

## 6. 2D-Aufgaben der Elastizitätstheorie

2D – zweidimensional

Die charakteristischen Merkmale der 2D-Aufgaben:

- Zwei skalare Verschiebungsfelder sind nicht null
- Alle mechanischen Größen hängen von zwei Ortskoordinaten ab

Typen der 2D-Aufgaben:

Ebener Verzerrungszustand (EVZ)

Ebener Spannungszustand (ESZ)

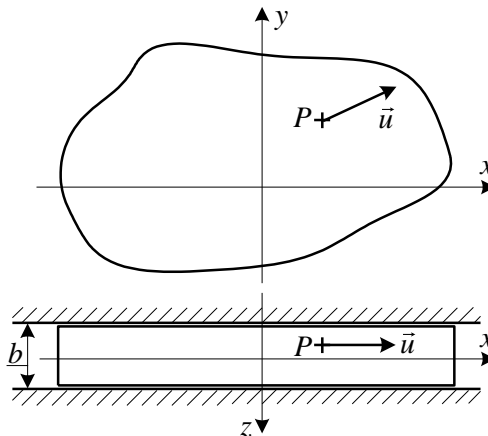
Axialsymmetrische / rotationsymmetrische Aufgaben

### 6.1. Ebener Verzerrungszustand (EVZ)

Definition:

- Es gibt eine ausgewählte Ebene. Der Verzerrungszustand dieser Ebene bestimmt den Verzerrungszustand aller anderen Ebenen, die zu dieser Ebene parallel sind. Der Abstand zwischen den parallelen Ebenen ändert sich nicht.
- Die Verschiebungscoordinate in einer Koordinatenrichtung ist überall null und die beiden anderen Komponenten hängen nicht von dieser Koordinate ab.

$$\vec{u} = \vec{u}(x, y) = u(x, y)\vec{e}_x + v(x, y)\vec{e}_y. \quad \begin{aligned} u &= u(x, y), \\ v &= v(x, y), \\ w &\equiv 0. \end{aligned}$$



Die notwendigen Bedingungen:

- Die Dimension des Körpers senkrecht zu der ausgewählten Ebene ist wesentlich größer, als die anderen zwei Dimensionen. (z.B. das dickwandige Rohr, der Tunnel, usw.)
- Die Belastung erfolgt parallel zu der ausgewählten Ebene und ändert sich entlang der größten Dimension (in z-Richtung) nicht.
- Der konstante Abstand der parallelen Ebenen wird durch einen äußeren Zwang gewährleistet.

Der Verzerrungszustand:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x(x, y), \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma_{xy}(x, y),$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y(x, y), \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \equiv 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(x, y).$$

Der Spannungszustand (aus dem Hookeschen Gesetz):

$$\sigma_x(x, y) = 2G \left[ \varepsilon_x + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{1 - 2\nu} \nu \right], \quad \sigma_y(x, y) = 2G \left[ \varepsilon_y + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{1 - 2\nu} \nu \right],$$

$$\tau_{xy}(x, y) = G \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy}, \quad \varepsilon_z = 0 \Rightarrow \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y),$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

$$\underline{\underline{[F]}} = \underline{\underline{[F]}}(x, y) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

Die Gleichgewichtsbedingungen:

in kartesischen Koordinaten

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + q_x = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + q_y = 0.$$

in Polarkoordinaten

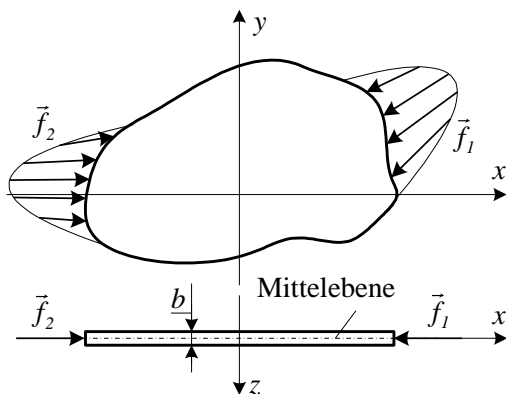
$$\frac{\partial \sigma_R}{\partial R} + \frac{\sigma_R - \sigma_\varphi}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{R\varphi}}{\partial \varphi} + q_R = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{\varphi R}}{\partial R} + 2 \frac{\tau_{\varphi R}}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + q_\varphi = 0.$$

## 6.2. Ebener Spannungszustand (ESZ)

Ebener Spannungszustand  $\equiv$  Scheibenaufgabe  $\equiv$  in der eigenen Ebene belastete Platte.

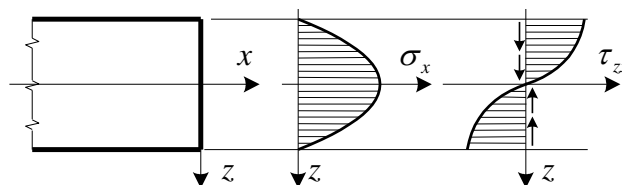
Scheibe: Ein Körper, bei dem die eine Dimension wesentlich kleiner ist, als die anderen zwei. Man kann eine Mittelebene definieren. Die resultierende Belastung über die Dicke liegt in der Mittelebene.



