächenträgheitsmomentes



Definition:
$$I_r = \int_{(A)} \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta} \eta^2 dA.$$

Aus ähnlichen Dreiecken:

$$\frac{a}{\rho_0 + \eta} = \frac{a^*}{\rho_0} \Rightarrow a^* = \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta} a.$$

$$I_r = \int_{(A)} \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta} \eta^2 a d\eta = \int_{(A)} \eta^2 a^* d\eta = I_\xi^*.$$

Man muss das Moment I_ξ für einen modifizierten Querschnitt bestimmen.

$$e_{\max} = \max(e_1, e_2)$$

Maß der Krümmung des Biegestabes:

$\frac{\rho_0}{e_{\max}}$ – Dieser Quotient charakterisiert das Maß der Krümmung des Stabes.

- Wenn $\frac{\rho_0}{e_{\max}}$ klein ist, dann ist der Stab stark gekrümmt.

- Wenn $\frac{\rho_0}{e_{\max}}$ groß ist, dann ist der Stab nur schwach gekrümmt.

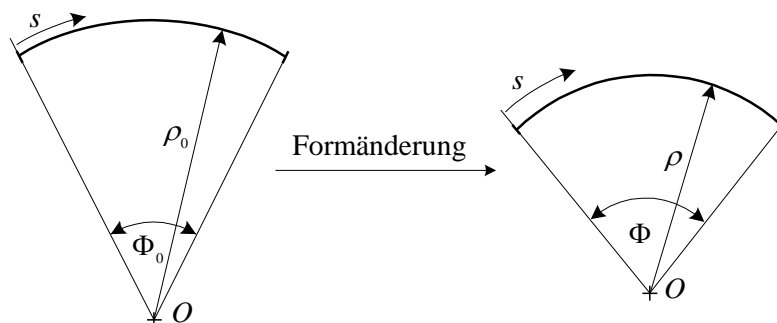
5.1.4. Die Anwendbarkeit der Theorie

- Wenn $\frac{\rho_0}{e_{\max}} < 3-4$, dann werden die *Grashofsche* Formel und das Trägheitsmoment I_r verwendet.

- Wenn $3-4 < \frac{\rho_0}{e_{\max}} < 8-10$, dann werden die *Grashofsche* Formel und $I_r \approx I_\xi$ verwendet.

- Wenn $\frac{\rho_0}{e_{\max}} > 8-10$, dann kann der Fall als gerader Stab betrachtet werden: $\sigma_\zeta = \frac{M_{hx}}{I_\xi} \eta$.

5.1.5. Die kinematischen Kenngrößen der Mittellinie



Die Änderung der Krümmung der Mittellinie:
$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{M_{hx}}{I_r E}.$$

Die Winkeländerung der Endquerschnitte:
$$\psi = \Phi - \Phi_0 = \frac{M_{hx}}{I_r E} \rho_0 \Phi_0 = \frac{M_{hx}}{I_r E} l,$$

l - die Länge der Mittellinie des Balkens.

5.1.6. Die Verallgemeinerung der Ergebnisse

- Die Beanspruchungen des ebenen gekrümmten Balkens entsprechen den allgemeinen ebenen Beanspruchungen: N, T_η, M_{hx} .
- Die Mittellinie ist kein Kreisbogen. Es wird aber angenommen, dass sich der Krümmungsradius nur langsam und nur in geringem Maße entlang der Mittellinie des Balkens ändert.
- Der Balken ist nicht prismatisch, aber es wird angenommen, dass sich der Querschnitt nur langsam und nur in geringem Maße entlang der Mittellinie des Balkens ändert.

Näherungslösung (Superposition):

$$\text{Biegung: } \sigma'_\zeta = \frac{M_{hx}}{A\rho_0} + \frac{M_{hx}}{I_r} \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta} \eta,$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Zug/Druck: } \sigma''_\zeta = \frac{N}{A} \\ \text{Schub: } \tau_{\eta\zeta} = -\frac{T_\eta S_\zeta(\eta)}{I_\zeta a(\eta)} \end{array} \right\} \text{Zusammenhänge für gerade Stäbe.}$$

Bei stark gekrümmten Balken sind die obigen Zusammenhänge nicht mehr gültig.

