7. Membran-Theorie der dünnwandigen Rotationsschalen

7.1. Grundbegriffe

Schale: Ein Körper bei dem die eine Dimension des Körpers wesentlich kleiner ist als die zwei anderen. Man kann eine Mittelfläche definieren, die nicht eben ist.

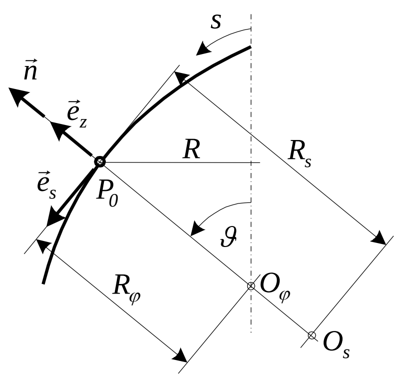
Mittelfläche: Die Punkte, die die Schalendicke halbieren, bilden die Mittelfläche.
Praktische Beispiele für Schalen: Rohre, Kessel, Druckbehälter, usw.
Die charakteristische Belastung der obigen Konstruktionen ist Druck (Flächenbelastung senkrecht zur Mittelfläche).

Rotationsschale:

- Die Mittelfläche der Schale ist rotationssymmetrisch / axialsymmetrisch.
- Die Mittelfläche wird durch eine Umdrehung der Meridiankurve erzeugt.
- Die Belastung der Schale ist ebenfalls axialsymmetrisch / rotationssymmetrisch.

Konsequenz: die mechanischen Größen hängen nicht von φ ab.

Meridianschnitt: ein Schnitt entlang der Rotationsachse eines Rotationskörpers.
Der Meridianschnitt der Schale:



P_0 - Punkt auf der Mittelfläche,
$\vec{n}=\vec{e}_z$ - der Normaleneinheitsvektor der Meridiankurve,
$\vec{e}_s, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ - an die Mittelfläche gebundenes Koordinatensystem,
$\vec{e}_z\ \vec{e}_s$ - Meridianebene,
R_s - der Krümmungsradius der Meridiankurve,
$\vec{e}_\varphi\ \vec{e}_z$ - Normalenebene,
R_φ - der Krümmungsradius der Kurve des Normalschnittes.

Membranspannungszustand: - Die Spannungen ändern sich nicht über die Dicke.
- Alle mechanischen Größen hängen nur von der Veränderlichen s ab.

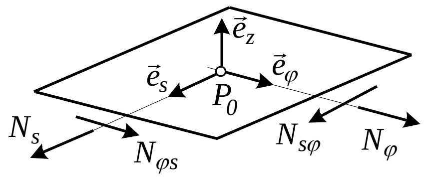
$$\left.\begin{array}{l}\sigma_s = \text{konstant (über die Dicke)},\\ \sigma_\varphi = \text{konstant (über die Dicke)},\\ \tau_{s\varphi} = \text{konstant (über die Dicke)}.\end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \text{Der Spannungstensor: } \left[\underset{s\varphi z}{\underline{\underline{F}}}\right] = \left[\underset{s\varphi z}{\underline{\underline{F}}}(s)\right] = \begin{bmatrix}\sigma_s(s) & \tau_{s\varphi}(s) & 0\\ \tau_{\varphi s}(s) & \sigma_\varphi(s) & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

$$\sigma_z = \tau_{sz} = \tau_{\varphi z} = 0.$$

Die Spannungsresultierenden über die Dicke

Schnittgrößen für den Membranspannungszustand, die nicht null sind:

$$N_s = b\sigma_s,$$
$$N_\varphi = b\sigma_\varphi,$$
$$N_{s\varphi} = N_{\varphi s} = b\tau_{s\varphi} = b\tau_{\varphi s}.$$



b – die Dicke der Schale, Schnittgröße $\equiv$ Linienkraft $[\mathrm{N/mm}]$.

