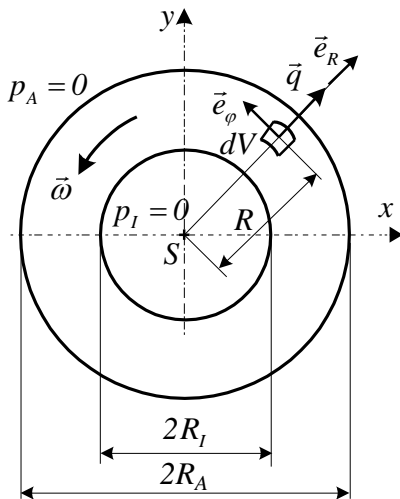


6.7. Schnell rotierende Wellen und Rohrwellen



- Annahmen: - $\omega = \text{konstant}$,
 - Eigengewicht ≈ 0 ,
 - $p_I = p_A = 0$.

Die Aufgabe wird in Zylinderkoordinaten gelöst.

Bei der Rotation entstehen Volumenkräfte aus der Beschleunigung.

Intensität der Volumenkräfte:

$$\vec{q} = q_R \vec{e}_R = \rho R \omega^2 \vec{e}_R = \frac{\gamma}{g} R \omega^2 \vec{e}_R, \text{ wobei}$$

ρ – Massendichte $[\text{kg/m}^3]$,

$\gamma = g \rho$ – spezifisches Gewicht $[\text{N/m}^3]$,

g – Gravitationsbeschleunigung $[\text{m/s}^2]$,

ω – Winkelgeschwindigkeit $[\text{rad/s}]$.

Bedeutung der Indizes:

I – Innen und A – Außen.

$\vec{q} = q_R \vec{e}_R$ liegt im Querschnitt der Welle / der Rohrwellen.

Folgerung aus der obigen Aussage:

Die Querschnitte der Welle bleiben während der Formänderung eben.

Bei der Lösung von Aufgaben zu den schnell rotierenden Wellen / Rohrwellen benutzt man das Prinzip der

Superposition: EVZ + Zug-Druck $\Rightarrow \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F'}} + \underline{\underline{F''}}$.

a) Ebener Verzerrungszustand (EVZ)

Die biharmonische Differentialgleichung ist in diesem Fall nicht homogen. Auf der rechten Seite erscheint ein Glied mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω .

$$\Delta \Delta U = 2 \frac{1-2\nu}{1-\nu} \rho \omega^2.$$

Im axialsymmetrischen Fall:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left\{ R \frac{d}{dR} \left[\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{dU}{dR} \right) \right] \right\} = 2 \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{\gamma}{g} \omega^2 = \text{konstant}.$$

Lösung der Differentialgleichung: $U(R) = U_h(R) + U_p(R)$.

$$\begin{aligned} U(R) &= \frac{A}{2} R^2 + B \ln R + C + (DR^2 \ln R) + 2 \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{\gamma}{g} \omega^2 \frac{R^4}{64} = \\ &= \frac{A}{2} R^2 + B \ln R + C + 2 \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{\gamma}{g} \omega^2 \frac{R^4}{64}. \end{aligned}$$

Das Glied $(DR^2 \ln R)$ ergibt kein eindeutiges Verschiebungsfeld im Kreis – und Kreisringbereich und wird deshalb weggelassen.

Einführung einer neuen Veränderlichen: $\lambda = \frac{R^2}{R_A^2}$, $\lambda_I = \frac{R_I^2}{R_A^2}$.