Die Formänderungsenergie:

$U \approx U_{\text{Biege}}$ Bei Balken sind im Allgemeinen die aus der Biegung stammenden Formänderungsenergieanteile dominant.

$$U \approx \frac{1}{2} \int_{(l)} \frac{M_{hx}}{I_r E} ds.$$

Die Arbeitssätze von *Betti* und *Castigliano* sind in der gleichen Form wie bei Balken mit gerader Mittellinie gültig.

5.2. Reine Torsion prismatischer Stäbe

Reine Torsion (Saint Venantsche Torsion):

Bei der Torsion von Stäben mit einem nichtkreisförmigen Querschnitt kann man eine Verwölbung der Querschnittsfläche in Richtung der Stabachse beobachten.

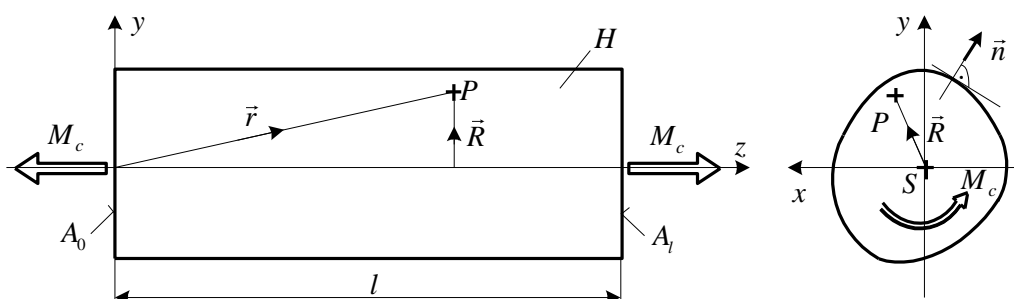
Wenn die eintretende Verwölbung nicht behindert ist ($\sigma_z = 0$), spricht man von reiner Torsion.

Wölbkrafttorsion:

Wenn die Verschiebungen in Richtung der Stabachse behindert werden ($\sigma_z \neq 0$), spricht man von Wölbkrafttorsion.

Die Wölbkrafttorsion spielt besonders bei Stäben mit dünnwandigen Querschnitten eine wichtige Rolle.

5.2.1. Reine Torsion – exakte Lösung



Reine Torsion: Bei der Torsion von Stäben mit einem nichtkreisförmigen Querschnitt kann man eine Verwölbung der Querschnittsfläche in Richtung der Stabachse beobachten. Wenn die eintretende Verwölbung nicht behindert ist ($\sigma_z = 0$), spricht man von reiner Torsion.

Voraussetzungen:

- $\vec{q} = \vec{0}$,
- die Mantelfläche H des Stabes ist unbelastet: ($\vec{\rho}_n = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} = \vec{0}$),
- Bestimmte Spannungskomponenten sind Null: $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$,
- Die Beanspruchungen: $\int_{(A)} \vec{\rho}_z dA = \vec{0}$, $\int_{(A)} \vec{R} \times \vec{\rho}_z dA = M_c \vec{e}_z$.

- Dynamische Randbedingungen:
- (H) ist unbelastet $\Rightarrow \vec{\rho}_n = \vec{0}$.
 - $\int_{(A)} \vec{\rho}_z dA = \vec{0}$, $\int_{(A)} \vec{R} \times \vec{\rho}_z dA = M_c \vec{e}_z$.

- auf (A_0) gelten dieselben, wie auf (A_l)

Spannungszustand:

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{wobei} \quad \begin{aligned} \tau_{xz} &= \tau_{xz}(x, y), \\ \tau_{yz} &= \tau_{yz}(x, y). \end{aligned}$$

Gleichgewichtsbedingungen:

$$\left. \begin{aligned} 0 + 0 + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ 0 + 0 + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad \text{Beide Gleichungen sind gleich Null, weil die Schubspannungen nur von } x, y \text{ abhängen.}$$

Die 3. Gleichgewichtsbedingung: $\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + 0 = 0$.

Die Erfüllung dieser Gleichung wird mit Hilfe der Einführung einer Spannungsfunktion $U(x, y)$ erreicht.

Die Prandtl'sche Spannungsfunktion

$U(x, y)$ - eine mindestens zweimal differenzierbare Funktion der Ortskoordinaten x, y .

Die Berechnung der Spannungskomponenten: $\tau_{zx} = \tau_{xz} = \frac{\partial U}{\partial y}$, $\tau_{zy} = \tau_{yz} = -\frac{\partial U}{\partial x}$.