Annahmen:

- Die Dicke  $b$  ist sehr viel kleiner, als die anderen Dimensionen des Körpers,
- Die Mittelfläche  $z = 0$  ist eben,
- Bei der Belastung gibt es keine Kräfte in der  $z$ -Richtung,
- Die Resultierende der Kräfte, die zur  $xy$ -Ebene parallel verläuft, liegt in der  $xy$ -Ebene.
- Die Oberflächen  $z = \pm b/2$  sind unbelastet.

Annahmen für die Spannungen:



- Die Oberflächen  $z = \pm b/2$  sind unbelastet  $\Rightarrow \sigma_z|_{z = \pm b/2} = 0$ .

- Wenn die Dicke  $b$  klein ist, dann ist  $\sigma_z$  (Sigma  $z$ ) nicht nur an den Oberflächen, sondern auch an anderen Stellen gleich Null.

- $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  sind gerade Funktionen von  $z$ .
- $\tau_{xz}, \tau_{zy}$  sind ungerade Funktionen von  $z$ .

Durchschnittsspannungen:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{1}{b} \int_{(b)} \sigma_x dz, \quad \bar{\sigma}_y = \frac{1}{b} \int_{(b)} \sigma_y dz, \quad \bar{\tau}_{xy} = \frac{1}{b} \int_{(b)} \tau_{xy} dz, \quad \bar{\sigma}_x - \text{Sigma } x \text{ Quer}$$

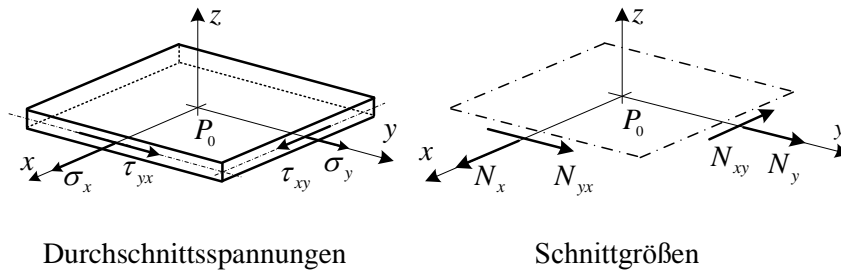
$$\bar{\sigma}_z = \frac{1}{b} \int_{(b)} \sigma_z dz = 0, \quad \bar{\tau}_{xz} = \frac{1}{b} \int_{(b)} \tau_{xz} dz = 0, \quad \bar{\tau}_{yz} = \frac{1}{b} \int_{(b)} \tau_{yz} dz = 0.$$

Tensor der Durchschnittsspannungen:  $[\underline{\underline{F}}] = [\underline{\underline{F}}(x, y)] = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_x & \bar{\tau}_{xy} & 0 \\ \bar{\tau}_{yx} & \bar{\sigma}_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Schnittgrößen / Oberflächenspannungen:  $N_x = b\bar{\sigma}_x, \quad N_y = b\bar{\sigma}_y, \quad N_{xy} = b\bar{\tau}_{xy}.$

Tensor der Schnittgrößen:  $[\underline{\underline{N}}] = [\underline{\underline{N}}(x, y)] = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} & 0 \\ N_{yx} & N_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Veranschaulichung:



$P_0$  – ein Punkt an der Mittelebene.

Allgemeines Hookesches Gesetz:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\bar{\epsilon}_x + \nu \bar{\epsilon}_y), \quad \bar{\sigma}_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\bar{\epsilon}_y + \nu \bar{\epsilon}_x), \quad \bar{\tau}_{xy} = G \bar{\gamma}_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \bar{\gamma}_{xy}.$$

$$\bar{\sigma}_z = 0 \Rightarrow \bar{\epsilon}_z = -\frac{\nu}{1-\nu} (\bar{\epsilon}_x + \bar{\epsilon}_y), \quad \bar{\tau}_{xz} = \bar{\tau}_{yz} = 0.$$

Durchschnittsverzerrungen:

$$\bar{\epsilon}_x = \frac{1}{b} \int_{(b)} \epsilon_x dz, \quad \bar{\epsilon}_y = \frac{1}{b} \int_{(b)} \epsilon_y dz, \quad \bar{\gamma}_{xy} = \frac{1}{b} \int_{(b)} \gamma_{xy} dz, \quad \bar{\epsilon}_z = -\frac{\nu}{1-\nu} (\bar{\epsilon}_x + \bar{\epsilon}_y).$$

Tensor der Durchschnittsverzerrungen:  $[\underline{\underline{A}}] = [\underline{\underline{A}}(x, y)] = \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_x & \frac{1}{2} \bar{\gamma}_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2} \bar{\gamma}_{yx} & \bar{\epsilon}_y & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\epsilon}_z \end{bmatrix}.$