Spannungen aus der Funktion $U = U(R)$:

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_R &= a - \frac{b}{\lambda} - \sigma_{\omega 0} \lambda \\ \sigma'_\varphi &= a + \frac{b}{\lambda} - \mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda \\ \sigma'_z &= \nu (\sigma'_R + \sigma'_\varphi) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Konstanten:} \\ \sigma_{\omega 0} &= \frac{3-2\nu}{1-\nu} \frac{\rho}{8} (R_A \omega)^2, \\ \mu_1 &= \frac{1+2\nu}{3-2\nu} < 1. \end{aligned}$$

b) Reine Zug-Druck-Beanspruchung:

Die Längskraft muss so gewählt werden, dass die resultierende axiale Kraft verschwindet.

$$N = N' + N'' = 0. \quad N = \int_{R_I}^{R_A} \sigma'_z 2R\pi dR + N'' = 0.$$

Die Spannung aus dem EVZ: $\sigma'_z = \nu (\sigma'_R + \sigma'_\varphi) = \nu 2a - \nu \sigma_{\omega 0} (1 + \mu_1) \lambda$

$$N'' = -2\pi a \nu (R_A^2 - R_I^2) + \nu \sigma_{\omega 0} (1 + \mu_1) \pi R_A^2 \int_{\lambda_I}^1 \lambda d\lambda, \quad d\lambda = 2R \frac{1}{R_A^2} dR,$$

$$N'' = -2\pi a \nu (R_A^2 - R_I^2) + \nu \sigma_{\omega 0} (1 + \mu_1) \pi \frac{1}{2} (1 - \lambda_I^2) R_A^2.$$

$$\sigma''_z = \frac{N''}{A}.$$

c) Superposition: schnell rotierende Rohrwelle / Welle

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R = \sigma'_R &= a - \frac{b}{\lambda} - \sigma_{\omega 0} \lambda, \\ \sigma_\varphi = \sigma'_\varphi &= a + \frac{b}{\lambda} - \mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda, \\ \sigma_z = \sigma'_z + \sigma''_z &= \mu_2 \sigma_{\omega 0} (1 + \lambda_I - 2\lambda). \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Konstanten:} \\ \mu_2 &= \frac{2\nu}{3-2\nu} < 1, \quad \mu_2 < \mu_1. \end{aligned}$$

Bestimmung der Konstanten aus den Randbedingungen: ({ } geschweifte Klammer)

$$\left. \begin{aligned} R = R_I \quad (\lambda = \lambda_I) \quad \sigma_R = 0 &= a - \frac{b}{\lambda_I} - \sigma_{\omega 0} \lambda_I \\ R = R_A \quad (\lambda = 1) \quad \sigma_R = 0 &= a - b - \sigma_{\omega 0} \end{aligned} \right\} a = \dots, \quad b = \dots$$

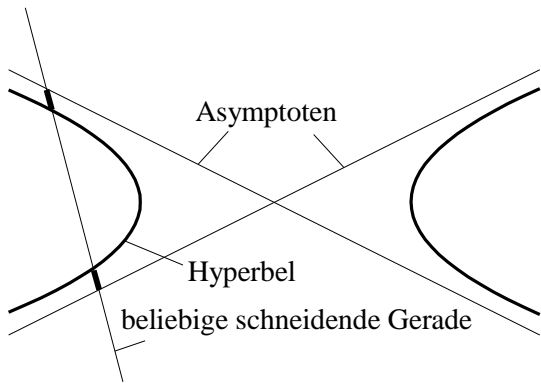
Bezeichnung: $\left. \begin{aligned} h_R &= a - \frac{b}{\lambda} \\ h_\varphi &= a + \frac{b}{\lambda} \end{aligned} \right\} \text{Hyperbel.}$

Asymptoten der Hyperbel: Wenn $\lambda \rightarrow 0$, dann $h_R \rightarrow -\infty$, $h_\varphi \rightarrow \infty$,

Wenn $\lambda \rightarrow \infty$, dann $h_R \rightarrow a$, $h_\varphi \rightarrow a$.