Eingesetzt in die Gleichgewichtsbedingung 3.: $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0$. Es ist identisch gleich Null.

Der Spannungsvektor:

$$\vec{\rho}_z = \tau_{xz} \vec{e}_x + \tau_{yz} \vec{e}_y = \vec{\tau}_z.$$

$$\vec{\rho}_z = \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_x - \frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_y = \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y \right)}_{(\nabla U)} \times \vec{e}_z = (\nabla U) \times \vec{e}_z.$$

$$\vec{\rho}_z = (\nabla U) \times \vec{e}_z.$$

Die Spannungsfunktion $U(x, y)$ muss noch die folgenden Bedingungen erfüllen:

- Randbedingungen,
 - Kompatibilitätsbedingungen,
 - Das Hookesche Gesetz,
- } *Beltrami - Michell-Gleichungen.*

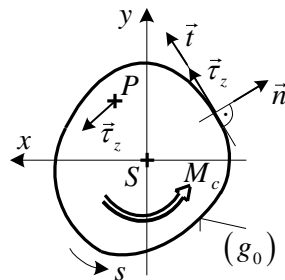
Die Erfüllung der Randbedingungen:

- Die Mantelfläche ist unbelastet:

$$\underline{\underline{\rho}}_n = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{0}}, \quad \underline{\underline{\rho}}_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0,$$

$$\underline{\underline{\tau}}_z \cdot \underline{\underline{n}} = 0.$$



Am Querschnittsrand verläuft die Schubspannung in tangentialer Richtung.

Umformungen: $\underline{\underline{\tau}}_z \cdot \underline{\underline{n}} = (\nabla U) \times \underline{\underline{e}}_z \cdot \underline{\underline{n}} = (\nabla U) \cdot \underbrace{(\underline{\underline{e}}_z \times \underline{\underline{n}})}_{\underline{\underline{t}}} = \underbrace{(\nabla U) \cdot \underline{\underline{t}}}_{\substack{\text{Ableitung} \\ \text{in Richtung } s}} = \frac{\partial U}{\partial s} = 0.$

$(g_0) \quad U = \text{konstant} = 0.$ - eine willkürliche, aber zweckmäßige Wahl.

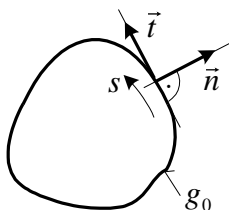
- Querschnitt (A_l) (das rechtsseitige Ende des Stabes):

Die resultierende Kraft: $\underline{\underline{F}} = \int_{(A_l)} \underline{\underline{\rho}}_z dA = \underline{\underline{0}}.$

Beweis:

Umformung: nach dem Einsetzen der Definition von $\underline{\underline{\rho}}_z$: $\int_{(A_l)} \underline{\underline{\rho}}_z dA = \int_{(A_l)} (\nabla U) \times \underline{\underline{e}}_z dA.$

Bezeichnung: Das Produkt \otimes kann beliebig eines von den Produkten $\left\{ \begin{matrix} \cdot \\ \times \\ \circ \end{matrix} \right\}$ sein.



Der *Gaußsche - Ostrogradskysche* Integralsatz:

$$\int_{(A)} \nabla \otimes \underline{\underline{C}} dA = \oint_{(g_0)} \underline{\underline{C}} \otimes \underline{\underline{n}} ds.$$

Anwendung des Integralsatzes:

$$\int_{(A_I)} (\nabla U) \times \vec{e}_z dA = \oint_{(g_0)} \vec{e}_z \times U \vec{n} ds = \oint_{(g_0)} U \vec{t} ds = U \oint_{(g_0)} \vec{t} ds = \vec{0}.$$

weil $U|_{g_0} = \text{konstant}$ und $\oint_{(g_0)} \vec{t} ds = \vec{0}$.

Die Gleichung $\vec{F} = \vec{0}$ ist dann gültig, wenn die Spannungsfunktion U am Rand (g_0) des Querschnittes gleich Null ist. (Das ist die vorherige Randbedingung für U .)