Rotationssymmetrischer Fall: $N_{s\varphi} = N_{\varphi s}$

Beanspruchung:

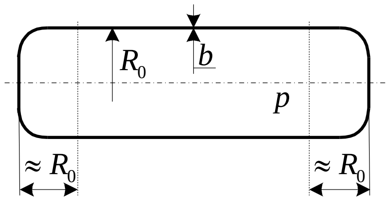
Bei Stäben: Die Resultierenden berechnet man auf den Querschnitt bezogen.
Bei Schalen: Die Resultierenden berechnet man auf die Dicke bezogen.

Gleichgewichtsbedingung (rotationssymmetrische Schale, Membranspannungszustand): $\frac{N_s}{R_s}+\frac{N_\varphi}{R_\varphi}=p_z$.

In diesem Fall bleibt nur eine Gleichgewichtsbedingung übrig.
Der Spannungszustand im Membran-Fall kann mit Gleichgewichtsgleichungen bestimmt werden.

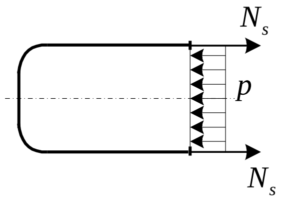
7.2. Beispiele für den Membranspannungszustand

Kreiszylinderschale (Behälter)



Im mittleren Teil der Zylinderschale – genügend weit von den Enden entfernt – entsteht ein Membranspannungszustand.

Wir schneiden die Schale senkrecht zur Rotationsachse durch:



Gleichgewichtsbedingung in Richtung der Rotationsachse:

$$2R_0\,\pi\,N_s - R_0^2\,\pi\,p=0\,,$$

$$N_s=\frac{R_0\,p}{2}=\text{konstant}\,.$$

Geometrie: $R_s\to\infty$, $R_\varphi=R_0$, $p_z=p$,

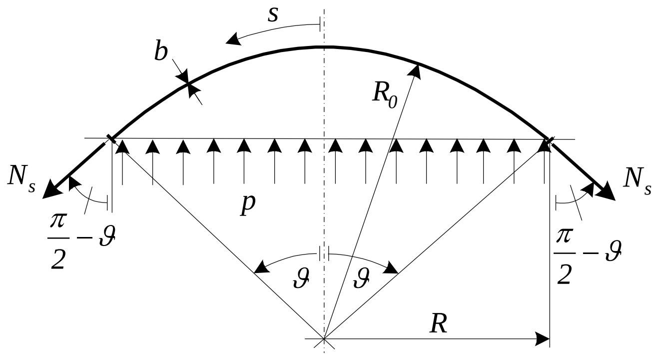
Gleichgewichtsbedingung der Rotationschale: $\underbrace{\frac{N_s}{R_s}}_{=0}+\frac{N_\varphi}{R_\varphi}=p_z$. $\Rightarrow$ $N_\varphi=p\,R_0=\text{konstant}$.

Spannungen:

$$\sigma_s=\frac{N_s}{b}=\frac{R_0}{2b}\,p=\text{konstant,}$$

$$\sigma_\varphi=\frac{N_\varphi}{b}=\frac{R_0}{b}\,p=\text{konstant} \quad - \quad \text{die Kesselformel}\,.$$

Kugelschale (Behälter)



$R=R_0\sin\vartheta,$

$N_a=N_s\cos\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta\right)=N_s\sin\vartheta.$

Rotationsachse $\equiv$ die senkrechte Achse.

Gleichgewichtsbedingung in Richtung der Rotationsachse:

$$2R\pi N_s\sin\vartheta-R^2\,\pi\,p=0\,,\qquad\Rightarrow\qquad 2N_s\sin\vartheta-R\,p=0\,,\qquad\Rightarrow\qquad 2N_s\frac{R}{R_0}-R\,p=0\,,$$

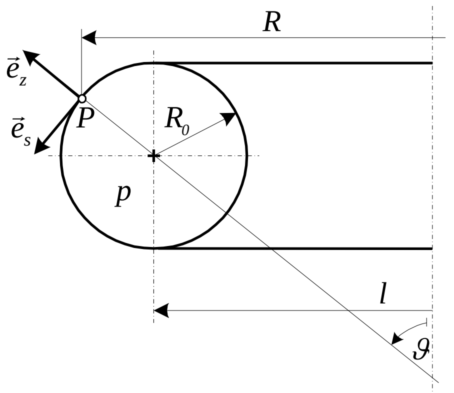
$$N_s=\frac{R_0\,p}{2}=\text{konstant}\,.$$

Geometrie: $R_s=R_\varphi=R_0$, $p_z=p$.