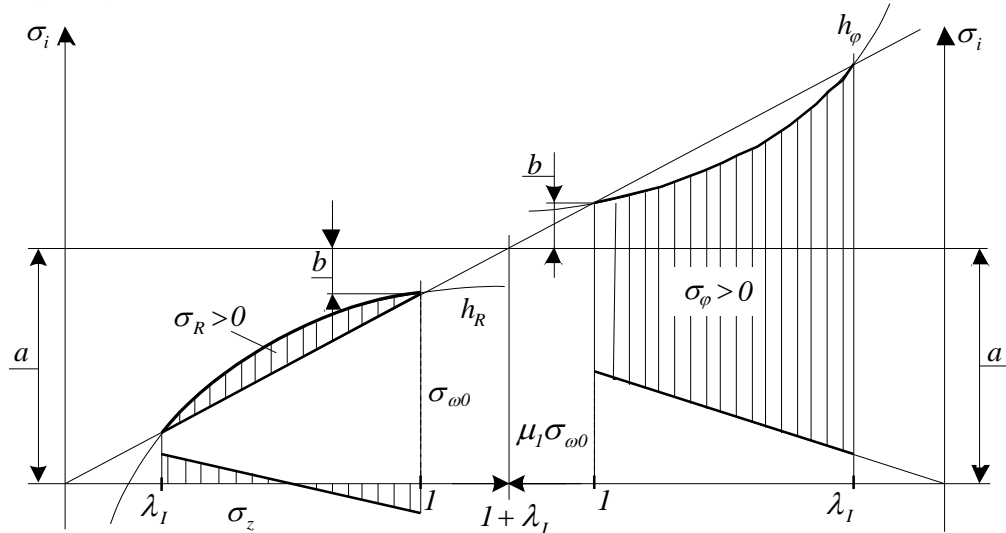
$\lambda \rightarrow \infty - \lambda$ strebt gegen unendlich.

Eigenschaft der Hyperbel:



Die Abschnitte zwischen den Schnittpunkten einer beliebigen Geraden auf der Hyperbel und auf den Asymptoten (in der Abbildung fett markiert) sind gleich lang.

6.7.1. Spannungsdiagramm der rotierenden Rohrwellen



- Randbedingungen:
1. $\sigma_R|_{\lambda_I} = 0 = a - \frac{b}{\lambda_I} - \sigma_{\omega 0} \lambda_I$,
 2. $\sigma_R|_{\lambda=I} = 0 = a - b - \sigma_{\omega 0}$.

Aus der 2. Randbedingung: $a = b + \sigma_{\omega 0}$.

Eingesetzt in die 1. Randbedingung: $0 = b - \frac{b}{\lambda_I} + \sigma_{\omega 0} (1 - \lambda_I)$,

$$0 = -\frac{b}{\lambda_I} (1 - \lambda_I) + \sigma_{\omega 0} (1 - \lambda_I) \Rightarrow b = \lambda_I \sigma_{\omega 0}.$$

b eingesetzt in die 2. Randbedingung: $a = (1 + \lambda_I) \sigma_{\omega 0}$.

Spannungszustand in einem beliebigen Punkt der schnell rotierenden Rohrwellen:

$$[\underline{\underline{F}}] = [\underline{\underline{F}}(R)] = [\underline{\underline{F}}'] + [\underline{\underline{F}}''] = \begin{bmatrix} \sigma_R & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}, \text{ wobei } \sigma_R, \sigma_\varphi, \sigma_z \text{ die Hauptspannungen sind.}$$

Die maximale Vergleichsspannung: $\sigma_{Vmax}(\text{Mohr}) = (\sigma_1 - \sigma_3) = \sigma_\varphi(\lambda_I) = a + \frac{b}{\lambda_I} - \mu_I \sigma_{\omega 0} \lambda_I$.