Durchschnittsverschiebungen:  $\bar{u}(x, y) = \frac{1}{b} \int_{(b)} u dz, \quad \bar{v}(x, y) = \frac{1}{b} \int_{(b)} v dz, \quad \bar{w} = 0. \quad \bar{u}(x, y) - u \text{ Quer von } x, y.$

Gleichgewichtsbedingungen:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} + \bar{q}_x = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \bar{q}_y = 0.$$

Kinematische Gleichungen:

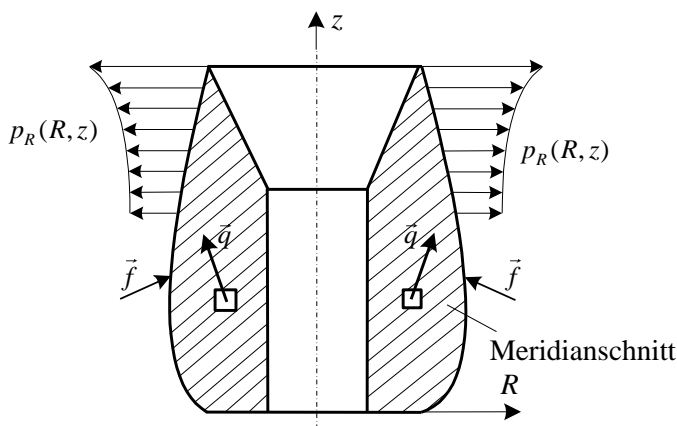
$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \quad \bar{\varepsilon}_y = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}, \quad \bar{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}.$$

### 6.3. Axialsymmetrische / Rotationsymmetrische Aufgaben

Definition: Sowohl die Geometrie, als auch die Belastung des zu untersuchenden Körpers sind axialsymmetrisch.

Folge: die Rotationssymmetrie:

Die Punkte des Körpers verschieben sich in der Meridianebene. Meridianebene ist die  $Rz$ -Ebene. Beschreibung der mechanischen Größen erfolgt in Zylinderkoordinaten.



Die rotationssymmetrische Aufgabe wird im Zylinder-KS formuliert / aufgeschrieben.

Zylinder-KS:  $R, z, \varphi$ .

Rotationssymmetrie

⇓

Die mechanischen Größen hängen nicht von der Variable  $\varphi$  ab.

die Variable = die Veränderliche

Das Verschiebungsfeld:  $\vec{u} = u\vec{e}_R + v\vec{e}_z + w\vec{e}_\varphi,$

Die skalaren Koordinaten des Verschiebungsvektors:  $u = u(R, z), \quad v = v(R, z), \quad w \equiv 0.$

Jeder Punkt verschiebt sich in der eigenen Meridianebene.

Der Verzerrungszustand:

$$\varepsilon_R(R, z) = \frac{\partial u}{\partial R}, \quad \varepsilon_z(R, z) = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \varepsilon_\varphi(R, z) = \frac{u}{R},$$

$$\gamma_{Rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial R}, \quad \gamma_{\varphi z} = \gamma_{R\varphi} = 0.$$

Der Verzerrungstensor:

$$\begin{bmatrix} \underline{A} \\ R z \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}(R, z) \\ R z \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_R & \frac{1}{2}\gamma_{Rz} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{zR} & \varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\varphi \end{bmatrix}.$$

Das allgemeine Hookesche Gesetz:

$$\sigma_R(R, z) = 2G \left[ \varepsilon_R + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \right], \quad \sigma_z(R, z) = 2G \left[ \varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \right],$$

$$\sigma_\varphi(R, z) = 2G \left[ \varepsilon_\varphi + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \right], \quad \tau_{Rz} = G\gamma_{Rz}, \quad \tau_{\varphi z} = \tau_{R\varphi} = 0,$$

wo  $A_I = \varepsilon_R + \varepsilon_z + \varepsilon_\varphi$ .

Der Spannungstensor: 
$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{F}} \\ Rz\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{F}}(R, z) \\ Rz\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_R & \tau_{Rz} & 0 \\ \tau_{zR} & \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\varphi \end{bmatrix}.$$

### 6.4. Lösung von ebenen Aufgaben (EVZ, ESZ) mittels Spannungsfunktion

a) Übereinstimmungen zwischen EVZ und ESZ:

- zwei Verschiebungsfelder:  $u(x, y), v(x, y) / u(R, \varphi), v(R, \varphi)$ ,
- drei unabhängige Verzerrungsgrößen:  
 $\varepsilon_x(x, y), \varepsilon_y(x, y), \gamma_{xy}(x, y) / \varepsilon_R(R, \varphi), \varepsilon_\varphi(R, \varphi), \gamma_{R,\varphi}(R, \varphi)$ ,
- drei unabhängige Spannungsgrößen:  
 $\sigma_x(x, y), \sigma_y(x, y), \tau_{xy}(x, y) / \sigma_R(R, \varphi), \sigma_\varphi(R, \varphi), \tau_{R,\varphi}(R, \varphi)$ ,
- alle mechanischen Größen hängen nur von  $x, y / R, \varphi$  ab,
- die Form der kinematischen und Gleichgewichtsgleichungen.