Das resultierende Moment:
$$\vec{M}_S = \int_{(A_I)} \vec{R} \times \vec{\rho}_z dA = M_c \vec{e}_z.$$

Umformung:

$$\begin{aligned} M_c \vec{e}_z &= \int_{(A_I)} \vec{R} \times (\nabla U \times \vec{e}_z) dA = \int_{(A_I)} [(\nabla U) \underbrace{(\vec{R} \cdot \vec{e}_z)}_{=0} - \vec{e}_z (\vec{R} \cdot \nabla U)] dA = \\ &= -\vec{e}_z \int_{(A_I)} (\vec{R} \cdot \nabla U) dA = -\vec{e}_z \int_{(A_I)} [(\nabla \cdot \vec{R} U) - (\nabla \cdot \vec{R}) U] dA = \\ &= -\vec{e}_z \underbrace{\int_{(A_I)} (\nabla \cdot \vec{R} U) dA}_{=0} + \vec{e}_z \int_{(A_I)} \underbrace{(\nabla \cdot \vec{R}) U}_{=2} dA, \\ &\quad \uparrow \end{aligned}$$

Anwendung des *Gaußschen* Satzes auf das erste Integralglied:

$$\int_{(g_0)} (\vec{n} \cdot \vec{R} U) ds = 0, \text{ weil } U|_{g_0} = 0.$$

Das Torsionsmoment:
$$M_c = \int_{(A_I)} (\nabla \cdot \vec{R}) U dA = \int_{(A_I)} 2U dA.$$

$$\nabla \cdot \vec{R} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y \right) \cdot (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y) = 1 + 1 = 2.$$

Auch das Torsionsmoment kann mittels der Spannungsfunktion $U(x, y)$ dargestellt werden:

$$M_c = 2 \int_{(A)} U dA.$$

Die Erfüllung der *Beltrami - Michellschen* Kompatibilitätsgleichungen:

$$\Delta \tau_{xz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial x \partial z} = 0, \quad \Delta \tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial y \partial z} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 F_I}{\partial x \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 F_I}{\partial y \partial z} = 0, \quad \text{weil } F_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 0.$$

Setzen wir die Schubspannungen ein:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \tau_{xz} = \Delta \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (\Delta U) = 0 \\ \Delta \tau_{yz} = -\Delta \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} (\Delta U) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta U = \text{konstant.}$$

Nach dem Einsetzen des *Hookeschen* Gesetzes und der kinematischen Gleichungen:

$$\Delta U = -2G\vartheta - \text{Poissonsche partielle Differentialgleichung,}$$

wobei G der Schubmodul (Materialkennwert) und

ϑ die spezifische Verdrehung \equiv Drillung sind.

Die Bestimmung des Verschiebungsfeldes:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow u = u(y, z),$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow v = v(x, z),$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow w = w(x, y).$$

Wenn $u = -y f(z)$ und $v = x f(z)$ dann $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -f + f = 0$.

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -y \frac{df}{dz} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{xz}(x, y) = \frac{\tau_{xz}(x, y)}{G},$$

In dieser Gleichung ist $\gamma_{xz} = \gamma_{xz}(x, y)$, weil τ_{xz} nur von x, y abhängt.

$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} = 0 = -y \frac{d^2 f}{dz^2} + 0 \Rightarrow f(z) = \vartheta z, \text{ wobei } \vartheta = \text{konstant (Drillung).}$$

Nach dem gleichen Gedankengang für $\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \Rightarrow f(z) = \vartheta z$.

Das Verschiebungsfeld:

$$\left. \begin{aligned} u(y, z) &= -\vartheta y z \\ v(x, z) &= \vartheta x z \\ w(x, y) &= w(x, y) \end{aligned} \right\}$$

Die skalaren Verschiebungsfelder erfüllen jede kinematische Gleichung.

Der Verschiebungsvektor:

$$\vec{u}(x, y, z) = \underbrace{\vartheta z \vec{e}_z \times \vec{R}}_{\text{Der Querschnitt verdreht sich um den Winkel } \psi_z = \vartheta z} + \underbrace{w(x, y) \vec{e}_z}_{\text{die Punkte des Querschnittes verschieben sich in Achsenrichtung}}$$

$\psi_z = \vartheta z$ - die Verdrehung des Querschnittes z gegenüber dem Querschnitt $z=0$.

Zusammenfassung der Ergebnisse:

Die Lösung der reinen Torsion prismatischer Stäbe kann auf die Bestimmung der Spannungsfunktion $U(x, y)$ zurückgeführt werden.