Eingesetzt werden die mit den Randbedingungen berechneten Werte a und b :

$$\sigma_{Vmax}(\text{Mohr}) = (1 + \lambda_I) \sigma_{\omega 0} + \lambda_I \sigma_{\omega 0} \frac{1}{\lambda_I} - \mu_I \sigma_{\omega 0} \lambda_I,$$

$$\sigma_{Vmax}(\text{Mohr}) = \sigma_{\omega 0} (2 + \lambda_I - \mu_I \lambda_I).$$

6.7.2. Spannungsdiagramm schnell rotierender Wellen

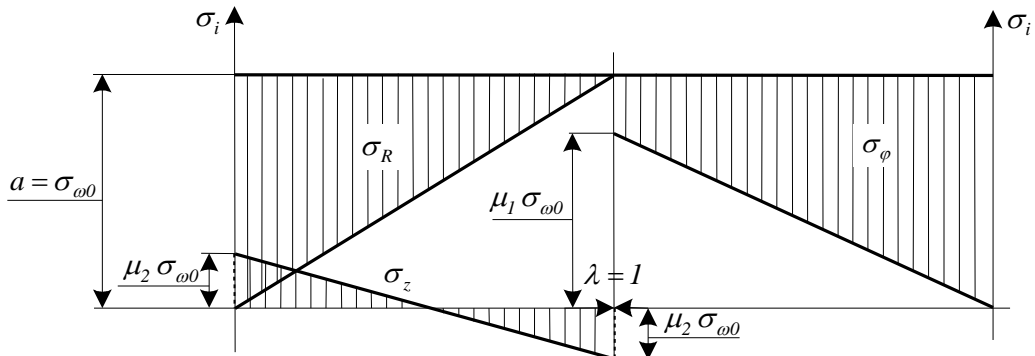
Bei einer Welle: $R_I = 0$ ($\lambda_I = 0$).

Erfahrung: Die Spannungen haben auch bei $R=0$ ($\lambda=0$) endlich große Werte \Rightarrow aus dieser Aussage folgt:
 $b=0$.

Die Spannungen: $\sigma_R = a - \sigma_{\omega 0} \lambda$,
 $\sigma_\varphi = a - \mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda$,
 $\sigma_z = \mu_2 \sigma_{\omega 0} (1 - 2\lambda)$.

Die Randbedingung: $R = R_A$ ($\lambda = 1$) $\sigma_R = 0 = a - \sigma_{\omega 0} \Rightarrow a = \sigma_{\omega 0}$.

Spannungsdiagramm:



Die Vergleichsspannungen nach Mohr: $\sigma_V (Mohr)|_{\lambda=0} = (\sigma_R - \sigma_z)|_{\lambda=0} = \sigma_{\omega 0} (1 - \mu_2)$,

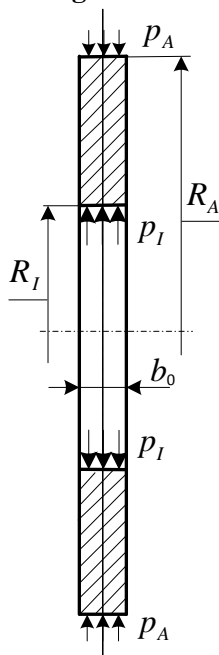
$$\sigma_V (Mohr)|_{\lambda=1} = (\sigma_\varphi - \sigma_z)|_{\lambda=1} = \sigma_{\omega 0} (1 - \mu_1 + \mu_2).$$

6.8. Kreis- und Kreisringscheiben

Lösung der Aufgabe: ebener Spannungszustand.

Die Einführung einer neuen Veränderlichen: $\psi = \frac{R_I^2}{R^2}$, $\psi_A = \frac{R_I^2}{R_A^2}$.

6.8.1. Kreisringscheibe mit Randbelastung



Die Spannungen:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_R &= a - b\psi \\ \bar{\sigma}_\varphi &= a + b\psi \end{aligned} \right\}$$

$$\bar{\tau}_{R\varphi} = 0, \quad \bar{\sigma}_z = 0.$$

Randbedingungen:

$$\bar{\sigma}_R(\psi=1) = a - b = -p_I, \quad \bar{\sigma}_R(\psi=\psi_A) = a - b\psi_A = -p_A.$$

Bedeutung der Indizes: I – Innen und A – Außen.