b) Unterschiede zwischen EVZ und ESZ:

- beim EVZ sind die mechanischen Größen vom Ort abhängig,
- beim ESZ sind die mechanischen Größen Durchschnittswerte über die Dicke,
- die Form des Stoffgesetzes,
- nicht unabhängige mechanische Größen:  

bei EVZ: $\sigma_z \neq 0$	}	sind nicht unabhängige Größen,
bei ESZ: $\varepsilon_z \neq 0$		

Ausgangsbedingungen der Lösung:  $q_x = q_y = 0$  (EVZ),  $\bar{q}_x = \bar{q}_y = 0$  (ESZ).

Bezeichnung: im Weiteren werden die Querstriche weggelassen

#### Die Einführung der Spannungsfunktion

Die Airysche Spannungsfunktion:  $U = U(x, y) / U = U(R, \varphi)$ .

Anforderung: Die Spannungsfunktion muss so angenommen werden, dass die Spannungen die Gleichgewichtsbedingungen befriedigen.

Die Berechnung der Spannungen: in kartesischen Koordinaten in Zylinderkoordinaten

$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2},$	$\sigma_R = \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2},$
$\sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$	$\sigma_\varphi = \frac{\partial^2 U}{\partial R^2},$
$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}.$	$\tau_{R\varphi} = -\frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right).$

Die obigen Formeln sind sowohl für EVZ, als auch für ESZ gültig.

Gedankengang für die Befriedigung des Gleichungssystems der Elastizitätstheorie:

Spannungen  $\Rightarrow$  Materialgesetz  $\Rightarrow$  Verzerrungen  $\Rightarrow$  Kompatibilitätsbedingungen

Die biharmonische Differentialgleichung (DG):  $\Delta \Delta U = 0$ .

$U(x, y) / U(R, \varphi)$  - die biharmonische Funktion.

Die biharmonische Funktion muss die biharmonische partielle Differentialgleichung erfüllen.

Die Laplacesche Differentialoperator für den 2D-Fall:  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ .

Die biharmonische Differentialgleichung in kartesischen Koordinaten:

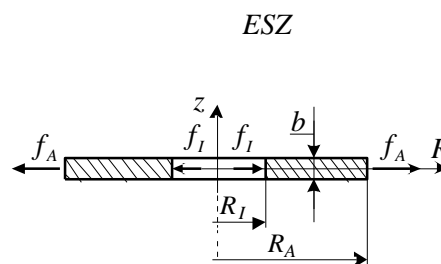
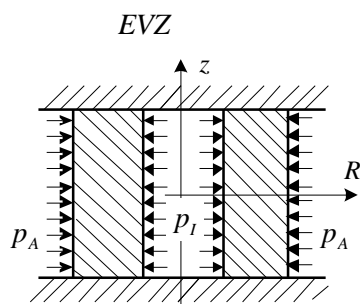
$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0.$$

## 6.5. Rotationssymmetrische ebene Aufgaben

Rotationssymmetrie = Axialsymmetrie

Die mechanischen Größen hängen nicht von der Koordinate / Veränderlichen  $\varphi$  ab.

Verschiebungsfeld:  $\vec{u} = u(R)\vec{e}_R$ , Spannungsfunktion:  $U = U(R)$ .



Dickwandiges Rohr:

$p_i$  - innere Belastung

$p_A$  - äußere Belastung

Kreisringscheibe:

$f_i$  - innere Belastung

$f_A$  - äußere Belastung

Verzerrungsgrößen:  $\varepsilon_R = \frac{du}{dR}$ ,  $\varepsilon_\varphi = \frac{u}{R}$ ,  $\gamma_{R\varphi} = 0$ .

Der Verzerrungstensor:

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(R) = \begin{bmatrix} \varepsilon_R & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(R) = \begin{bmatrix} \varepsilon_R & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_R + \varepsilon_\varphi).$$

Das Hookesche Gesetz:

$$\varepsilon_R = \frac{1}{2G}[\sigma_R - \nu(\sigma_R + \sigma_\varphi)],$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{2G}[\sigma_\varphi - \nu(\sigma_R + \sigma_\varphi)],$$

$$\varepsilon_z = 0.$$

$$\varepsilon_R = \frac{1}{E}(\sigma_R - \nu\sigma_\varphi),$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E}(\sigma_\varphi - \nu\sigma_R),$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_\varphi + \sigma_R).$$

Biharmonische Differentialgleichung (DG):  $\Delta\Delta U = 0$ .

Die biharmonische DG für den axialsymmetrischen Fall:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left\{ R \frac{d}{dR} \left[ \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left( R \frac{dU(R)}{dR} \right) \right] \right\} = 0.$$

Die biharmonische DG ist im rotationssymmetrischen Fall eine DG *Eulerschen* Typs.