$U(x, y)$ – die *Prandtl'sche* Spannungsfunktion ist nicht beliebig.

1) Die Funktion muß erfüllen:

$$\Delta U = -2G\vartheta \quad \text{die Poissonsche partielle Differentialgleichung,}$$

$$U|_{g_0} = 0 \quad \text{die Randbedingung.}$$

2) Die Darstellung des Torsionsmomentes und der Schubspannung:

$$M_c = 2 \int (A) U(x, y) dA, \quad \tau_z = (\nabla U) \times \vec{e}_z.$$

Die Einführung einer Spannungsfunktion mit rein geometrischem Inhalt

$$U(x, y) = G \vartheta U_0(x, y) \quad \Rightarrow \quad U_0(x, y) = \frac{1}{G \vartheta} U(x, y)$$

$U_0(x, y)$ hängt ausschließlich von der Geometrie des Querschnittes ab.

Die Gleichungen, die erfüllt werden müssen.

1) $\Delta U_0 = -2$, die *Poissonsche*-Gleichung,

$U_0|_{g_0} = 0$, die Randbedingung für die Spannungsfunktion.

$$2) M_c = 2 G \vartheta \int (A) U_0(x, y) dA = G \vartheta I_c,$$

$$I_c = 2 \int (A) U_0(x, y) dA \quad \text{das Torsionträgheitsmoment des Querschnittes.}$$

Die Schubspannung: $\vec{\tau}_z = G \vartheta (\nabla U_0) \times \vec{e}_z$.

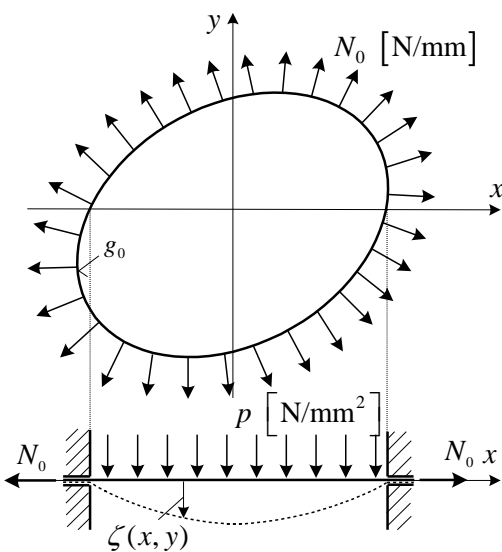
Die Drillung / die spezifische Verdrehung: $\vartheta = \frac{M_c}{G I_c}$.

Die Verdrehung: $\psi_z = \frac{M_c}{G I_c} z$.

Die Membran-Analogie nach Prandtl:

Die Analogie besteht zwischen der Spannungsfunktion und der Form einer gespannten und aufgeblasenen Membran.

Grundlage der Analogie: Identität der Differentialgleichung und der Randbedingung.



N_0 - Spannkraft (Linienlast),
 p - Druck (Flächenlast).

Die Membran wird über einer Bohrung aufgespannt.

Die Form der Bohrung ist mit dem Querschnitt identisch.

Die Differentialgleichung der aufgeblasenen Membran: $\Delta \zeta = -\frac{p(x, y)}{N_0}$.

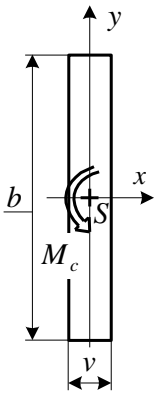
Randbedingung $\zeta|_{g_0} = 0$.

Analogie: die Differentialgleichung und die Randbedingung sind mit der Differentialgleichungen und der Randbedingungen der reinen Torsion identisch.

5.2.2. Reine Torsion - Näherungslösung

a) Reine Torsion von Stäben mit offenen dünnwandigen Querschnitten

- Dünnere Rechteckquerschnitt (dünnwandig)



Näherungsspannungsfunktion: $U = G \vartheta \left(\frac{v^2}{4} - x^2 \right)$.

Die Poissonsche Gleichung: $\frac{\partial U}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial y^2} = -2G\vartheta$,
 $-2G\vartheta + 0 = -2G\vartheta$

Randbedingung: $x = \pm \frac{v}{2}$ $U = 0$ - erfüllt,

$y = \pm \frac{b}{2}$ $U \neq 0$ - nicht erfüllt.