Aus der ersten Gleichung: $a = b - p_I$,

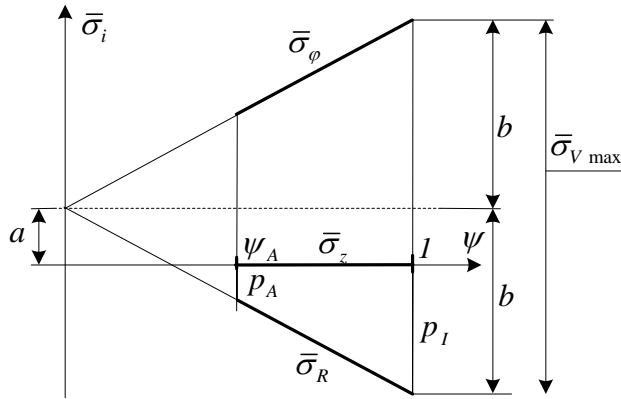
Aus der zweiten Gleichung:

$$b - p_I - b\psi_A = -p_A \Rightarrow b = \frac{p_I - p_A}{1 - \psi_A}.$$

b eingesetzt in die erste Gleichung:

$$a = b - p_I = \frac{p_I - p_A - p_I(1 - \psi_A)}{1 - \psi_A} \Rightarrow a = \frac{p_I\psi_A - p_A}{1 - \psi_A}.$$

Spannungsdiagramm der Kreisringscheibe:

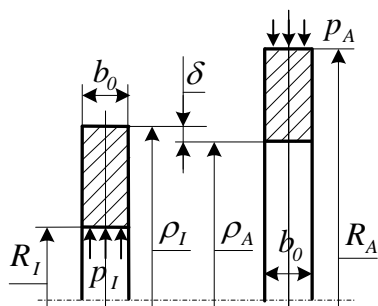


Die Vergleichsspannung nach Mohr:

$$\bar{\sigma}_V (\text{Mohr}) = \bar{\sigma}_\phi - \bar{\sigma}_R,$$

$$\bar{\sigma}_{V \max} (\text{Mohr}) = 2b = 2 \frac{p_A - p_I}{1 - \psi_A}.$$

6.8.2. Doppelscheibe mit Überlappung



Überlappung: $\delta = \rho_I - \rho_A$.

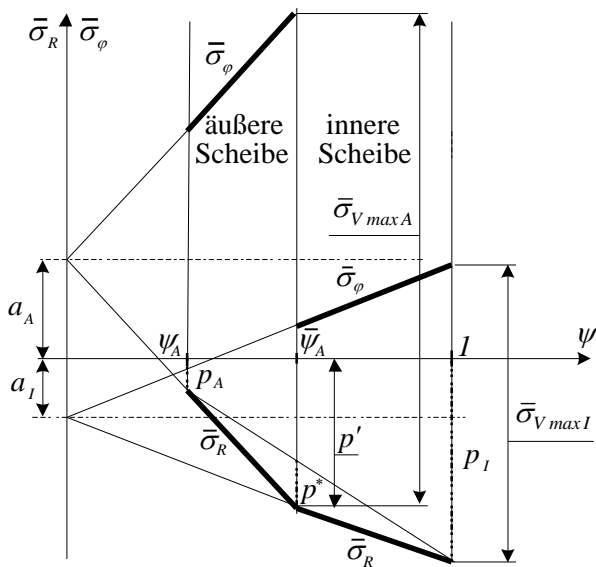
Annahme: $\delta \ll \rho_I, \rho_A \Rightarrow \rho_I \approx \rho_A$.

Bedeutung der Indizes: I – Innen und A – Außen.