Die übliche Form der *Eulerschen* DG:

$$x^4 y^{IV} + x^3 y''' + x^2 y'' + x y' = 0. \quad (x \text{ hoch vier mal } y \text{ vier Strich})$$

Die unbekannte Funktion:  $y = y(x)$ .

Die Lösung der *Eulerschen* DG (homogene Lösung):  $y_k(x) = x^n$ .

Die Lösung der biharmonischen DG:  $U(R) = \frac{A}{2} R^2 + B \ln R + C + DR^2 \ln R$

Das Glied  $R^2 \ln R$  ergibt in einem Kreisringbereich kein eindeutiges Verschiebungsfeld.

Die Lösung:  $U(R) = \frac{A}{2} R^2 + B \ln R + C$ .

Die Spannungen:

Die Konstanten  $A, B$  können aus den Randbedingungen bestimmt werden.

$$\sigma_R(R) = \frac{1}{R} \frac{dU}{dR} = A + \frac{B}{R^2},$$

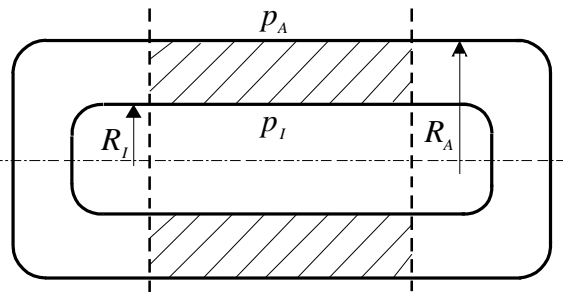
$$\sigma_\varphi(R) = \frac{d^2U}{dR^2} = A - \frac{B}{R^2}.$$

$$\sigma_z = \begin{cases} \nu(\sigma_R + \sigma_\varphi) \\ 0 \end{cases} \quad \text{im Fall} \begin{cases} \text{EVZ} \\ \text{ESZ} \end{cases}.$$

## 6.6. Dickwandige Rohre

### 6.6.1. Einfaches dickwandiges Rohr

Lösung: Superposition des ebenen Verzerrungszustandes und des Zug/Drucks.



Wir untersuchen den Abschnitt des Rohres, der von den Rohrenden weit genug entfernt ist.

Auf den zu untersuchenden Abschnitt üben die Rohrenden keinen Einfluss aus.

Bedeutung der Indizes: I – Innen und A – Außen.

Spannungszustand im Rohr: 
$$\underline{\underline{F}}_{R\varphi z} = \begin{bmatrix} \sigma_R & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma'_R & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_z \end{bmatrix}}_{\text{EVZ}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma''_z \end{bmatrix}}_{\text{Zug-Druck}}.$$

Die Hauptspannungen:

$$\sigma_R = \sigma'_R = A + \frac{B}{R^2}, \quad \sigma_\varphi = \sigma'_\varphi = A - \frac{B}{R^2},$$

$$\sigma_z = \sigma'_z + \sigma''_z. \quad \sigma'_z = \nu(\sigma'_R + \sigma'_\varphi) = \nu 2A = \text{konstant}, \quad \sigma''_z = \text{konstant}.$$

Die Konstanten  $A, B$  können aus den dynamischen Randbedingungen bestimmt werden.

Die Normalspannung in der axialen Richtung  $\sigma'_z$ :

- offenes Rohr:  $\sigma_z = \sigma'_z + \sigma''_z = 0 \Rightarrow \sigma''_z = -\sigma'_z,$

- geschlossenes Rohr: 
$$\sigma_z = \frac{F}{A} = \frac{p_I R_I^2 \pi - p_A R_A^2 \pi}{R_A^2 \pi - R_I^2 \pi} = \sigma'_z + \sigma''_z.$$

Die Spannung  $\sigma'_z$  muss gewährleisten, dass die obigen Gleichungen erfüllt sind.

Spannungsdiagramm für das Rohr

Neue Veränderliche:  $\psi = \frac{R_I^2}{R^2}, \quad \psi_A = \frac{R_I^2}{R_A^2}, \quad \psi_A < \psi < 1.$

Die Bestimmung der Konstanten:  $\psi_A = \frac{R_I^2}{R_A^2}, \quad \psi_I = 1.$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= a - b\psi \\ \sigma_\phi &= a + b\psi \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} \sigma_R(R = R_I) &= \sigma_R(\psi = 1) = -p_I, \\ \sigma_R(R = R_A) &= \sigma_R(\psi = \psi_A) = -p_A. \end{aligned}$$

Eingesetzt:

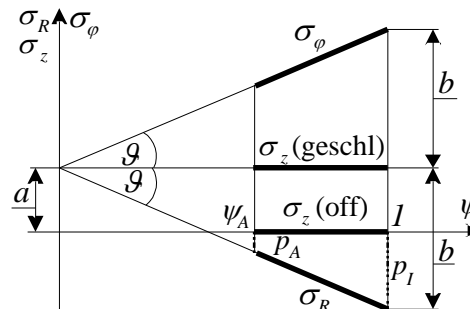
$$\left. \begin{aligned} a - b &= -p_I \\ a - b\psi_A &= -p_A \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad b = \frac{p_I - p_A}{1 - \psi_A} = \text{tg } \vartheta, \quad a = \frac{p_I \psi_A - p_A}{1 - \psi_A}.$$