Die Spannungsfunktion $U(x, y)$ erfüllt die Randbedingung auf einem kurzen Teil des Randes nicht (Annäherung!).

Die Spannungen: $\tau_{xz} = \frac{\partial U}{\partial y} = 0$, $\tau_{yz} = -\frac{\partial U}{\partial x} = 2G\vartheta x$ (eine lineare Verteilung).

Das Torsionsmoment: $M_c = 2 \int_{(A)} U dA \cong 2G\vartheta b \int_{x=-\frac{v}{2}}^{\frac{v}{2}} \left(\frac{v^2}{4} - x^2 \right) dx = G\vartheta \frac{bv^3}{3}$,
 I_c

$M_c = G\vartheta I_c$.

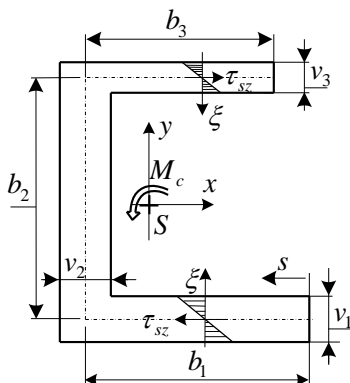
Torsionsträgheitsmoment: $I_c = \frac{bv^3}{3}$.

Umformung: $G\vartheta = \frac{M_c}{I_c}$.

Die Spannungen: $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{yz} = \frac{M_c}{I_c} 2x \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{M_c}{I_c} v$.

- Dünnwandiger zusammengesetzter Querschnitt:

Die Verallgemeinerung der Ergebnisse des dünnen Rechteckquerschnittes.

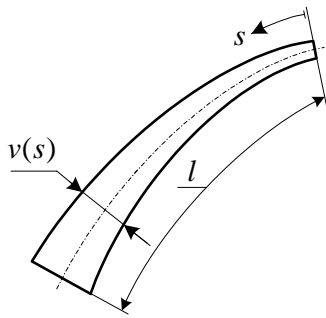


$I_c = \sum_{i=1}^3 \frac{b_i v_i^3}{3}$,

$\tau_{sz} = \frac{M_c}{I_c} 2\xi$,

$M_c = G\vartheta I_c$.

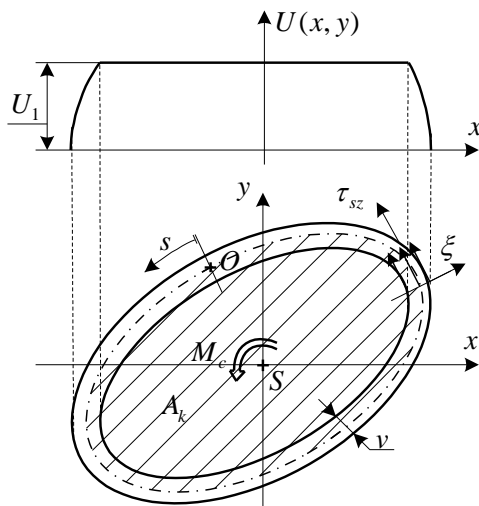
- Dünnere gekrümmter Querschnitt:



$$I_c = \frac{1}{3} \int_{(l)} v^3 ds.$$

Die weiteren Zusammenhänge bleiben unverändert.

b) Reine Torsion von Stäben mit geschlossenen dünnwandigen Querschnitten



Näherungsspannungsfunktion:

$$U(\xi, \eta) = -\frac{U_1}{v} \xi + h.$$

Wir nehmen an, dass die Funktion $U(\xi, \eta)$ eine lineare Funktion entlang der Wanddicke ist.

$$\text{Spannungsverteilung: } \tau_{sz} = -\frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{U_1}{v} = \text{konst.}$$

Die stufenweise Näherung der linearen Funktion $U(\xi, \eta)$:

$$M_c = 2 \int_{(A)} U dA \cong 2 A_k U_1 \Rightarrow U_1 = \frac{M_c}{2 A_k}.$$

$$\tau_{sz} = \frac{U_1}{v} = \frac{M_c}{2 A_k v} \text{ - die Bredtsche Formel.}$$

Das Torsionsträgheitsmoment des geschlossenen dünnwandigen Querschnittes: $I_c = \frac{4 A_k^2}{\oint \frac{1}{v} ds}.$