Veränderliche und charakteristische Werte:

$$\psi = \frac{R_I^2}{R^2}, \quad \bar{\psi}_A = \frac{R_I^2}{\rho_I^2} \cong \frac{R_I^2}{\rho_A^2}, \quad \psi_A = \frac{R_I^2}{R_A^2}.$$

Spannungsdiagramm der Doppelscheibe:



Annahme: $p_I > p_A$.

Die maximalen Vergleichsspannungen:

$$\bar{\sigma}_{V \max I} = 2 \frac{p_I - p'}{1 - \bar{\psi}_A},$$

$$\bar{\sigma}_{V \max A} = 2 \frac{p' - p_A}{\bar{\psi}_A - \psi_A} \bar{\psi}_A.$$

Die Bestimmung der Überlappung: $\delta \approx \rho_I \left(\bar{\epsilon}_{\phi A} - \bar{\epsilon}_{\phi I} \right) \Big|_{R=\rho_I=\rho_A}$.

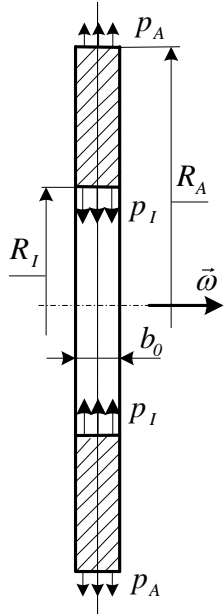
Hookesches Gesetz: $\bar{\epsilon}_\phi = \frac{1}{E} \left(\begin{matrix} \bar{\sigma}_\phi - \nu \bar{\sigma}_R \\ = -p' \end{matrix} \right) \Rightarrow \delta \approx \frac{\rho_I}{E} \left(\bar{\sigma}_{\phi A} - \bar{\sigma}_{\phi I} \right) \Big|_{R=\rho_I=\rho_A}$.

Aus dem Spannungsdiagramm:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{\varphi A} = \bar{\sigma}_{V \max A} - p' &= 2 \frac{p' - p_A}{\bar{\psi}_A - \psi_A} \bar{\psi}_A - p' \\ \bar{\sigma}_{\varphi I} &= 2 \frac{p_I - p'}{1 - \bar{\psi}_A} \bar{\psi}_A - p' \end{aligned} \right\} \text{Diese Werte treten an der Stelle } R = \rho_I = \rho_A \text{ auf.}$$

6.9. Schnell rotierende Kreis- und Kreisringscheiben

6.9.1. Kreisringscheibe mit Randbelastung



Annahmen: - $\omega = \text{konstant}$,
- Eigengewicht ≈ 0 .

Die Flächenlasten p_I und p_A modellieren Wirkungen anderer Bauteile.

Veränderliche: $\lambda = \frac{R^2}{R_A^2}$.