Spannungsdiagramm

Offenes Rohr:  $\sigma_z = 0 = \text{konstant.}$

Geschlossenes Rohr:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{F}{A} = \frac{p_I R_I^2 \pi - p_A R_A^2 \pi}{R_A^2 \pi - R_I^2 \pi} \\ &= \frac{p_I \psi_A - p_A}{1 - \psi_A} = a = \text{konstant.} \end{aligned}$$



Die Normalspannung  $\sigma_z$  ist in beiden Fällen konstant.

Dimensionierung und Sicherheitsnachweis im Falle  $p_I > p_A$ :

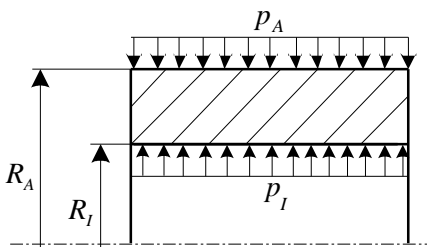
Hauptspannungen:  $\sigma_1 = \sigma_\phi, \quad \sigma_2 = \sigma_z, \quad \sigma_3 = \sigma_R.$

Die Mohrsche Vergleichsspannung:  $\sigma_V (\text{Mohr}) = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_\phi - \sigma_R.$

$$\sigma_{V \max} (\text{Mohr}) = (\sigma_R - \sigma_\phi)_{\max} = (\sigma_R - \sigma_\phi) \Big|_{\psi=1} = 2b = 2 \frac{p_I - p_A}{1 - \psi_A}.$$

$\sigma_{V \max} \leq \sigma_{zul}$  - zulässige Spannung (Materialkennwert dividiert mit einem Sicherheitsbeiwert).

Beispiel: Dimensionierung eines dickwandigen Rohres



Bekannt:  $p_I, p_A, R_I, \sigma_{zul}.$

Aufgabe:  $R_A = ?$

$$\text{Dimensionierung: } \sigma_{V \max} = 2 \frac{p_I - p_A}{1 - \psi_A} \leq \sigma_{zul}, \quad \Rightarrow \quad 2 \frac{p_I - p_A}{\sigma_{zul}} \leq 1 - \psi_A,$$



$$\psi_A = \frac{R_I^2}{R_A^2} \leq 1 - 2 \frac{p_I - p_A}{\sigma_{zul}}, \quad \Rightarrow \quad R_A \geq \frac{R_I}{\sqrt{1 - 2 \frac{p_I - p_A}{\sigma_{zul}}}}$$

**Bemerkung:** Die Vergrößerungsmöglichkeit des Druckunterschiedes ist begrenzt.

$$\text{Wenn } 1 - 2 \frac{p_I - p_A}{\sigma_{zul}} = 0, \text{ dann } R_A \rightarrow \infty$$

⇓

$$p_I - p_A < \frac{\sigma_{zul}}{2}$$

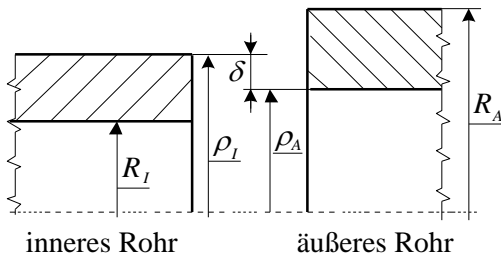
Die Lösung des Problems: Der Druckunterschied muss vermindert werden.

Z.B.: Wir vergrößern den äußeren Druck  $p_A$ .

### 6.6.2. Doppelwandiges Rohr

Das äußere Rohr ist auf das innere Rohr aufgeschraubt.

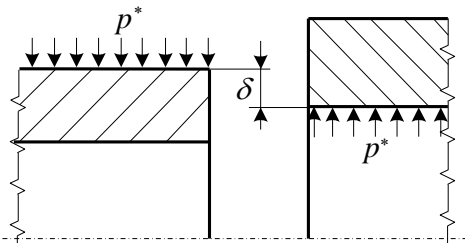
So wird eine Druckvergrößerung an der äußeren Oberfläche (Mantelfläche) des inneren Rohres erzeugt.



Bedeutung der Indizes: I – Innen und A – Außen.

Überlappung:  $\delta = \rho_I - \rho_A$ .

Realisierung: Das äußere Rohr wird erhitzt, auf das innere Rohr aufgezogen und dann abgekühlt.