Gleichgewichtsbedingung: $\dfrac{N_s}{R_s}+\dfrac{N_\varphi}{R_\varphi}=p_z \quad\Rightarrow\quad \dfrac{N_s}{R_0}+\dfrac{N_\varphi}{R_0}=p \quad\Rightarrow\quad N_\varphi=R_0\,p-N_s=\dfrac{R_0\,p}{2}=\text{konst}$.

Kugelsymmetrie: $N_s=N_\varphi=\dfrac{R_0\,p}{2}=\text{konstant}$. Spannungen: $\sigma_s=\sigma_\varphi=\dfrac{R_0}{2b}\,p=\text{konstant}$.

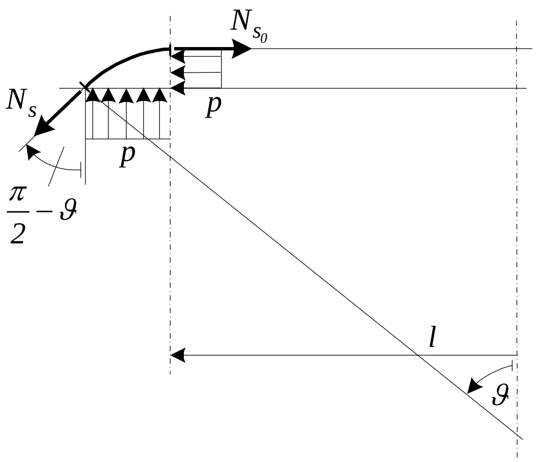
Torus-/ Kreisring-Schale



Krümmungsradien: $R_s=R_0\,,\; R_\varphi=R_0+\dfrac{l}{\sin\vartheta}$.

Radius des Punktes P: $R=l+R_0\sin\vartheta$.

Schnittführung: - mit einer Ebene durch den Punkt P senkrecht zur Rotationsachse,
- mit einem Zylinder vom Radius $R=l$.



An der Zylinderfläche mit $R=l$ sind
- die Kräfte N_{s0} in sich selbst im Gleichgewicht,
- der Druck p in sich selbst im Gleichgewicht.

Gleichgewichtsbedingung in Richtung der Rotationsachse: $2R\pi N_s\sin\vartheta-\left(R^2-l^2\right)\pi p=0.$

Umformung:

$$R=l+R_0\sin\vartheta\,,$$

$$2\left(l+R_0\sin\vartheta\right)N_s\sin\vartheta-\left(l^2+2lR_0\sin\vartheta+R_0^2\sin^2\vartheta-l^2\right)p=0\,,$$

$$2\left(l+R_0\sin\vartheta\right)N_s\sin\vartheta-\left(2l+R_0\sin\vartheta\right)R_0\sin\vartheta p=0.$$

$$N_s=\frac{R_0\,p}{2}\,\frac{2l+R_0\sin\vartheta}{l+R_0\sin\vartheta}.$$

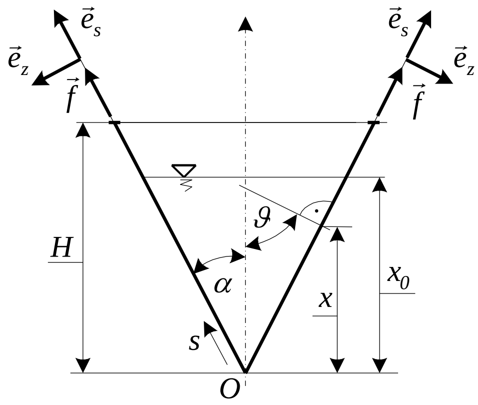
Gleichgewichtsbedingung: $\dfrac{N_s}{R_s}+\dfrac{N_\varphi}{R_\varphi}=p_z$.