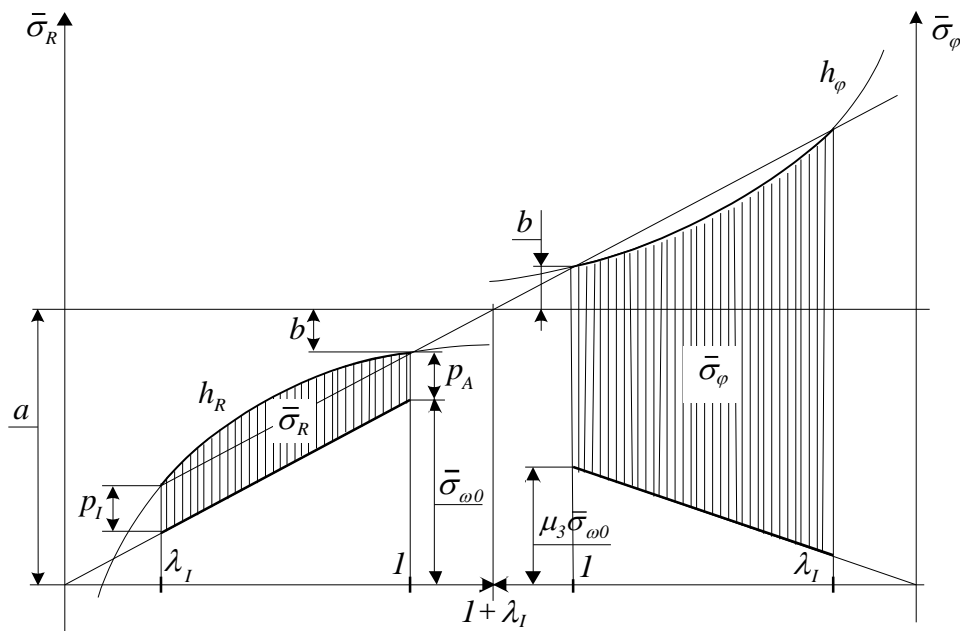
Spannungen:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_R &= a - \frac{b}{\lambda} - \bar{\sigma}_{\omega 0} \lambda \\ \bar{\sigma}_{\varphi} &= a + \frac{b}{\lambda} - \mu_3 \bar{\sigma}_{\omega 0} \lambda \end{aligned} \right\}, \quad \{ \} - \text{geschweifte Klammer,} \quad \text{Sigma } R \text{ Quer.}$$

Die Konstanten: $\bar{\sigma}_{\omega 0} = \frac{(3+\nu)}{\nu} \frac{\rho}{8} (R_A \omega)^2$, $\mu_3 = \frac{1+3\nu}{3+\nu}$.

Randbedingungen: $R = R_I$, ($\lambda = \lambda_I$), $\bar{\sigma}_R = p_I$,
 $R = R_A$, ($\lambda = 1$), $\bar{\sigma}_R = p_A$.

Spannungsdiagramm der Kreisringscheibe:



$$\bar{\sigma}_{V \max} (\text{Mohr}) = \bar{\sigma}_{\varphi}(\lambda_I) = \bar{\sigma}_{\omega 0} (2 + \lambda_I) - \mu_3 \bar{\sigma}_{\omega 0} \lambda_I, \text{ wenn } p_A = p_I = 0.$$

6.9.2. Kreisscheibe

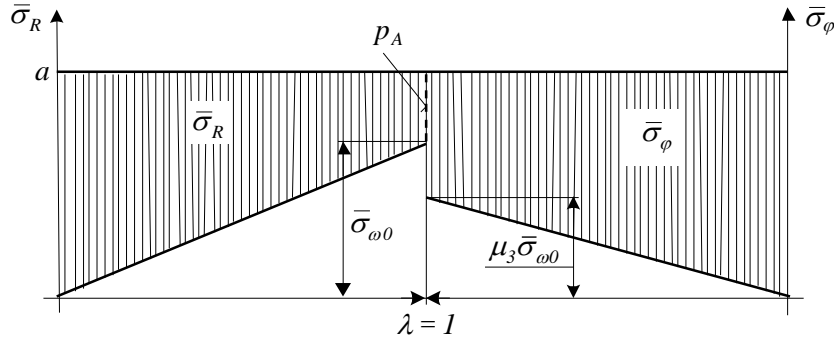
In diesem Fall: $R_I=0, (\lambda_I=0)$.

Erfahrung: Die Spannungen sind auch bei $R=0, (\lambda=0)$ endlich groß $\Rightarrow b=0$.

$$\text{Spannungen: } \left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_R &= a - \bar{\sigma}_{\omega 0} \lambda, \\ \bar{\sigma}_\varphi &= a - \mu_3 \bar{\sigma}_{\omega 0} \lambda. \end{aligned} \right\}$$

Randbedingung: $\sigma_R(\lambda=1)=p_A$.