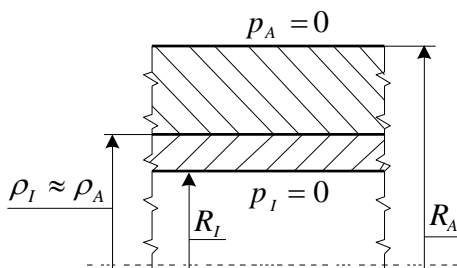
$p^*$  - Druck nach der Abkühlung:  $p^* = p^*(\delta)$ .

Der Wert  $p^*$  ist von der Überlappung  $\delta$  abhängig.

Annahme:  $\delta \ll \rho_I, \rho_A \Rightarrow \rho_I \approx \rho_A$ .

Neue Veränderliche:  $\psi = \frac{R_I^2}{R^2}$ ,  $\bar{\psi}_A = \frac{R_I^2}{\rho_I^2} \cong \frac{R_I^2}{\rho_A^2}$ ,  $\psi_A = \frac{R_I^2}{R_A^2}$ ,  $\psi_A < \bar{\psi}_A < 1$ .  $\bar{\psi}_A$  - psi A Quer.

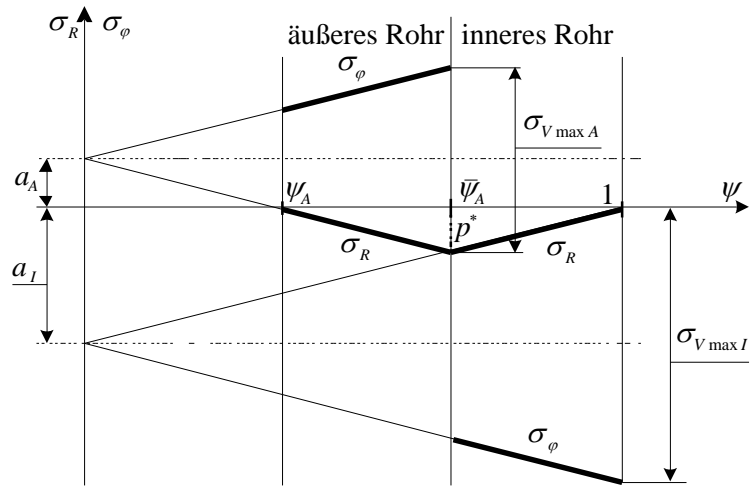
#### 6.6.2.1. Zustand infolge der Überlappung



Der innere und äußere Druck sind gleich Null.

Bedeutung der Indizes: I – Innen und A – Außen.

Spannungsdiagramm des Doppelrohres:

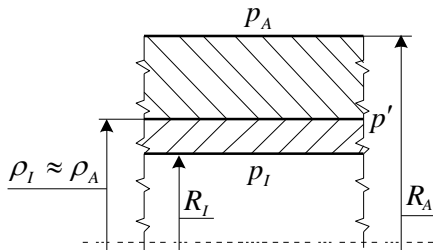


$p^*$  - Druck infolge der Überlappung

Maximale Vergleichsspannungen nach Mohr:

$$\frac{\sigma_{V \max I}}{2} = \frac{p^*}{1 - \bar{\psi}_A} l, \quad \frac{\sigma_{V \max A}}{2} = \frac{p^*}{\bar{\psi}_A - \psi_A} \bar{\psi}_A.$$

### 6.6.2.2. Doppelwandiges Rohr mit äußerer Belastung

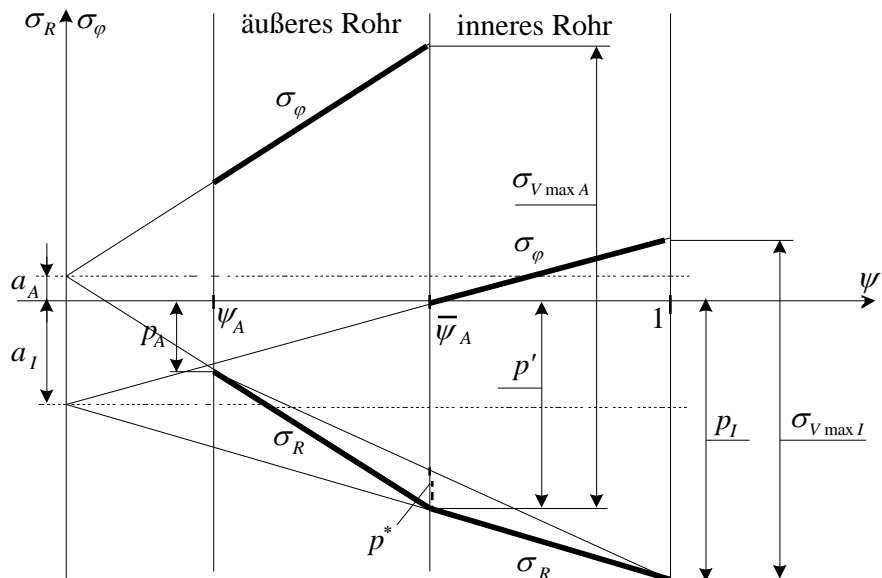


Annahme:  $p_I > p_A \neq 0$ .