$$N_\varphi=R_\varphi p_z-N_s\frac{R_\varphi}{R_s}=\left(R_0+\frac{l}{\sin\vartheta}\right)p-\frac{R_0\,p}{2}\,\frac{2l+R_0\sin\vartheta}{l+R_0\sin\vartheta}\,\frac{\left(R_0+\dfrac{l}{\sin\vartheta}\right)}{R_0}=$$

$$=\left(R_0+\frac{l}{\sin\vartheta}\right)\left(1-\frac{1}{2}\,\frac{2l+R_0\sin\vartheta}{l+R_0\sin\vartheta}\right)p=\frac{p}{\sin\vartheta}\left(R_0\sin\vartheta+l\right)\left(\frac{2l+2R_0\sin\vartheta-2l-R_0\sin\vartheta}{2\left(l+R_0\sin\vartheta\right)}\right).$$

$N_\varphi = \dfrac{p R_0}{2} =$ konstant.

Kegelschale



Die Schale ist so aufgehängt, daß $\vec{f} = f\,\vec{e}_s$.

Geometrie: $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \vartheta$.

$x = s\cos\alpha = s\sin\vartheta$.

$R = s\cos\vartheta = x\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

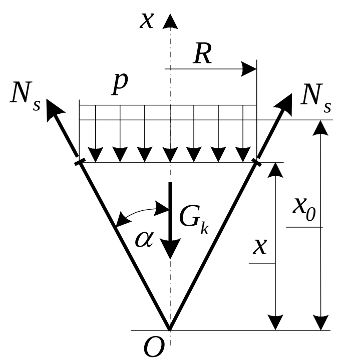
Krümmungsradien, Geometrie:

$R_s \to \infty,\quad R_\varphi = \dfrac{s}{\mathrm{tg}\,\vartheta} = s\,\mathrm{tg}\,\alpha = x\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\cos\alpha}$,

Der Flüssigkeitsdruck: $p = p_z = \gamma\left(x_0 - x\right) = \rho g\left(x_0 - x\right)$.

Die Bestimmung des Spannungszustandes:

Der Bereich $0 \le x \le x_0$:



Das Gewicht der Flüssigkeit: $G_k = \gamma\dfrac{R^2\pi}{3}x = \gamma\dfrac{\pi}{3}(\mathrm{tg}^2\alpha)\,x^3$.

Gleichgewichtsbedingung in Richtung der Rotationsachse

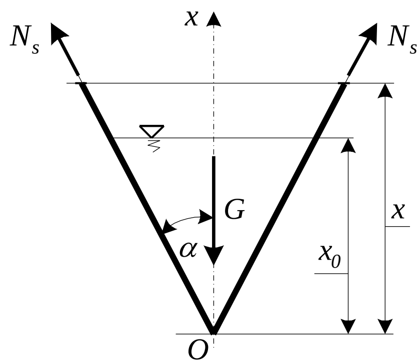
$2R\pi N_s \sin\vartheta - R^2\pi p - G_k = 0$,

$N_s = \dfrac{\gamma}{6}\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\cos\alpha}\left(3x_0 x - 2x^2\right)$.

Gleichgewichtsbedingung: $\dfrac{N_s}{R_s} + \dfrac{N_\varphi}{R_\varphi} = p_z$.

$N_\varphi = R_\varphi p_z = x\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\cos\alpha}\gamma(x_0 - x) = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\cos\alpha}\gamma(x_0 x - x^2)$.

Der Bereich $x_0 \le x \le H$:



Das gesamte Gewicht der Flüssigkeit: $G = \gamma\dfrac{\pi}{3}tg\,\alpha^2\,x_0^3$.

Gleichgewichtsbedingung in Richtung der Rotationsachse:

$2\left(x\,tg\,\alpha\right)\pi N_s \sin\vartheta - G = 0$,

$N_s = \dfrac{\gamma}{6}\dfrac{tg\,\alpha}{cos\,\alpha}x_0^3\dfrac{1}{x}$.

Gleichgewichtsbedingung: $N_\varphi = R_\varphi p_z = 0$.