Spannungsdiagramm:



$$\bar{\sigma}_{Vmax}(\text{Mohr}) = \bar{\sigma}_\varphi(\lambda=0) = a = \bar{\sigma}_{\omega 0} + p_A.$$

6.9.3. Kreisscheibe gleicher Festigkeit

Frage: Wie soll man die Funktion $b=b(R)$ wählen, damit die Spannungsverläufe konstant bleiben.

$$\bar{\sigma}_R = \bar{\sigma}_\varphi = \bar{\sigma}_0 = \text{konstant}.$$

Die Volumenkraftintensität der rotierenden Scheibe: $q_R = \rho \omega^2 R$.

Gleichgewichtsbedingung im Fall ESZ in Zylinderkoordinaten:

$$\frac{d(\bar{\sigma}_R b)}{dR} + \frac{(\bar{\sigma}_R - \bar{\sigma}_\varphi) b}{R} + b q_R = 0.$$

Zielstellung: $\bar{\sigma}_R = \bar{\sigma}_\varphi = \bar{\sigma}_0 = \text{konstant}, \Rightarrow \bar{\sigma}_R - \bar{\sigma}_\varphi = 0$.

$$\bar{\sigma}_0 \frac{db}{dR} + b q_R = 0,$$

$$\frac{db}{dR} + \underbrace{\frac{\rho \omega^2}{\bar{\sigma}_0}}_{K = \text{konst.}} R b = 0. \quad \text{Es ist eine Differentialgleichung für die Scheibendicke } b=b(R).$$

$$\text{Lösung der Differentialgleichung: } \frac{db}{b} = -K R dR.$$

Beide Seiten der Gleichung werden integriert:

$$\int_{b_0}^b \frac{db}{b} = -K \int_{R=0}^R R dR, \quad \text{wobei } b_0 \text{ ist die Scheibendicke an der Stelle } R=0 \text{ ist.}$$

$$\ln \frac{b}{b_0} = -\frac{K R^2}{2} \Rightarrow b=b(R) = b_0 e^{-\frac{K R^2}{2}}.$$

Es ist eine Formel für die Meridiankurve der schnell rotierenden Scheibe gleicher Festigkeit.

Die Bestimmung des Inflexionspunktes der Meridiankurve:

Im Inflexionspunkt ist die zweite Ableitung der Kurve gleich Null.

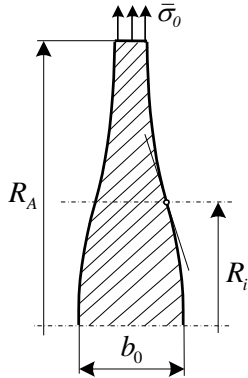
Die erste Ableitung: $\frac{db}{dR} = b_0 e^{-\frac{K}{2}R^2} 2\left(-\frac{K}{2}\right)R = -bKR$, $\frac{db}{dR} = b(-KR)$,

Die zweite Ableitung: $\frac{d^2b}{dR^2} = \frac{db}{dR}(-KR) - bK = bK^2R^2 - bK = bK(KR^2 - 1) = 0$.

$$b \neq 0, \quad K = \frac{\rho \omega^2}{\bar{\sigma}_0} = \text{konst.} \neq 0,$$

$$KR^2 - 1 = 0, \quad \Rightarrow \quad R_i = \sqrt{\frac{1}{K}} = \sqrt{\frac{\bar{\sigma}_0}{\rho \omega^2}} \quad - \text{Der Radius des Inflexionspunktes.}$$

Der Gültigkeitsbereich der Lösung: $R \rightarrow \infty$



In den praktischen Fällen wird die Kreisscheibe am Radius R_A geschnitten.

An dieser Stelle $R = R_A$ wirkt eine Flächenlast von $p_A = \bar{\sigma}_0$.

Praktisches Beispiel:

Der Rotor einer Gasturbine: $p_A = \bar{\sigma}_0$ modelliert den Einfluss der Schaufeln.