Bedeutung der Indizes: I - Innen und A - Außen.

Das Superpositionsprinzip wird angewendet.

Spannungsdiagramm:



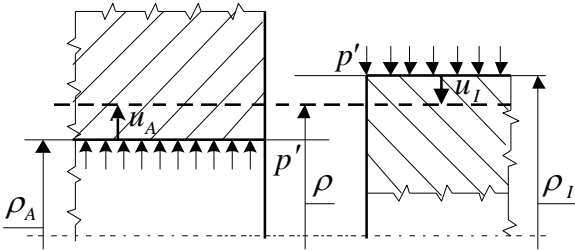
Maximale Vergleichsspannungen nach Mohr:

$$\frac{\sigma_{V \max I}}{2} = \frac{p_I - p'}{1 - \bar{\psi}_A}, \quad \frac{\sigma_{V \max A}}{2} = \frac{p' - p_A}{\bar{\psi}_A - \psi_A} \bar{\psi}_A.$$

Dimensionierung:

Wenn z.B. bekannt sind:  $R_I, \rho_I \approx \rho_A, p_I, p_A$ , dann kann man aus den obigen Gleichungen  $p'$  und  $\psi_A$  (d.h.  $R_A$ ) bestimmen.

**6.6.2.3. Bestimmung der Überlappung**



Definition:  $\delta = \rho_I - \rho_A$ .

$$\rho = \rho_A + u_A = \rho_I + u_I$$

$$\delta = \rho_I - \rho_A = u_A - u_I = \rho_A \varepsilon_{\varphi A} - \rho_I \varepsilon_{\varphi I}$$

Näherung:  $\rho_A \approx \rho_I$ .

$$\delta \approx \rho_I (\varepsilon_{\varphi A} - \varepsilon_{\varphi I}) \Big|_{R=\rho_I=\rho_A}$$

Hookesches Gesetz:  $\varepsilon_{\varphi} = \frac{1}{2G} \left[ \begin{matrix} \sigma_{\varphi} - \nu (\sigma_R + \sigma_{\varphi}) \\ = -p' \end{matrix} \right]$

Die Überlappung:  $\delta \approx \rho_I \frac{1}{2G} \left[ \sigma_{\varphi A} - \sigma_{\varphi I} - \nu (\sigma_{\varphi A} - \sigma_{\varphi I}) \right] \Big|_{R=\rho_I}$

**6.6.2.4. Optimale Rohrdimensionen**

Bekannt:  $R_I, R_A, p_A, \sigma_{zul I}, \sigma_{zul A}$ .

Frage: Wie kann man  $\rho_A \approx \rho_I$  (d.h.  $\bar{\psi}_A$ ) wählen, damit  $p_I$  Maximum wird.

Zusammenhänge bei der Dimensionierung von Doppelrohren:

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_I - p'}{1 - \bar{\psi}_A} = \frac{\sigma_{Vmax I}}{2} \leq \frac{\sigma_{zul I}}{2} \\ \frac{p' - p_A}{\bar{\psi}_A - \psi_A} = \frac{\sigma_{Vmax A}}{2} \leq \frac{\sigma_{zul A}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} p_I &= \frac{\sigma_{zul I}}{2} (1 - \bar{\psi}_A) + p' \\ p' &= \frac{\bar{\psi}_A - \psi_A}{2 \bar{\psi}_A} \sigma_{zul A} + p_A \end{aligned}$$

Wir setzen die 2. Gleichung in die 1. Gleichung ein:  $p_I = \frac{\sigma_{zul I}}{2} (1 - \bar{\psi}_A) + \frac{\bar{\psi}_A - \psi_A}{2 \bar{\psi}_A} \sigma_{zul A} + p_A = p_I(\bar{\psi}_A)$ .

Die Bestimmung des Extremwertes von  $p_I$  (Bestimmung des Maximums):

$$\frac{dp_I}{d\bar{\psi}_A} = 0 = -\frac{\sigma_{zul I}}{2} + \frac{\sigma_{zul A}}{2} \frac{\psi_A}{\bar{\psi}_A^2}, \Rightarrow \bar{\psi}_A = \sqrt{\frac{\sigma_{zul A}}{\sigma_{zul I}} \psi_A}$$

$$\frac{d^2 p_I}{d\bar{\psi}_A^2} = -\sigma_{zul A} \frac{\psi_A}{\bar{\psi}_A^3} < 0. \Rightarrow \text{Der Extremwert ist ein Maximum.}$$

$$\bar{\psi}_A^2 = \frac{R_I^4}{\rho_I^4} = \frac{\sigma_{zul A}}{\sigma_{zul I}} \frac{R_I^2}{R_A^2} \Rightarrow \rho_I \approx \rho_A = \sqrt{\left( \frac{\sigma_{zul I}}{\sigma_{zul A}} \right)^{\frac{1}{2}} R_I R_A}$$

Der optimale Radius im Fall gleicher Materialien:  $\rho_A \approx \rho_I = \sqrt{R_I R_A}$ .